



**UNIVERSITÉ BORDEAUX 1**  
Sciences Technologies



# ***Electrotechnique***



***Rappels fondamentaux  
Puissances électriques  
Systèmes triphasés  
Circuits magnétiques  
Transformateurs  
Harmoniques  
Régimes transitoires  
Réseau électrique***

***Luc Lasne, J.C Gianduzzo, Didier Geoffroy*** Université Bordeaux 1, @ : [lasne@creea.u-bordeaux.fr](mailto:lasne@creea.u-bordeaux.fr)  
07 / 09 / 2007

## **Sommaire :**

<b>I) Introduction</b>	<b>4</b>
<b>II ) Rappels fondamentaux</b>	<b>6</b>
<b>II – 1) Régime Continu ( DC ou =)</b>	<b>6</b>
<b>II - 2) Grandeurs périodiques quelconques</b>	<b>6</b>
<b>II – 3) Grandeurs sinusoïdales ( AC ou ~ )</b>	<b>7</b>
<b>II – 4) Représentation complexe des courants et tensions alternatifs sinus</b>	<b>7</b>
<b>II – 5) Exemples :</b>	<b>10</b>
<b>III) Les puissances électriques</b>	<b>11</b>
<b>III – 1) Introduction</b>	<b>11</b>
<b>III – 2) Puissance électrique en régime continu</b>	<b>11</b>
<b>III – 3) Puissance électrique en alternatif sinusoïdal</b>	<b>12</b>
<b>III – 4) Puissances électriques en régime alternatif non-sinusoïdal</b>	<b>15</b>
<b>III – 5) Problème du facteur de puissance et compensation de la puissance réactive</b>	<b>16</b>
<b>III – 6) Mesure des puissances électriques</b>	<b>17</b>
<b>III – 7) Exemples</b>	<b>18</b>
<b>Exemple 1 : en sinusoïdal</b>	<b>18</b>
<b>Exemple 2 : en non sinusoïdal</b>	<b>18</b>
<b>IV ) Circuits à courants alternatifs triphasés</b>	<b>19</b>
<b>IV – 1) Introduction</b>	<b>19</b>
<b>IV – 2) Tensions triphasées</b>	<b>19</b>
<b>IV – 3) Couplage des phases</b>	<b>20</b>
<b>IV – 4) Charges triphasées</b>	<b>22</b>
<b>IV - 5) Neutre, neutre fictif</b>	<b>23</b>
<b>IV - 6) Système équilibré, schéma équivalent monophasé</b>	<b>23</b>
<b>IV - 7) Système déséquilibré et importance du neutre</b>	<b>24</b>
<b>IV – 8 ) Puissances en Triphasé</b>	<b>26</b>
<b>IV - 9) Exemples</b>	<b>27</b>
<b>IV - 10) Mesures de puissances en triphasé</b>	<b>28</b>
<b>V ) Circuits magnétiques et Transformateurs</b>	<b>29</b>

V - 1) Circuits magnétiques	29
V - 2) Transformateurs	38
V - 3) Transformateur monophasé idéal	38
V - 4) Transformateur monophasé réel	39
V - 5) Exemple	42
V - 6) Valeurs relatives et Impédances réduites	43
V - 7) Transformateurs triphasés	45
VI ) Les harmoniques	48
VI – 1 ) Bases mathématiques	48
VI – 2 ) Application aux signaux électriques	48
VI – 3 ) Puissance déformante et nature des courants harmoniques	49
VI – 4 ) Sources d'harmoniques et propagation	50
VI – 5 ) Composition des courants harmoniques en triphasé	51
VII ) Les régimes transitoires	52
VII – 1 ) Régime permanent et régime transitoire	52
VII – 2 ) Résolution des équations différentielles	52
VII – 3 ) Application aux régimes transitoires du premier ordre	53
VII – 4 ) Application aux régimes transitoires du second ordre	53
VII – 5 ) Exemple de calcul avec second membre sinusoïdal	55
VIII ) Le Réseau Electrique	57
VIII – 1) Organisation globale	57
VIII – 2) Nature de la tension, comparaison continu / alternatif	58
VIII - 3) L'alternatif sinusoïdal et le triphasé	59
VIII – 4) Le réseau réel	62
VIII – 5) Gestion de la production et différenciation des sources	64
VIII – 6) Modélisation de parties du réseau	65
VIII – 7) Ecrroulement de la tension et interconnexion internationale	66
VIII - 8) Calcul des courants de court-circuits	68
Bibliographie :	72

## 1) Introduction

### *Qu'est ce que l'électrotechnique ?*

C'est la partie de la physique qui regroupe les technologies de :

- Production,
  - Transport,
  - Transformation,
  - Exploitation (ou Consommation)
- } de L' **Energie** Electrique

C'est une matière dans laquelle on s'intéresse en priorité à l'**aspect énergétique** des systèmes rencontrés.

### *Comment tout d'abord bien comprendre ce qu'est l'énergie ?*

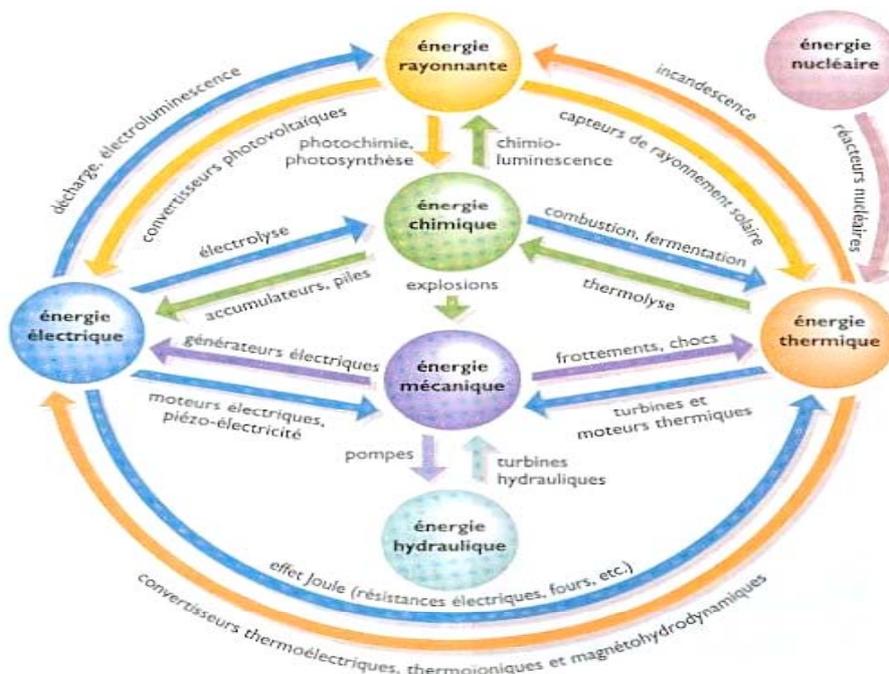
Avant tout, il faut saisir que l'énergie est un **concept** de la physique. Tous les systèmes physiques sont reliés entre eux par les forces fondamentales de la physique (attraction, électromagnétisme, etc...) et leurs conséquences. Les "êtres physiques" étant reliés par ces forces, ils se trouvent en permanence en état d'interaction ou "d'échange". Comme il faut lui donner un nom, la "substance" de cet échange s'appelle l'énergie et son unité est le **Joule (J)**.

Les caractéristiques de la notion d'énergie sont les suivantes<sup>1</sup> :

- Il ne peut y avoir création ou disparition d'énergie mais seulement transformation d'une forme en une autre (principe de Mayer) ou transfert d'un système à un autre (principes de Carnot).
- Il peut y avoir transformation d'énergie en matière dans les réactions nucléaires selon la formule d'Einstein  $E=mc^2$  comme quoi la matière est un "réservoir" d'énergie.
- Toute conversion s'accompagne de pertes, autrement dit une énergie ne se transforme jamais intégralement en une autre, ces pertes impliquent la notion de **rendement** des systèmes de conversion d'énergie.

### *Pourquoi l'électricité est au cœur des réalités énergétiques actuelles ?*

Le graphe ci dessous illustre les différents types d'énergie qui existent et les transformations possibles.



<sup>1</sup> Source : Dictionnaire petit Larousse illustré 2001

Il est aisé de constater que l'énergie électrique est directement ou indirectement **reliée**, et ce de façon réversible (sauf nucléaire), à **l'intégralité des énergies** existantes.

En bref, il est possible de générer de l'électricité à partir de toutes les sources d'énergie et inversement.

De plus, avec l'électricité, la réversibilité, le transport, la transformation et le chiffage sont faciles à réaliser, la plupart du temps inodore, invisible, et peu bruyant... d'où sa quasi universalité.

En revanche, **l'électricité ne se stocke pas**, un défaut qui a des conséquences très importantes sur le fonctionnement des réseaux de production et de distribution d'énergie électrique.

### **Comment quantifier l'énergie, et pourquoi parler de puissance ?**

Quel que soit son type, toute énergie dépend du temps. Plus on fait travailler un système (l'énergie s'appelle aussi le travail), plus la quantité d'énergie mise en jeu augmente.

Il est alors très peu pratique de manipuler et de mesurer ces quantités puisqu'elles sont en perpétuelle expansion.

Il est beaucoup plus aisé de raisonner sur la quantité d'énergie par unité de temps, c'est ce qu'on appelle **la puissance** dont l'unité est le Watt ( $W$ ).

On retiendra la formule fondamentale :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

← Watts ( $W$ )
→ Joules ( $J$ )  
→ Secondes ( $s$ )

*NB : pour quantifier la consommation du moteur d'une voiture, on parle du nombre de litres de carburants dépensés pour faire 100km. On peut également parler de la puissance (en chevaux) développée par ce moteur. On est par contre incapable de préciser combien de litres d'essence la voiture a consommé depuis qu'elle existe ou le nombre total de Joules qu'elle a converti en couple moteur. C'est l'illustration du fait qu'on manipule les question énergétiques en raisonnant sur la puissance et non pas sur le travail .*

Pour finir, le fait que la transformation d'énergie soit source de pertes s'exprime par la notion de rendement énergétique dont on retiendra la définition suivante :

$$\eta = \frac{P_u}{P_t}$$

← Rendement
→ Puissance utile de la conversion d'énergie  
→ Puissance totale consommée =  $P_u + Pertes$

Comme il existe toujours des pertes, il résulte que  $\eta < 1$ .

### **Comment s'exprime une puissance électrique ?**

Une puissance électrique est toujours le produit d'un **Courant** (en Ampères) avec une **Tension** (en Volts), le tout multiplié par un **facteur de puissance** (sans dimension).

On retiendra la fomule générique suivante :

$$P_{elec} = V.I.k \quad k \in [0,1] \text{ étant le facteur de puissance}$$

### **Quelles grandeurs doit on alors maîtriser en électrotechnique ?**

Etant donné la formulation des puissances électriques, il est nécessaire de pouvoir calculer, prévoir et maîtriser tous les courants, tensions et puissances d'un système afin de maîtriser les différentes énergies qui y sont mises en jeu.

## II ) Rappels fondamentaux

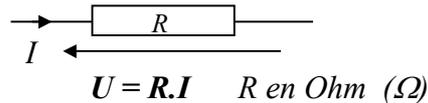
### II – 1) Régime Continu ( DC ou =)

On parle de régime continu dès lors qu'on utilise des générateurs de tension ou de courant continu tels les piles, accumulateurs, batteries, génératrices à CC, dynamos.

En régime permanent continu, les tensions et courants ne dépendent pas du temps, la seule chose qui les caractérise est leur valeur moyenne.

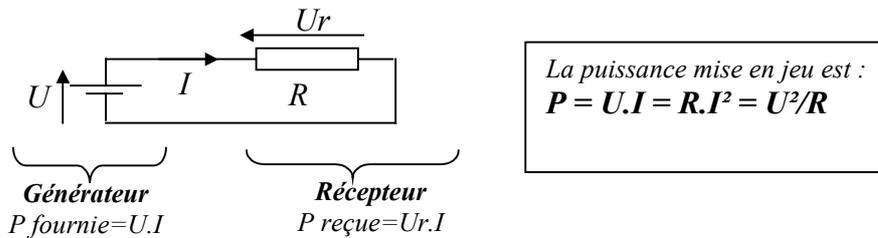
#### - Récepteurs

Le seul récepteur existant en régime établi continu est la **Résistance** dont le fonctionnement est régi par la **loi d'Ohm** :



#### - Puissance

Lorsqu'un récepteur électrique en régime continu est soumis à la fois à une tension et à un courant, il est le siège d'une dissipation de puissance. On dit alors que la puissance électrique est fournie par la source et consommée par la résistance.



NB : En régime continu, le facteur de puissance vaut systématiquement 1.

### II - 2) Grandeurs périodiques quelconques

On parle de grandeurs périodiques dès lors que les courants  $i$  et tensions  $v$  présentent une période temporelle,  $T$ , telle que :  $i(t) = i(t+T)$  ou  $v(t) = v(t+T)$ .

$f = \frac{1}{T}$  est la fréquence de répétition de la grandeur périodique.  $f$  est en Hertz (Hz) et  $T$  en secondes (s).

- **Valeur moyenne**

Pour un signal périodique  $s$  de période  $T$ , on note  $\langle s \rangle$  sa valeur moyenne.

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} s(t) dt$$

On dit aussi que  $\langle s \rangle$  représente la **composante continue** de ce signal.

- **Valeur efficace**

On note  $S_{eff}$  ou  $S$  la valeur efficace d'un signal quelconque  $s$  périodique de période  $T$ .

$$S_{eff} = S = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} s^2(t) dt}$$

NB : C'est la recherche de la puissance par effet Joule due à un courant alternatif qui mène à la notion de valeur efficace. En réalité la valeur efficace d'un courant est celle qui produit la même puissance consommée par effet Joule qu'un courant continu de même valeur.

En bref, la formulation des puissances sera la même en alternatif et en continu sous réserve d'utiliser la valeur efficace (vraie) dans tous les cas.

NB : La mesure des courants ou tensions efficaces se fait par les appareils dits "RMS"

NB : si  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$  alors  $\langle i \rangle = \langle i_1 \rangle + \langle i_2 \rangle$  mais  $I \neq I_1 + I_2$

## II – 3) Grandeurs sinusoïdales ( AC ou ~ )

C'est en régime sinusoïdal que transformateurs, machines tournantes, etc, ont un fonctionnement optimum. C'est également en régime sinusoïdal qu'on peut transporter l'énergie électrique sous très haute tension grâce à l'utilisation des transformateurs.

### -Nature des tensions et courants

Une grandeur sinusoïdale s'écrira :  $s(t) = S_{max} \sin(\omega.t + \varphi)$

$S_{max}$  est l'**amplitude** du signal ,  $\omega$  est la **pulsation**,  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

$\omega t + \varphi$  est la phase instantanée ,  $\varphi$  est la phase à l'origine des temps, on dira "la phase"

Pour exprimer simplement, par une valeur significative, un tel signal on dispose d'une valeur caractéristique qui sera **toujours la valeur énoncée par défaut** dès lors qu'on parlera d'une grandeur sinusoïdale : **La valeur efficace**

On notera  $S_{eff}$  ou  $S$  la valeur efficace du signal  $s$  sinusoïdal :

$$S_{eff} = S = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt} = \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}$$

NB : attention cette valeur efficace remarquable est limitée au cas particulier des signaux sinusoïdaux.

NB : La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal pur est nulle.

## II – 4) Représentation complexe des courants et tensions alternatifs sinus

### Rappels sur les nombres complexes :

Soit  $\underline{z} \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}$  étant l'espace en deux dimensions des nombres complexes, on peut écrire :

$\underline{z} = a + i.b$  avec  $i$  le nombre complexe unité tel que  $i^2 = -1$ . On préfère, en électricité, et pour ne pas confondre  $i$  avec un courant, écrire :  $z = a + j.b$  avec  $j$  le nombre complexe unité.

On représente de façon classique les nombres complexes dans un plan appelé plan complexe représenté ci contre :

- La norme (ou module) du complexe  $\underline{z}$  s'écrit :

$$r = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

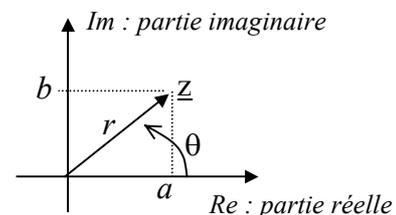
- La projection du module sur les axes donne :

$$a = r \cdot \cos \theta \quad \text{et} \quad b = r \cdot \sin \theta$$

- D'où l'écriture polaire du nombre complexe  $\underline{z}$  :

$$\underline{z} = a + i.b = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r \cdot e^{j\theta}$$

-  $\theta$  est appelé l'argument de  $\underline{z}$ , on écrit  $\theta = \text{Arg}(\underline{z}) = \text{Arctan}(b/a)$



### Spécificité de l'électrotechnique :

En électrotechnique, les récepteurs électriques sont pratiquement toujours connectés aux bornes d'une même source fournissant une tension sinusoïdale. En considérant la tension  $u(t)$ , comme tension d'alimentation d'un système de charges, on considèrera souvent cette tension comme étant à l'origine des phases, c'est à dire que  $u(t) = U_m \cdot \cos(\omega.t)$ .

Par ailleurs, la grande majorité des récepteurs électriques sous tension sinusoïdale est représentée par des récepteurs inductifs. Ainsi, dans la plupart des cas, le courant  $i(t)$  traversant un dipôle est en retard par rapport à la tension  $u(t)$ .

On écrira alors par convention :  $i(t) = U_m \cdot \cos(\omega.t - \varphi)$  avec  $\varphi > 0$

Cette écriture (avec le signe moins dans le cosinus) est une convention d'écriture propre à l'électrotechnique mais est rarement utilisée en électronique ou automatique.

Il faut bien comprendre que **pour représenter une grandeur sinusoïdale**, il suffit, à fréquence constante, de **connaître son module et sa phase**.

En électrotechnique, l'écriture sous **forme complexe** des courants et des tensions permet de ne les caractériser que par ces deux grandeurs et non plus en fonction du temps. On fera alors, de façon universelle, **l'équivalence** formulée dans le cadre ci dessous (par convention pour un récepteur inductif) :

**Grandeurs temporelles :**

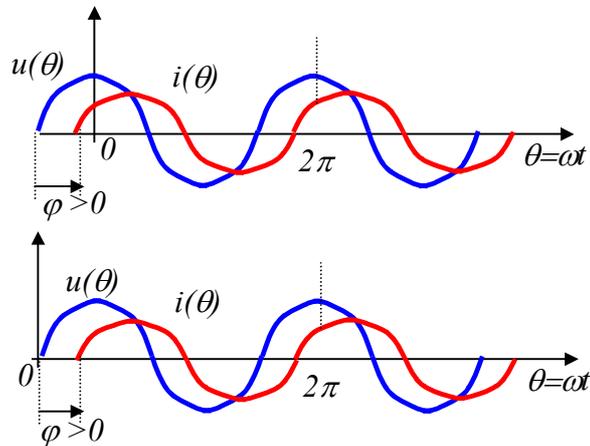
$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega.t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega.t)$$

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega.t - \varphi) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega.t - \varphi)$$

ou

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega.t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega.t)$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega.t - \varphi) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega.t - \varphi)$$

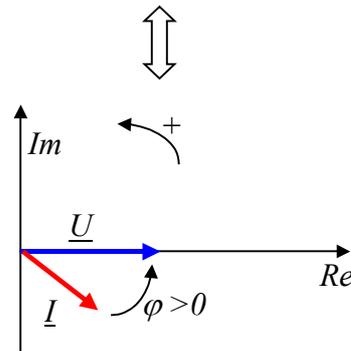


**Grandeurs Complexes :**

$$\underline{U} = U \quad (\text{avec } U = U_m/\sqrt{2})$$

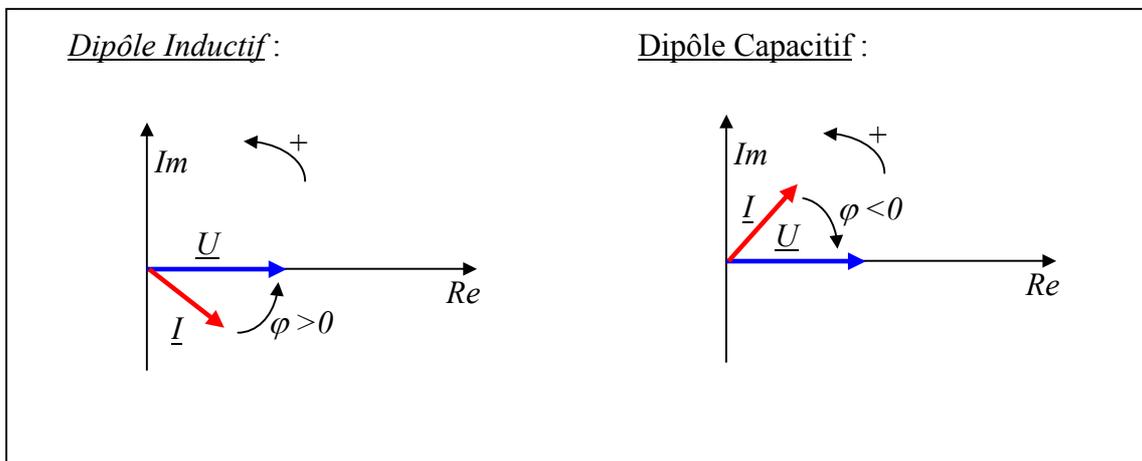
$$\underline{I} = I \cdot e^{-j\varphi} \quad (\text{avec } I = I_m/\sqrt{2})$$

On représente ces complexes dans le plan complexe, on appelle ceci un "diagramme de Fresnel"



NB : Les grandeurs notées  $\underline{I}$  et  $\underline{U}$  forment ce qu'on appelle "l'amplitude complexe" ou le "phaseur" de  $U$  et  $I$  c'est à dire le nombre complexe associé privé de  $\sqrt{2} \cdot \exp(j \cdot \omega.t)$ , terme qui n'amène aucune information et contribue à la lourdeur des calculs en étant en facteur de tous les termes.

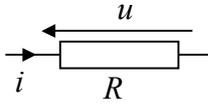
Dans le cas du récepteur capacitif, le déphasage est évidemment de signe opposé, on retiendra :



Application aux récepteurs électriques

En régime alternatif quelconque, il existe trois grands types de dipôles : les résistances, comme en continu, mais aussi les inductances et les capacités. A chacun de ces dipôles correspond une relation liant la tension à ses bornes et le courant qui le traverse.

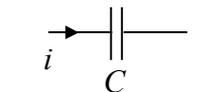
Les relations générales courant tension sont :



Résistance :  $u(t) = R.i(t)$

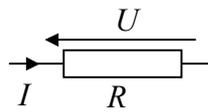


Inductance :  $u(t) = L. \frac{di(t)}{dt}$  *L en Henry (H)*

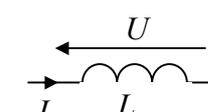


Condensateur :  $i(t) = C. \frac{du(t)}{dt}$  *C en Farad (F)*

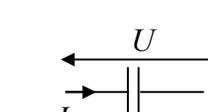
En utilisant la notation complexe, les relations générales courant tension des dipôles de base deviennent alors :



Résistance :  $\underline{U} = R.\underline{I}$  càd  $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R$



Inductance :  $\underline{U} = j.L.\omega.\underline{I}$  càd  $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j.L.\omega$



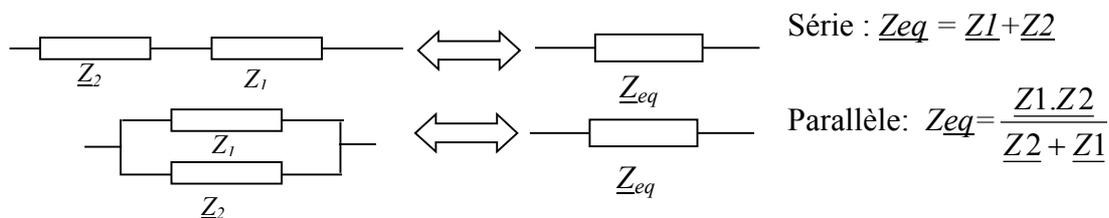
Condensateur :  $\underline{I} = j.C.\omega.\underline{U}$ ,  $\underline{U} = \frac{1}{j.C.\omega}.\underline{I}$  càd  $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j.C.\omega}$

La grandeur, notée  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ , est appelée **impédance**.

*NB : Le module de l'impédance représente le rapport des modules de la tension et du courant, c'est ce qu'en continu on appelait la résistance mais qui, en alternatif, dépend de la fréquence.*

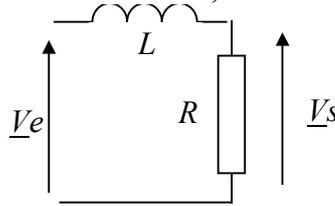
Règles d'association d'impédances :

C'est le grand intérêt de la notation complexe : elles sont les mêmes que celles des résistances. On retiendra donc de façon générale :



## II – 5) Exemples :

- Exemple 1 : Connaissant la tension d'entrée, déterminer toutes les autres grandeurs.

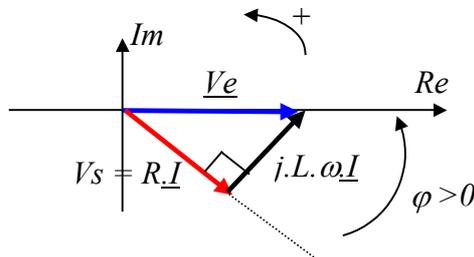


L'équation de maille, en notation complexe, qui lie  $\underline{V_s}$  à  $\underline{V_e}$  est :  $\underline{V_e} = jL\omega \underline{I} + R \underline{I}$

La loi d'Ohm sur la résistance donne par ailleurs :  $\underline{V_s} = R \underline{I}$

D'où  $\underline{V_s}/\underline{V_e} = R/(1+jL\omega/R)$  donc :  $V_s = R \frac{V_e}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$  et  $\varphi = \text{Arg}(V_s) = -\text{Arctan}(L\omega/R)$

On peut également représenter le diagramme de Fresnel associé à cette maille :

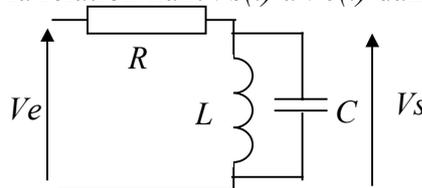


L'application du théorème de Pythagore donne par ailleurs directement le résultat :

$$V_e^2 = (RI)^2 + (L\omega I)^2 \quad \text{d'où} \quad I = \frac{V_e}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}} \quad \text{et} \quad V_s = R \frac{V_e}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$$

On remarque aussi que  $\tan(\varphi) = L\omega/R$  d'où  $\varphi = \text{Arctan}(\frac{L\omega}{R})$

- Exemple 2 : Déterminer la relation liant  $V_s(t)$  à  $V_e(t)$  dans le circuit suivant :



Pour cela, on va calculer  $\frac{V_s}{V_e}$  :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{(L//C)}{(L//C) + R}$$

sachant que l'impédance de  $L//C$  est :  $(L//C) = \frac{j.L.\omega}{1 + L.C.(j\omega)^2}$

$$= \frac{j.L.\omega}{(1 + L.C.(j\omega)^2)R + j.L.\omega} = \frac{j.L.\omega}{1 + j.\frac{L}{R}\omega + L.C.(j\omega)^2}$$

En calculant le module de  $\frac{V_s}{V_e}$ , on obtient le rapport des modules de  $V_s(t)$  et de  $V_e(t)$  :

Ainsi :  $V_s = V_e \cdot \frac{L\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (\frac{L}{R}\omega)^2}}$

Pour la phase, il suffit de calculer l'argument de  $\underline{V_s}/\underline{V_e}$  :  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\frac{L\omega}{R.(1-LC\omega^2)})$

### III) Les puissances électriques

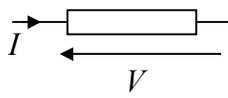
#### III – 1) Introduction

En physique, une puissance représente une quantité d'énergie par unité de temps. Son unité est le *Watt* ( $1W = 1J/s$ ). En règle générale, la puissance qui motive les systèmes de conversion d'énergie est la puissance moyenne des systèmes, on l'appelle aussi "*puissance active*".

Le concept de puissance est un outil indispensable en électrotechnique, il permet d'ailleurs souvent d'avoir une vision globale des systèmes et de résoudre facilement certains problèmes par la technique du bilan de puissances.

Outre la définition théorique de la puissance dite "*active*", on retiendra la formulation pratique énoncée ci dessous et faisant apparaître directement la notion de "*facteur de puissance*" :

Un dipôle électrique placé sous une tension de valeur efficace  $V$  et parcouru par un courant de valeur efficace  $I$  consomme une puissance  $P$  ( $W$ ) toujours inférieure ou égale au produit  $V.I$ . On écrit alors comme suit la formulation universelle de la puissance en convention récepteur :



$$P = k.V.I, \text{ où } k \in [0,1]$$

$P$  s'exprime en Watts ( $W$ )

Le facteur  $k$  est appelé "*facteur de puissance*" et joue un rôle déterminant en électrotechnique.

Cette formulation, où la puissance est positive est établie en convention récepteur:

$P > 0$  correspond à une **puissance consommée** par le dipôle

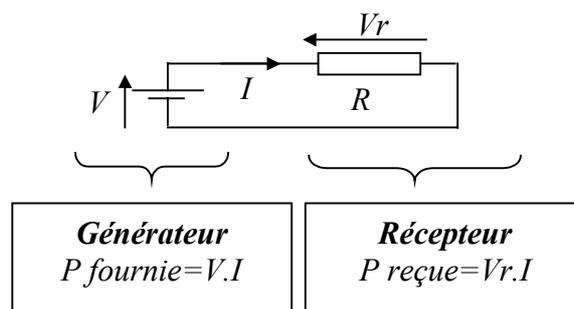
Par symétrie on statue, toujours en convention récepteur, que :

$P < 0$  correspond à une **puissance fournie** par le dipôle

*NB : en convention générateur c'est évidemment l'inverse*

#### III – 2) Puissance électrique en régime continu

Le régime continu représente le cas le plus simple de calcul de puissance électrique puisque le facteur de puissance vaut  $1$ . Le seul récepteur passif étant la résistance, on peut résumer ce calcul sur le schéma ci-dessous.



Comme l'énergie (et donc la puissance) ne se perdent pas (on dit qu'elles sont conservatives), l'énergie produite est égale à l'énergie consommée.

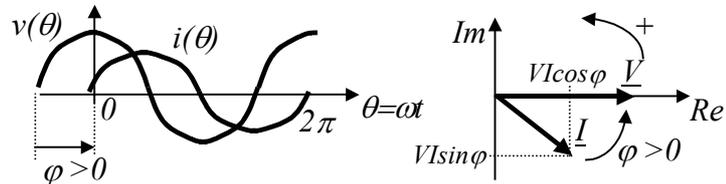
Donc :  $P = V.I = V_R.I = R.I^2$  puisque  $V_R = RI$  aux bornes de la résistance.

### III – 3) Puissance électrique en alternatif sinusoïdal

En alternatif sinusoïdal, les grandeurs dépendent du temps. On considère le cas général le plus répandu en électrotechnique d'un dipôle inductif, c'est à dire d'un courant déphasé en arrière d'un angle  $\varphi$  par rapport à la tension :

$$v(t) = V_{max} \cdot \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_{max} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$



#### Puissance instantanée

On transpose en alternatif ce qui a été établi en continu en formant :  $p(t) = v(t) \cdot i(t)$

C'est à dire :  $p(t) = V_{max} \cdot \cos(\omega t) \cdot I_{max} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$   
 $p(t) = V_{max} \cdot I_{max} \cdot \cos(\varphi)/2 + V_{max} \cdot I_{max} \cdot \cos(2\omega t - \varphi)/2$   
 en utilisant les tensions et courants efficaces :

$$p(t) = V \cdot I \cdot \cos(\varphi) + V \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$$

#### Puissance active

C'est la **valeur moyenne** de la puissance instantanée, c'est à dire :

$$P = \langle p(t) \rangle = V \cdot I \cdot \cos \varphi \text{ (en W)}$$

NB : on peut également considérer que la puissance active correspond au produit scalaire de  $\underline{V}$  et de  $\underline{I}$ . La projection de  $\underline{I}$  sur  $\underline{V}$  est donc la partie "active" du courant.

#### Puissance fluctuante

C'est la partie variable de  $p(t)$  :

$$P_f(t) = V \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$$

#### Puissance apparente

Les grandeurs  $v(t)$  et  $i(t)$  étant périodiques, on les caractérise par leurs valeurs efficaces  $V$  et  $I$ .

On définit alors la puissance apparente comme la grandeur nommée  $S$  :

$$S = V_{eff} \cdot I_{eff} = V \cdot I \text{ (en VA)}$$

NB : Cette puissance est souvent appelée "puissance de dimensionnement", elle est la grandeur caractéristique de l'isolation et de la section des conducteurs, c'est à dire des dimensions des appareillages.

#### Facteur de puissance

En alternatif sinusoïdal (uniquement), le facteur de puissance est défini comme la grandeur sans unité :

$$k = P/S = \cos \varphi$$

NB :  $\cos \varphi \in [0,1]$

#### Puissance réactive

Elle n'est définie qu'en régime sinusoïdal. On définit la puissance réactive comme celle due à la partie "réactive" du courant, c'est à dire à  $I \cdot \sin \varphi$ . Son unité est le Volt ampère Réactif (VAR).

On retiendra la formule de cette puissance qu'on nomme classiquement  $Q$  :

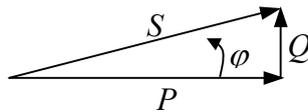
$$Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi \text{ (en VAR)}$$

#### Relations entre P, Q et S

Notons que :  $P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$ ,  $Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi$  et  $S = V \cdot I$  d'où :

$$P^2 + Q^2 = S^2$$

Cette formulation fait apparaître une relation également graphique entre les différentes grandeurs. On parle alors de **triangle des puissances** :



NB : le triangle des puissances est évidemment un triangle rectangle.

D'autre part, on fait également apparaître la grandeur caractéristique :

$$\tan\varphi = \frac{Q}{P}$$

NB : En régime sinusoïdal, il revient au même de considérer le facteur de puissance ou la valeur de  $\tan\varphi$ .

**ATTENTION** : Il est impératif de connaître par cœur les éléments apparaissant dans le tableau suivant qui résume ce qui précède :

$P = V.I.\cos\varphi \quad \text{où } V = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \text{ et } I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ $S^2 = (V.I)^2 = P^2 + Q^2$ $Q = V.I.\sin\varphi$ $k = \frac{P}{S} = \cos\varphi \quad \tan\varphi = \frac{Q}{P}$	<p style="text-align: center;">Encadré valable uniquement en régime sinusoïdal</p>
--	--

NB : Il faut bien comprendre que ces formules, bien que très souvent rencontrées en électrotechnique, représentent un cas particulier de calcul de puissances en régime sinusoïdal pur.

Le facteur de puissance, par exemple, souvent appelé directement "  $\cos\varphi$  " n'est plus du tout égal à cette valeur dès lors que les tensions ou les courants ne sont pas sinusoïdaux.

### Puissance apparente complexe

Pour relier toutes ces grandeurs en régime sinusoïdal pur, on peut faire apparaître une grandeur de calcul : la **puissance apparente complexe**, appelée  $\underline{S}$  qu'on définit comme suit :

$$\underline{S} = \underline{V}.\underline{I}^* \quad (\underline{I}^* \text{ est le complexe conjugué de } \underline{I})$$

Comme  $\underline{I} = I.\exp(-j\varphi) = I.\cos\varphi - j.I.\sin\varphi$ ,

$$\underline{V}.\underline{I}^* = V.I.\exp(+j\varphi) = VI.\cos\varphi + j.VI.\sin\varphi$$

donc :

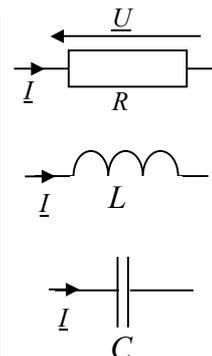
$$\underline{S} = P + j.Q$$

On retrouve également que :

$$S = |\underline{S}|$$

On exprime dans le tableau ci dessous les puissances fournies par les différents récepteurs fondamentaux de l'électrotechnique, en régime alternatif sinusoïdal

<b>Résistance</b>	$\underline{S} = \underline{V}.\underline{I}^* = R.I.\underline{I}^*$ $= R.I^2$ $= U^2/R$	$P = R.I^2 = U^2/R$	$Q = 0$
<b>Inductance</b>	$\underline{S} = \underline{V}.\underline{I}^* = jL\omega.I.\underline{I}^*$ $= j.L\omega.I^2$ $= j.U^2/L\omega$	$P = 0$	$Q = L\omega.I^2$ $= U^2/L\omega$
<b>Condensateur</b>	$\underline{S} = \underline{V}.\underline{I}^* = \underline{V}.\underline{(-j.C\omega\underline{V})}$ $= -jC\omega V^2$ $= -j.I^2/C\omega$	$P = 0$	$Q = -C\omega V^2$ $= -I^2/C\omega$



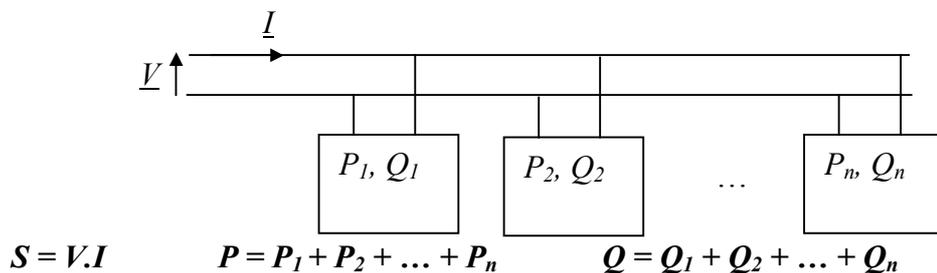
NB : On comprend par l'examen de ce tableau que les résistances sont les seuls récepteurs passifs à consommer de la puissance active, les inductances sont les seules à consommer de la puissance réactive et les capacités les seules à en produire.

### Théorème de Boucherot

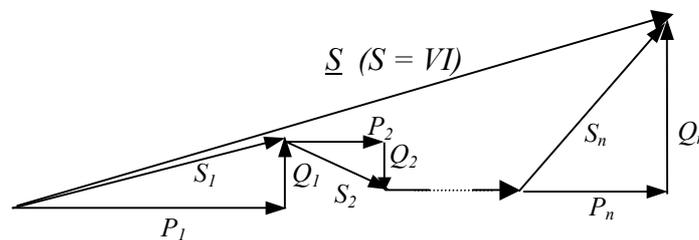
Ce théorème s'écrit : « **La puissance active d'un système est la somme des puissances actives des éléments le constituant, de même pour la puissance réactive. Cependant, c'est faux en ce qui concerne la puissance apparente** »

NB : Ce théorème traduit le principe de la conservation de l'énergie électrique évoquée dans l'introduction de ce cours.

On peut représenter le théorème de Boucherot par le schéma ci dessous qui fait apparaître  $n$  charges consommant chacune sa puissance active et sa puissance réactive :



Ces relations apparaissent également dans la composition des  $n$  triangles des puissances :



On constate bien sur cette construction que les puissances actives et réactives s'ajoutent algébriquement sur les axes alors que la puissance apparente  $S$  n'est pas égale, en valeur, à la somme des hypoténuses des triangles.

En revanche, la puissance apparente complexe, représentée par le vecteur  $S$  est bien la somme vectorielle des puissances apparentes complexes des diverses charges.

On peut donc écrire :

$$S \neq S_1 + S_2 + \dots + S_n \quad \text{alors que} \quad \underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \dots + \underline{S}_n$$

NB : Attention ! Le théorème de Boucherot est valable à fréquence constante

Par ailleurs, en général :  $S \neq V_1.I_1 + V_2.I_2 + \dots + V_n.I_n$

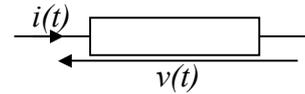
### III – 4) Puissances électriques en régime alternatif non-sinusoïdal

En régime alternatif non sinusoïdal, il existe encore plusieurs types de puissances. Les éléments réactifs créent des déphasages entre les tensions et les courants (entre les composantes spectrales en fait, voir chapitre sur les harmoniques) ce qui justifie encore les notions de puissances *actives* et *réactives*.

#### Puissance active

Pour un récepteur quelconque, alimenté par une tension quelconque  $v(t)$  périodique de période  $T$ , et traversé par un courant  $i(t)$ , la puissance active ou moyenne s'écrit uniquement à partir de la formule :

$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} v(t) \cdot i(t) \cdot dt \quad (\text{en } W)$$



Cette puissance est uniquement due aux éléments dits actifs (résistances et éléments mécaniques), c'est à dire aux éléments qui consomment réellement de l'énergie.

#### Puissance apparente

Les grandeurs  $v(t)$  et  $i(t)$  étant périodiques, on les caractérise toujours par leurs valeurs efficaces  $V$  et  $I$ .

On définit alors encore la puissance apparente comme la grandeur nommée  $S$  :

$$S = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = V \cdot I \quad (\text{en } VA)$$

Il apparaît ainsi toujours une notion de **facteur de puissance** qui s'écrit :

$$k = P / S$$

#### Puissance réactive

On appelle encore  $Q$  la puissance dit "*réactive*" sous certaines réserves : Elle n'est définie que par rapport aux sinusoïdes fondamentales (à la fréquence  $f$ ) du courant et de la tension. S'il n'y a pas de déphasage ces grandeurs alors  $Q=0$ .

*NB : la puissance réactive n'est définie qu'en régime sinusoïdal, il faut considérer la décomposition en sinusoïdes dites "harmoniques" des grandeurs. Pour cela, lire le chapitre sur les harmoniques.*

#### Puissance déformante

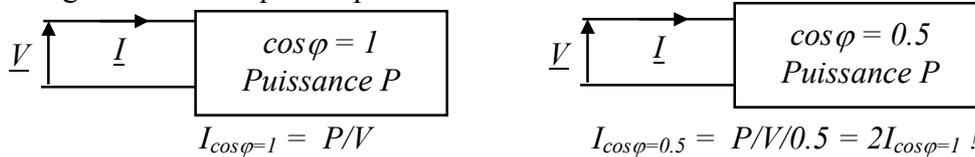
On appelle  $D$  la puissance dite "*déformante*". Cette puissance est liée à la présence d'harmoniques dans le courant ou la tension, c'est à dire au fait que l'un ou l'autre est non sinusoïdal. Si les courants et les tension sont sinusoïdaux, alors  $D=0$ .

On retiendra alors, dans le cas général, l'encadré suivant :

$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} v(t) \cdot i(t) \cdot dt \quad S = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = V \cdot I$ <p style="text-align: center;">Si le déphasage entre <math>v_{\text{fond}}</math> et <math>i_{\text{fond}}</math> est nul alors <math>Q=0</math> Si <math>v</math> et <math>i</math> sont sinusoïdales, alors <math>D=0</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Formule générale qui relie les puissances :</b></p> $S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$	<p style="text-align: center;"><i>Encadré valable dans n'importe quel régime</i></p>
--	--

### III – 5) Problème du facteur de puissance et compensation de la puissance réactive

La présence d'un facteur de puissance  $< 1$  dans une installation a une conséquence très négative : Le courant fourni pour produire cette puissance est surélevé par rapport au cas où le facteur de puissance est égal à 1. L'exemple simple ci-dessous le confirme :



En revanche, la tarification de l'énergie comptabilise uniquement la puissance active consommée. De ce fait, les deux utilisateurs ci-dessus payent la même facture, alors que le récepteur dont le  $\cos \varphi = 0.5$  consomme deux fois plus de courant efficace.

Ainsi, les sociétés de production d'énergie électrique surtaxent les utilisateurs dont le  $\cos \varphi$  est  $< 0.8$ , de manière à pénaliser le surdimensionnement du réseau qu'implique la nécessité d'un courant trop grand.

Quand une installation, ou un réseau électrique présente un  $\cos \varphi < 0.8$ , il est nécessaire de modifier l'installation de manière à élever ce facteur. Etant donné que la grande majorité des installations sont plutôt inductives, c'est-à-dire que le  $\cos \varphi < 1$  est dû à la présence d'inductances dans les circuits, la manière la plus simple d'élever le  $\cos \varphi$  est de placer une batterie de condensateurs en tête de l'installation. On appelle ça la compensation de l'énergie réactive.

#### Compensation d'énergie réactive

Considérons l'impédance  $\underline{Z} = r.e^{j\varphi} = R + jX$ , représentant une charge inductive ( $X > 0$ ), ci contre.

La puissance réactive correspondante est  $Q = X.I^2$

L'ajout d'un condensateur  $C$  en tête du circuit ne modifie pas la charge et ne rajoute aucune puissance active.

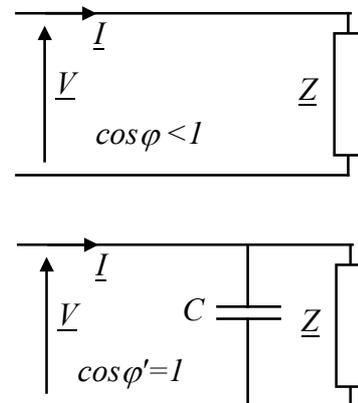
En revanche,  $C$  produit de la puissance réactive et va donc donner un nouveau facteur de puissance :  $\cos \varphi'$

On sait que  $Q_C = -C\omega V^2$ .

Le théorème de Boucherot apporte :  $Q_{tot} = Q + Q_C$

La compensation de puissance réactive consiste à assurer  $Q_{tot} = 0$  c'est-à-dire à  $Q_C = -Q$  et  $\cos \varphi' = 1$

Le Condensateur à choisir a alors la valeur :  $C = X.I^2/\omega V^2 = Q/\omega V^2$



NB : Pour ne pas sur-dimensionner inutilement les condensateurs, on a tendance à calculer leurs valeurs pour aboutir à  $\cos \varphi = 0.9$  (0.92 pour EDF, soit  $\tan \varphi = 0.42$ ).

Du coup il est intéressant de connaître la formule générale qui donne la valeur de la capacité en fonction du  $\cos \varphi$  et du  $\cos \varphi'$ .

On montre qu'en partant d'un  $\tan \varphi$ , la capacité permettant d'obtenir la valeur  $\tan \varphi'$  est :

$$C = \frac{P \cdot (\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega V^2}$$

NB : Cette façon de compenser l'énergie réactive s'appelle "compensation statique". Il existe une autre manière : la compensation par compensateur synchrone, c'est-à-dire par un alternateur sur ou sous excité synchronisé sur la tension réseau.

NB : Il est impossible, par ces procédés de compenser de la puissance déformante.

### III – 6) Mesure des puissances électriques

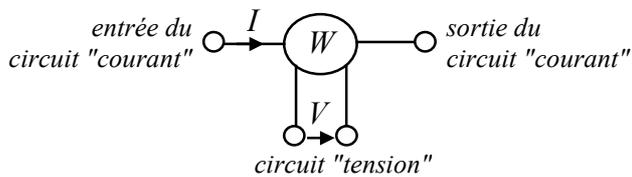
Habituellement en électricité, la mesure des grandeurs dépend de leur nature. On mesure les tensions et les courants continus avec des appareils en mode *DC*, qui n'affichent que la valeur moyenne de la grandeur mesurée. Les appareils en mode *AC* fournissent la mesure de la valeur efficace ("*RMS*") de la grandeur en général privée de sa valeur moyenne. Certains appareils fournissent la valeur efficace vraie, on y lit alors l'indication "*True RMS*".

#### Mesure d'une puissance Active

Pour mesurer la puissance active consommée ou fournie par un dipôle, il n'existe qu'un seul type d'appareil : le Wattmètre.

Il n'y a pas de distinction de Wattmètre *AC* ou *DC* étant donné que celui ci mesure systématiquement la puissance moyenne (ou active)

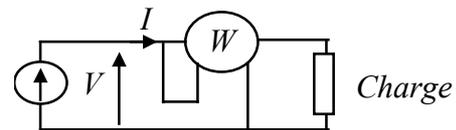
Un Wattmètre se symbolise par l'indication *W* et comporte 4 bornes :



Le wattmètre mesure :

$$W = \langle v(t) \cdot i(t) \rangle = P_{\text{moy}}$$

En général, le wattmètre apparaît sur les schémas comme sur l'exemple ci contre :

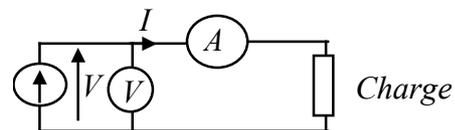


#### Mesure d'une puissance Apparente

Pour mesurer une puissance apparente, il suffit de mesurer indépendamment *V* et *I*, c'est à dire disposer d'un voltmètre et d'un ampèremètre en mode *AC* (ou *DC* uniquement si les tensions et courants sont parfaitement continus)

Ces appareils apparaissent sur les schémas comme sur l'exemple ci contre :

$$S = V \cdot I$$



#### Mesure d'une puissance Réactive ou Déformante

Pour mesurer une puissance réactive, on peut utiliser un appareil spécialisé appelé VAR-mètre. Pour mesure sans distinction une puissance réactive ou déformante, et de façon plus classique, il suffit de mesurer *S* et *P* et d'écrire  $Q^2 + D^2 = \sqrt{S^2 - P^2}$

En général, seule *Q* ou *D* est présente dans un circuit, ce qui permet de simplifier l'étude.

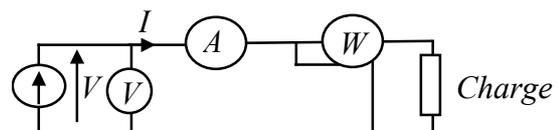
Quoiqu'il en soit, il est nécessaire de disposer dans l'absolu d'un wattmètre, d'un voltmètre et d'un ampèremètre comme le représente le schéma ci dessous :

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = V \cdot I \cdot \sin \varphi$$

en alternatif sinusoïdal uniquement

$$D = \sqrt{S^2 + P^2}$$

en général

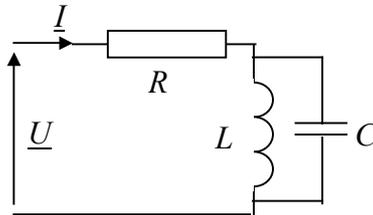


*NB : il est parfois inutile d'utiliser un wattmètre. Si on connaît la valeur R de la partie réelle de l'impédance de la charge (càd la résistance équivalente série), il suffit d'écrire  $P = R \cdot I^2$ . De même si on connaît la valeur R de la résistance parallèle équivalente de la charge, on peut écrire  $P = V^2 / R$ .*

### III – 7) Exemples

#### Exemple 1 : en sinusoïdal

Reprenons le circuit déjà utilisé plus haut, et calculons les expressions de la puissance active, réactive et apparente. En profiter pour calculer le facteur de puissance.



#### 1) Calcul formel

Formons la puissance apparente complexe :

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \\ = \underline{Z} \cdot I^2$$

où  $Z = R + L//C$  et  $(L//C) = \frac{j \cdot L \cdot \omega}{1 + L \cdot C \cdot (j\omega)^2}$

$$\underline{S} = RI^2 + \frac{j \cdot L \cdot \omega}{1 - L \cdot C \cdot \omega^2} I^2 \\ = P + j \cdot Q$$

Par identification, on trouve immédiatement  $P$  et  $Q$ , et  $S = U \cdot I = \frac{\sqrt{R^2(1-LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}{1-L \cdot C \cdot \omega^2} I^2$ .

#### 2) Calcul direct

On sait que  $P$  est consommée uniquement par la résistance, d'où  $P = R \cdot I^2$

D'autre part,  $Q = Z_{L//C} \cdot I^2 = \frac{L \cdot \omega}{1 - L \cdot C \cdot \omega^2} I^2$

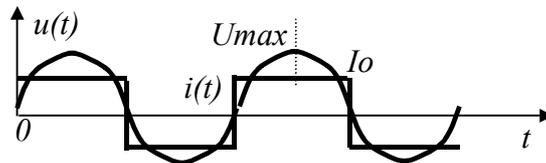
Le facteur de puissance, lui, découle directement du quotient  $P/S$ :

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R \cdot (1 - L \cdot C \cdot \omega^2)}{\sqrt{R^2(1-LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}$$

#### Exemple 2 : en non sinusoïdal

On considère un récepteur inconnu qui, alimenté par une tension sinusoïdale à 50Hz, absorbe un courant en créneaux représenté ci après.

On demande alors les puissances active, réactive et apparente.



$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} u(t) \cdot i(t) \cdot dt = 2 \frac{1}{T} \int_0^{T/2} U_{\max} \cdot \sin(\omega t) \cdot I_o \cdot dt = \frac{2}{\pi} U_{\max} \cdot I_o$$

Pour calculer  $S$ , il faut calculer  $I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} i^2(t) \cdot dt} = I_o$

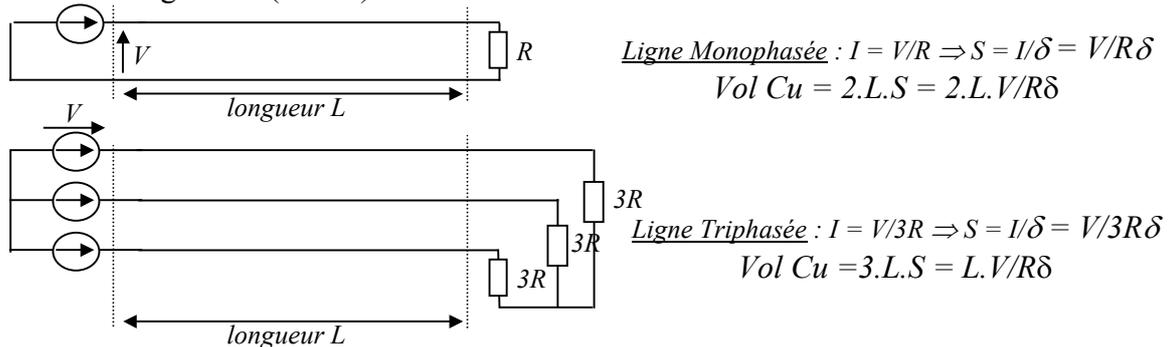
Donc :  $S = I_o \cdot \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$  d'où  $D = \sqrt{S^2 - P^2} = I_o \cdot U \cdot (1 - \frac{8}{\pi^2})$  (Car  $Q=0$ ) et  $k = P/S = 2\sqrt{2}/\pi$

## IV) Circuits à courants alternatifs triphasés

### IV – 1) Introduction

Les systèmes de tensions et courants triphasés forment la réalité des unités de production et de distribution de l'énergie électrique. Avant de savoir de quoi sont formés ces systèmes, il est important de comprendre le pourquoi de l'existence du triphasé.

Comparons deux lignes de distribution équivalentes : l'une monophasée l'autre triphasée. On s'intéresse au volume de cuivre nécessaire au transport du courant, sachant qu'on supposera que pour fonctionner correctement les conducteurs électriques supportent une densité de courant constante et égale à  $\delta (A/mm^2)$  :



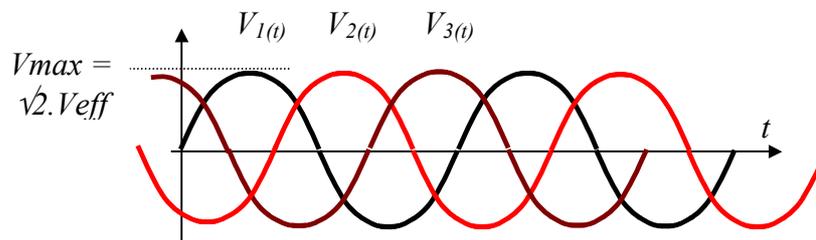
On constate, en comparant les volumes de cuivres nécessaires, que pour fournir la même puissance à deux charges équivalentes, le réseau triphasé nécessite paradoxalement deux fois moins de cuivre que le réseau monophasé. Plusieurs autres raisons, détaillées au paragraphe VIII-3 s'ajoutent à ces considérations technologiques et économiques et font du réseau triphasé l'incontournable acteur de la distribution électrique.

### IV – 2) Tensions triphasées

Un système triphasé est un système de trois tensions sinusoïdales de type :

$$\begin{cases} V_1(t) = V\sqrt{2} \cdot \cos(\omega.t) \\ V_2(t) = V\sqrt{2} \cdot \cos(\omega.t - 2\pi/3) \\ V_3(t) = V\sqrt{2} \cdot \cos(\omega.t + 2\pi/3) \end{cases}$$

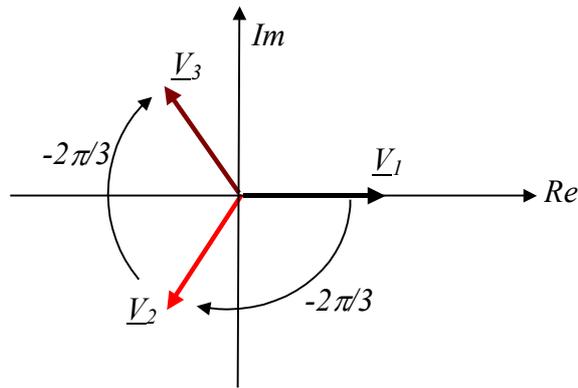
La représentation temporelle de ces tensions est conforme au schéma ci dessous :



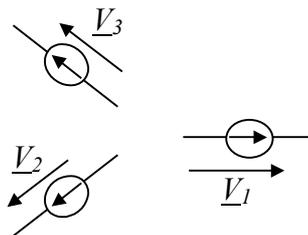
Cette représentation est peu reproductible à main levée et peu parlante puisque la valeur des déphasages ne saute pas aux yeux.

La représentation complexe de ces tensions, elle, offre plus de maniabilité puisqu'elle expose les caractéristiques importantes : tensions efficaces et déphasages.

Ici, les trois phases se ramènent juste à trois vecteurs de même amplitude et déphasés de  $2\pi/3$ .



La représentation du schéma électrique, elle, n'est pas évidente.



Si on considère les trois phases indépendantes, il apparaît deux problèmes :

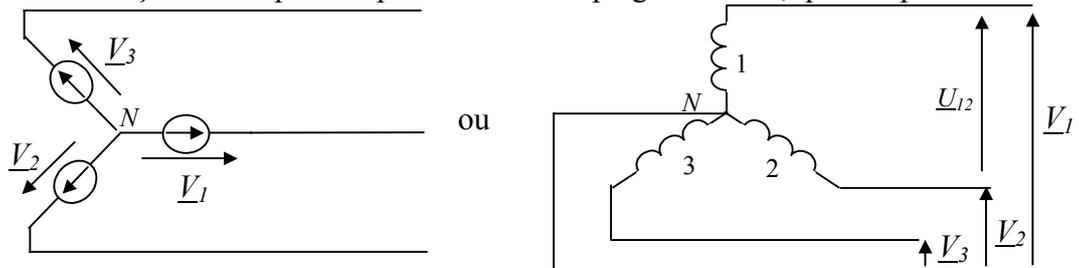
- il n'y a pas de référence de tension commune
- le système se ramène à six fils et non trois, ce qui supprime les avantages cités précédemment.

Il est alors nécessaire de relier certains fils, c'est ce qu'on appelle **coupler les phases**.

### IV – 3) Couplage des phases

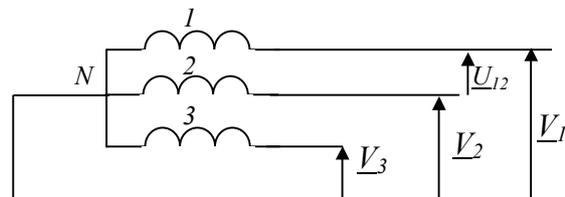
#### Couplage en étoile (Y)

Une première façon de coupler les phases est le couplage en étoile, qu'on représente ci dessous:



Le raccordement des trois phases réalise la référence de tension qu'on appelle le **Neutre**.

On représente également, c'est plus simple, les système en étoile comme ceci :



*NB : Le symbole type "bobine" des générateurs représente le fait que ces tensions sont généralement créés par les trois bobinages d'un alternateur ou prises en sortie des trois bobinages d'un transformateur triphasé.*

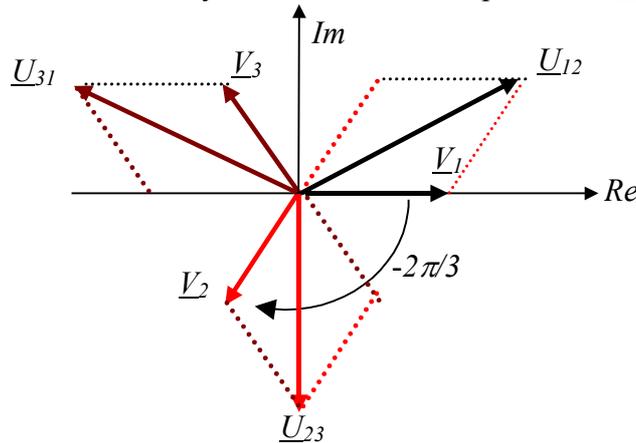
Les tensions  $V_1, V_2, V_3$  sont appelées les **tensions simples**, elles ont pour référence le potentiel 0 du **neutre (N)**, les tensions  $\underline{U}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2$ ,  $\underline{U}_{31} = \underline{V}_3 - \underline{V}_1$  et  $\underline{U}_{23} = \underline{V}_2 - \underline{V}_3$  sont appelées les **tensions composées** ou "**entre phases**".

*NB : Conventionnellement dans les installations électriques le conducteur de neutre porte la couleur bleue et les trois phases le rouge, marron et noir.*

Il est important de déterminer les caractéristiques des tensions "entre phases", pour cela, la représentation complexe permet encore la plus grande facilité.

Il suffit pour cela de construire les vecteurs  $\underline{U}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2$ ,  $\underline{U}_{23} = \underline{V}_1 - \underline{V}_3$  et  $\underline{U}_{31} = \underline{V}_3 - \underline{V}_1$ .

On voit ainsi apparaître un nouveau système de tensions triphasées :  $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$

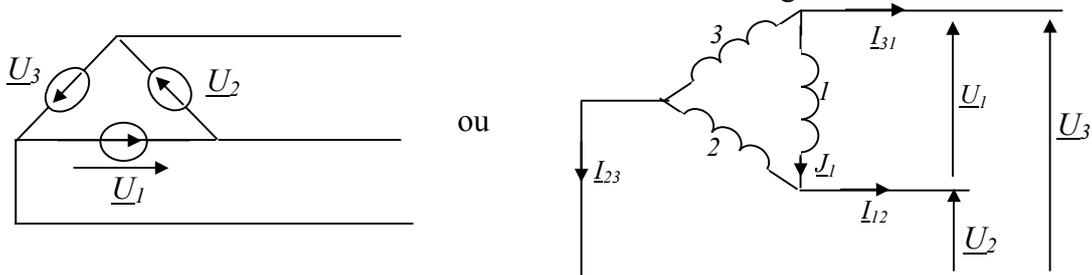


La relation qui existe entre l'amplitude  $V$  et  $U$  se calcule facilement par projection :  $2.V \cos(\pi/6) = U$  c'est à dire :  $U = \sqrt{3} \cdot V$

Ainsi, un système triphasé à basse tension sur le réseau est intitulé : **230V / 400V**, 230V représentant la tension simple efficace et 400V la tension composée efficace.

### Couplage en Triangle ( $\Delta$ )

Il existe une autre manière de connecter trois tensions triphasées. Il est en effet possible de connecter les trois tensions en série de manière à former le montage dessiné ci dessous.

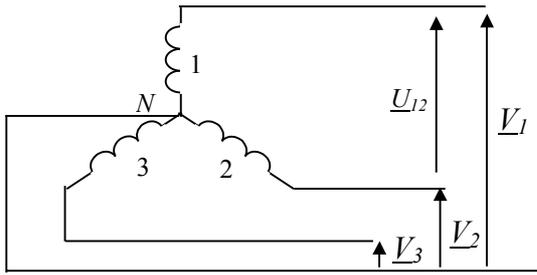


Ce montage ne possède ni neutre ni tensions simples. Par contre, il présente deux types de courants : les courants  $I$  qu'on appelle les courants de ligne et les courants  $J$  : qu'on appelle les courants de phase.

On montre également, comme on l'a fait avec  $U$  et  $V$  du montage étoile que la relation qu'il existe entre les amplitudes  $I$  et  $J$  est :  $I = \sqrt{3} \cdot J$

*NB : le montage en triangle est possible puisqu'il n'existe pas de courant de circulation interne dans les enroulements de phase. En effet, à tout moment,  $U_1(t) + U_2(t) + U_3(t) = 0$*

Pour résumer :



**Montage étoile**

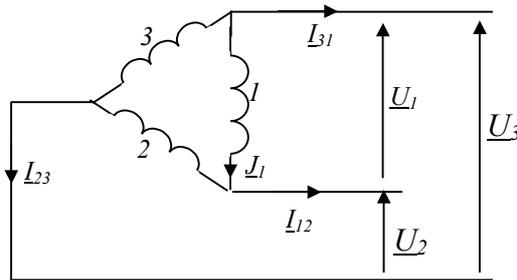
tensions simples :  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$

valeur efficace :  $V$

tensions composées :  $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$

valeur efficace :  $U$

Relation :  $\boxed{U = \sqrt{3} \cdot V}$



**Montage triangle**

courants de ligne :  $\underline{I}_{12}, \underline{I}_{23}, \underline{I}_{31}$

valeur efficace :  $I$

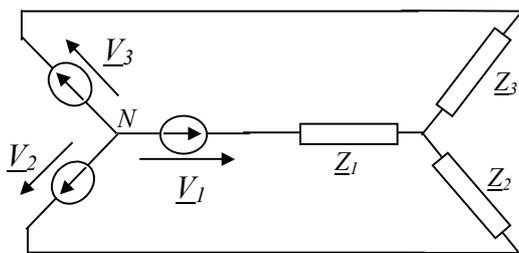
courants de phase :  $\underline{J}_1, \underline{J}_2, \underline{J}_3$

valeur efficace :  $J$

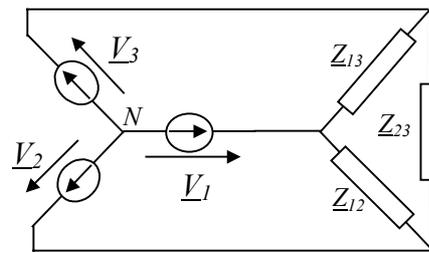
Relation :  $\boxed{I = \sqrt{3} \cdot J}$

**IV – 4) Charges triphasées**

Les systèmes triphasés ont, en général, des charges réparties sur les trois phases. De même qu'avec les générateurs, il est possible de connecter ces charges en étoile ou en triangle comme le représentent les schémas ci-dessous :



Charge câblée en étoile



Charge câblée en triangle

La manière de connecter des charges permet de présenter des valeurs de tension simple ou de tension composée aux récepteurs.

On parle d'équivalence de deux charges triphasées si la puissance consommée est identique. Il est possible, pour chaque système de charge, de déterminer le système étoile ou triangle équivalent.

La transformation triangle étoile peut être utilisée comme artifice de calcul pour la résolution de certains cas difficiles.

NB : exemple :

3 résistances  $R$  consomment en charge étoile la puissance  $3 \cdot V^2/R$

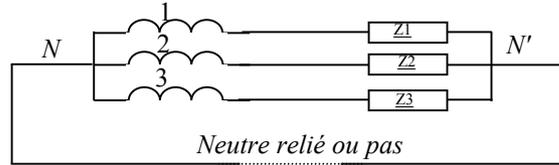
3 résistances  $R'$  consomment en charge triangle la puissance  $3 \cdot U^2/R' = 9 \cdot V^2/R'$

Les deux charges sont équivalentes si  $R' = 3R$ .

#### IV - 5) Neutre, neutre fictif

Dès lors qu'un système triphasé est couplé en étoile, on voit apparaître un point, noté  $N$ , qui s'appelle le **Neutre**. Ce point est, mais ce n'est pas impératif, relié à un conducteur dit "de neutre".

De même, dès qu'une charge triphasée est connectée en étoile, il apparaît un deuxième point Neutre noté  $N'$ . Dans les installations électriques, hors réseau de distribution où l'ajout d'un conducteur supplémentaire serait désastreux, le neutre peut, ou pas, être relié. C'est-à-dire qu'il est **possible** de faire **coïncider  $N$  et  $N'$** .



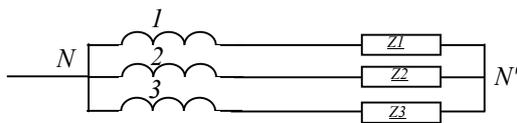
Dès lors qu'on utilise un système triphasé couplé en triangle, il n'existe plus de neutre. Pourtant il est possible de faire apparaître un neutre dit "**fictif**" (tout simplement parce qu'il n'existe pas) du fait qu'un réseau triphasé triangle (de tension entre phase  $U$ ) est équivalent à un réseau triphasé étoile (de tension simple  $U/\sqrt{3}$ )



NB : Le neutre fictif est en général un artifice de calcul permettant de se ramener à un montage étoile à neutre relié. On peut également faire la même chose sur une charge couplée en triangle...

#### IV - 6) Système équilibré, schéma équivalent monophasé

On dit qu'une charge est équilibrée si les trois impédances qu'elle présente sont égales. On dit alors d'un système triphasé qu'il est **équilibré** s'il est chargé par une charge équilibrée.



Il y a équilibre si  $Z_1 = Z_2 = Z_3$

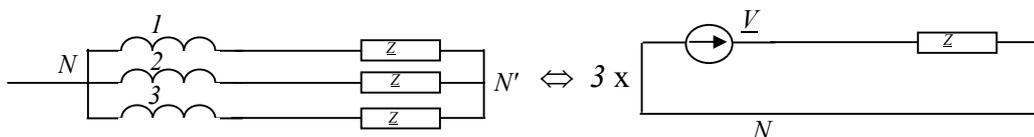
Inversement il y a **déséquilibre** si une des impédances est différente des autres.

En cas d'équilibre, et même si le neutre est relié, on peut écrire que  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Il est important de noter que le potentiel au point  $N'$  est strictement le même qu'au point  $N$ , du coup, lorsqu'un système est équilibré, **il est indifférent de relier le neutre**.

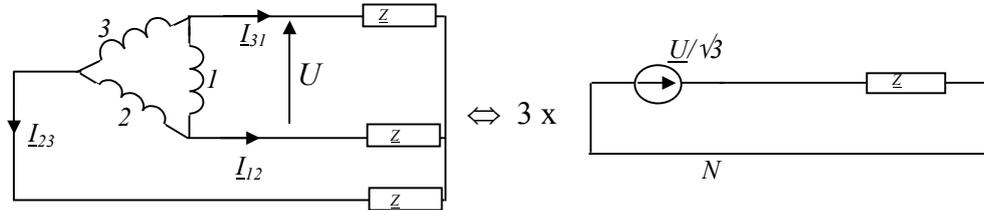
Quand il y a équilibre, chaque phase produit exactement la même puissance que les autres et présente des caractéristiques électriques absolument identiques aux autres. Il est alors possible, pour alléger les calculs et la notation, de raisonner sur une seule phase.

On parle alors de **schéma équivalent monophasé**.



NB : dans le schéma équivalent monophasé, il ne faut pas oublier qu'il faut multiplier la puissance par 3 pour aboutir à la puissance totale du système triphasé, c'est une erreur classique.

Le schéma équivalent monophasé fait apparaître le neutre de l'installation, ce qui ne pose aucun problème dans le cas d'un montage en étoile. Dans celui d'un montage en triangle, il faut faire apparaître le neutre fictif de l'installation, et ainsi raisonner en tensions simples équivalentes.



De même si la charge est câblée en triangle, il faut faire apparaître la charge étoile équivalente.

#### IV - 7) Système déséquilibré et importance du neutre

Un système triphasé est dit déséquilibré dès lors qu'il débite du courant sur une charge non équilibrée.

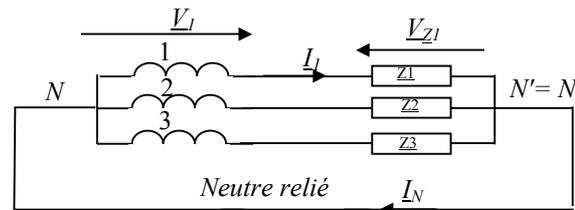
En bref, il y a déséquilibre si  $Z_1 \neq Z_2$  ou  $Z_1 \neq Z_3$  ou  $Z_2 \neq Z_3$

En cas de déséquilibre le fait que le neutre soit ou pas relié devient primordial. En effet, comparons un système triphasé déséquilibré à neutre relié et à neutre non relié, comme c'est le cas sur les figures ci-dessous.

Les relations de maille des phases se refermant par le neutre donnent :  $I_k = V_{Zk} / Z_k$   
et  $V_{Zk} = V_k$  ( $k = 1, 2$  ou  $3$ )

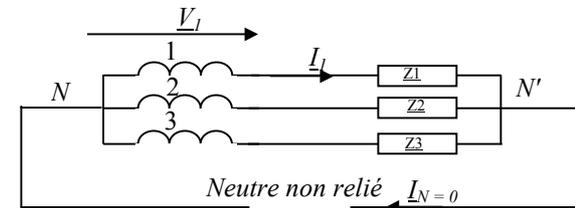
On aura  $I_n = I_1 + I_2 + I_3 \neq 0$

il y a déséquilibre en courant.



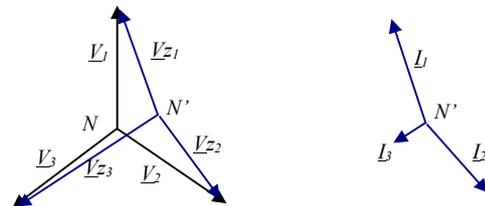
Les relations de mailles ne se referment plus par le neutre, et il n'y a plus égalité des tensions simples sur les charges :  $V_{Zk} \neq V_k$  avec  $V_1 = V_2 = V_3$ .

Par ailleurs,  $I_n = I_1 + I_2 + I_3 = 0$  mais avec  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$   
Il y a donc déséquilibre en courant et tension.



En guise d'exemple, et ce afin de réaliser l'importance de la présence du neutre dans les systèmes déséquilibrés, la figure ci-dessous représente les tensions et courants présents dans un système déséquilibré neutre non relié :

NB : Sur ces schémas le déséquilibre des courants et des tensions saute aux yeux puisque, au niveau de la charge, les tensions ( $V_{Z1}$ ,  $V_{Z2}$ , etc) sont toutes d'amplitude différentes et même déphasées d'angles différents de  $2\pi/3$ .



Par ailleurs, la présence du neutre est impérative dans les réseaux de distribution qui fournissent des lignes monophasées. Pour résumer, le neutre n'est pas relié sur les réseaux de distributions Haute Tension grandes distances où la présence du conducteur est prohibitive, par contre il est présent dans tous les réseaux de distribution basse tension (feeders) pour garantir l'équilibre des tensions et représenter la référence des lignes monophasées.

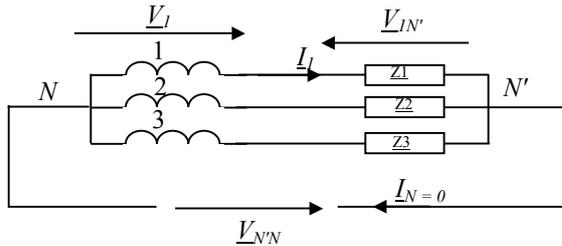
Résolution des systèmes triphasés déséquilibrés sans neutre :

Il existe deux méthodes pour la résolution des systèmes déséquilibrés sans neutre : une méthode matricielle et une méthode consistant en un changement de base appelé "utilisation des composantes symétriques" non développée ici.

Méthode matricielle :

Tout système déséquilibré sans neutre peut être ramené à un système équivalent avec générateurs et charges en étoile. Ce système équivalent sera donc conforme au schéma ci dessous. En général, les tensions  $\underline{V}_1$  à  $\underline{V}_3$  sont considérées comme invariables et on s'intéresse à la détermination des tensions  $\underline{V}_{1N'}$  à  $\underline{V}_{3N'}$  qui sont les tensions effectives appliquées aux charges. Connaissant les impédances de charges, ce calcul revient à la détermination des courants  $\underline{I}_1$  à  $\underline{I}_3$ .

Ce système amène les équations suivantes :



$$\begin{aligned} - \quad \underline{V}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{V}_{N'N} = \underline{V}_{1N'} + \underline{V}_{N'N} \\ - \quad \underline{V}_2 &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{V}_{N'N} = \underline{V}_{2N'} + \underline{V}_{N'N} \\ - \quad \underline{V}_3 &= \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 + \underline{V}_{N'N} = \underline{V}_{3N'} + \underline{V}_{N'N} \\ - \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= \underline{0} \end{aligned}$$

En ajoutant les trois premières équations, on aboutit à :  $3 \cdot \underline{V}_{N'N} = -(\underline{V}_{1N'} + \underline{V}_{2N'} + \underline{V}_{3N'})$

Le système se ramène donc à :

$$\begin{aligned} - \quad \underline{V}_1 &= (2/3)\underline{V}_{1N'} - (1/3)\underline{V}_{2N'} - (1/3)\underline{V}_{3N'} \\ - \quad \underline{V}_2 &= (-1/3)\underline{V}_{1N'} + (2/3)\underline{V}_{2N'} - (1/3)\underline{V}_{3N'} \\ - \quad \underline{V}_3 &= (-1/3)\underline{V}_{1N'} - (1/3)\underline{V}_{2N'} + (2/3)\underline{V}_{3N'} \\ - \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= \underline{0} \end{aligned}$$

Il est possible de remarquer dès à présent que la troisième équation est une combinaison linéaire des deux premières (en effet,  $\underline{V}_3 = -\underline{V}_1 - \underline{V}_2$ ), ainsi elle n'apporte aucune information supplémentaire dans le système et peut être éliminée.

Par ailleurs, la dernière équation peut s'écrire :  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_{1N'}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_{2N'}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_{3N'}}{\underline{Z}_3} = \underline{0}$

Ainsi, l'ensemble des équations se ramène au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\underline{V}_{1N'} - \frac{1}{3}\underline{V}_{2N'} - \frac{1}{3}\underline{V}_{3N'} = \underline{V}_1 \\ -\frac{1}{3}\underline{V}_{1N'} + \frac{2}{3}\underline{V}_{2N'} - \frac{1}{3}\underline{V}_{3N'} = \underline{V}_2 \\ \frac{\underline{V}_{1N'}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_{2N'}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_{3N'}}{\underline{Z}_3} = \underline{0} \end{cases}$$

Il est préférable, à ce stade, d'écrire la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} & \frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_{1N'} \\ \underline{V}_{2N'} \\ \underline{V}_{3N'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad \text{ou d'écrire : } M \cdot \begin{pmatrix} \underline{V}_{1N'} \\ \underline{V}_{2N'} \\ \underline{V}_{3N'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad \text{où la matrice } M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} & \frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{pmatrix}$$

La résolution du système va se ramener à l'inversion de la matrice  $M$  et à l'écriture, une fois cette opération réalisée, des relations :

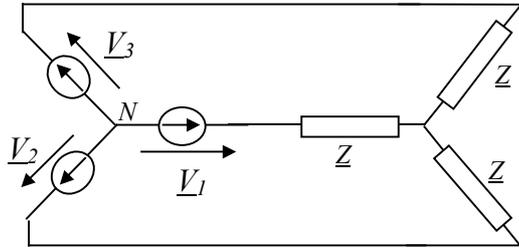
$$\begin{pmatrix} \underline{V}_{1N'} \\ \underline{V}_{2N'} \\ \underline{V}_{3N'} \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad \text{par ailleurs, on obtiendra les courants avec : } \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{Z}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_{1N'} \\ \underline{V}_{2N'} \\ \underline{V}_{3N'} \end{pmatrix}$$

#### IV – 8 ) Puissances en Triphasé

Dans un système triphasé, le théorème de Boucherot apporte que la puissance active totale fournie (ou consommée) est égale à la somme des puissances actives présentes sur chaque phase. Idem pour la puissance réactive.

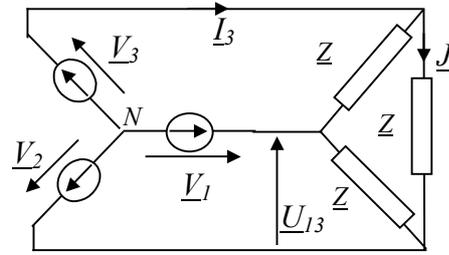
##### Cas d'un système équilibré :

Dans le cas d'un système équilibré, les puissances actives et réactives sont les mêmes sur chaque phase, il suffit donc de raisonner sur le schéma équivalent monophasé et de multiplier la puissance par phase par 3.



Charge câblée en étoile

$$P = 3.V.I.\cos\varphi$$



Charge câblée en triangle

$$P = 3.U.J.\cos\varphi$$

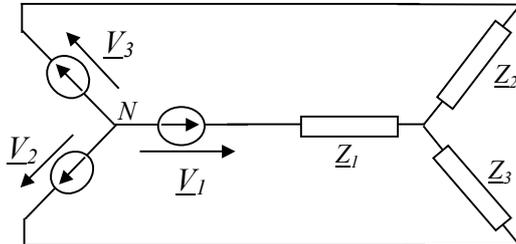
$$= 3.V.I.\cos\varphi$$

$$S = 3.V.I$$

$$Q = 3.V.I.\sin\varphi$$

##### Cas d'un système déséquilibré :

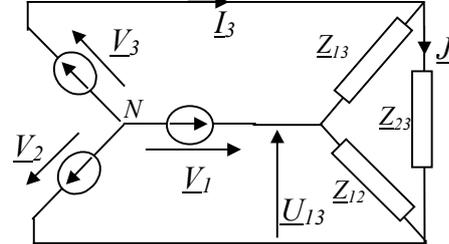
Il n'est plus possible de raisonner sur le schéma équivalent monophasé. Il faut traiter indépendamment chaque phase et faire la somme des puissances actives et réactives.



Charge câblée en étoile

$$P = V_1.I_1.\cos\varphi_1 + V_2.I_2.\cos\varphi_2 + V_3.I_3.\cos\varphi_3$$

$$Q = V_1.I_1.\sin\varphi_1 + V_2.I_2.\sin\varphi_2 + V_3.I_3.\sin\varphi_3$$



Charge câblée en triangle

$$P = U_1.J_1.\cos\varphi_1 + U_2.J_2.\cos\varphi_2 + U_3.J_3.\cos\varphi_3$$

$$Q = U_1.J_1.\sin\varphi_1 + U_2.J_2.\sin\varphi_2 + U_3.J_3.\sin\varphi_3$$

*S n'est plus définie*

## IV - 9) Exemples

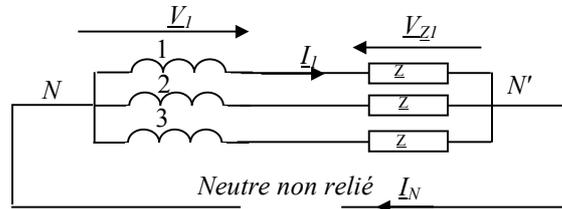
### Exemple 1 : équilibre

On s'intéresse au système triphasé suivant dans lequel on cherche à calculer les courants de lignes, la puissance totale absorbée ainsi que le facteur de puissance.

On donne  $V=230V$  et  $f=50Hz$ .

On donne  $\underline{Z} = R + j.L\omega$

On demande l'expression littérale du courant de ligne, de la puissance active consommée, de la puissance réactive consommée, de la puissance apparente et du facteur de puissance.



Système équilibré puisque même  $\underline{Z}$  sur chaque phase:

$$\underline{V}_l = \underline{Z}_l \cdot \underline{I}_l \Rightarrow \underline{I}_l = \underline{V}_l / \underline{Z}_l \Rightarrow I_l = I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$P = 3 \cdot V \cdot I \cdot \cos \varphi = 3 \cdot R \cdot I^2 \quad (\text{c'est plus facile à exprimer comme ça})$$

$$P = 3 \cdot R \cdot \frac{V^2}{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$Q = \sum V \cdot I \cdot \sin \varphi = 3 \cdot L \cdot \omega \cdot I^2 \quad (\text{c'est plus pratique à calculer comme ça})$$

$$Q = 3 \cdot L \omega \cdot \frac{V^2}{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3 \cdot V \cdot I$$

$$S = 3 \cdot \frac{V^2}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad \text{Et pour finir : } \cos \varphi = P/S = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

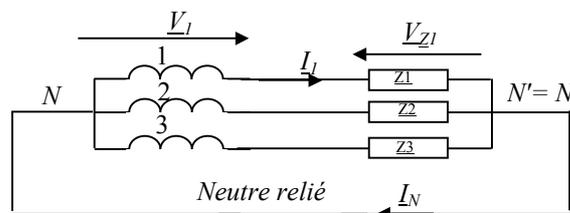
### Exemple 2 : Déséquilibre

On s'intéresse au système triphasé suivant dans lequel on cherche à calculer les courants de lignes, la puissance totale absorbée ainsi que le facteur de puissance.

De façon classique  $V=230V$  et  $f=50Hz$ .

$$\text{On donne } \underline{Z}_1 = 10 + j.10 \\ = R_1 + j.L_1\omega$$

$$\text{de même : } \underline{Z}_2 = 10 + j.20 \\ \underline{Z}_3 = 20 + j.10$$



Système déséquilibré : on traite indépendamment chaque phase :

$$V_1 = Z_1 \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = V/Z_1 = V/\sqrt{(10^2 + 10^2)} = 16.26A$$

$$V_2 = Z_2 \cdot I_2 \Rightarrow I_2 = V/Z_2 = V/\sqrt{(10^2 + 20^2)} = 10.28A$$

$$V_3 = Z_3 \cdot I_3 \Rightarrow I_3 = V/Z_3 = V/\sqrt{(20^2 + 10^2)} = 10.28A$$

$$P = \sum V \cdot I \cdot \cos \varphi = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 \quad (\text{c'est plus pratique à calculer comme ça}) \\ = 5814.2W$$

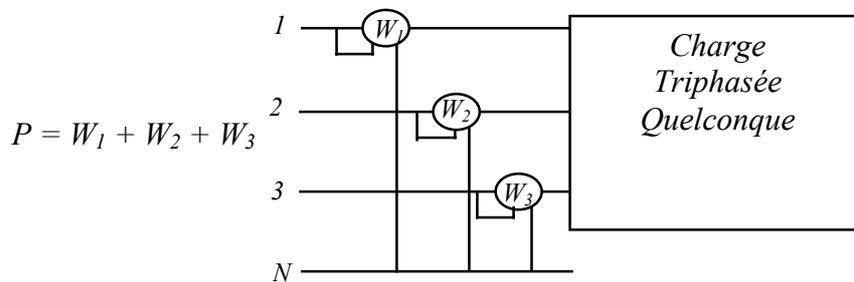
Comme le système est déséquilibré, on ne peut pas écrire  $S = \sum V \cdot I$ , il faut alors calculer la puissance réactive consommée :

$$Q = \sum V \cdot I \cdot \sin \varphi = L_1 \cdot \omega \cdot I_1^2 + L_2 \cdot \omega \cdot I_2^2 + L_3 \cdot \omega \cdot I_3^2 \quad (\text{c'est plus pratique à calculer comme ça}) \\ = 5814.2VAR \quad (\text{ici on trouve la même valeur que pour } P \text{ étant donné la symétrie des valeurs des impédances})$$

#### IV - 10) Mesures de puissances en triphasé

##### Méthode générale dite "méthode des trois Wattmètres"

Comme le système présente trois phases qui consomment chacune leurs puissances propre, il est nécessaire de disposer de 3 wattmètres pour mesurer la puissance totale.

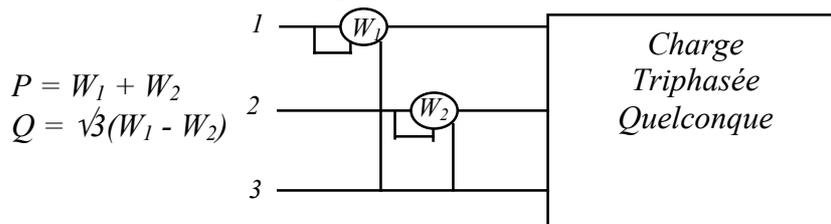


*Inconvénients* : Nécessité de présence du neutre (donc montage triangle exclu) et utilisation de 3 wattmètres

*Avantage* : fonctionne quelle que soit la charge

##### "Méthode des deux Wattmètres"

On dispose les 2 wattmètres, comme le représente le schéma ci dessous :



*Démonstration* :

$$W_1 + W_2 = \langle (v_1 - v_3)(t) \cdot i_1(t) + (v_2 - v_3)(t) \cdot i_2(t) \rangle = \langle v_1(t) \cdot i_1(t) + v_2(t) \cdot i_2(t) + v_3(t) \cdot (-i_1(t) - i_2(t)) \rangle$$

Si le système est équilibré ou déséquilibré sans neutre,  $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$ .

Ainsi :  $W_1 + W_2 = \langle (v_1 \cdot i_1 + v_2 \cdot i_2 + v_3 \cdot i_3)(t) \rangle = P_{totale}$

De plus, on montre que :

$$W_1 = \langle (v_1 - v_3) \cdot i_1(t) \rangle = U \cdot I \cdot \cos(\varphi - \pi/6)$$

$$W_2 = \langle (v_2 - v_3) \cdot i_2(t) \rangle = U \cdot I \cdot \cos(\varphi + \pi/6) \quad \text{d'où} \quad W_1 - W_2 = -2 \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin(-\pi/6) = Q_{totale} / \sqrt{3}$$

*Conditions de validité* :

$P = W_1 + W_2$  n'est vrai que si le système est équilibré ou déséquilibré sans neutre.

$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2)$  n'est vrai que si le système est équilibré.

*Inconvénients* : conditions de validité à ne pas oublier

*Avantage* : ne nécessite que 2 wattmètres ou un seul wattmètre avec un commutateur

## V) Circuits magnétiques et Transformateurs

### V - 1) Circuits magnétiques

Les inductances, transformateurs, alternateurs, machines asynchrones, etc. sont basés sur l'utilisation de "circuits magnétiques", c'est à dire de masses de matériaux magnétiques dans lesquels on instaure une induction. Plus que de l'induction, on parle souvent du "flux" de cette induction.

#### Présentation des grandeurs :

Le tableau ci dessous représente un résumé des grandeurs mises en jeu dans les circuits magnétiques ainsi que des relations de base simplifiées qui les relient.

<p>Courant: <math>i</math> <math>\longrightarrow</math> Champ magnétique: <math>H</math> <math>\longrightarrow</math> Induction: <math>B</math> <math>\longrightarrow</math> Flux: <math>\phi</math></p> <p style="text-align: center;"> <i>Spires et géométrie du circuit</i> </p>	<p style="text-align: center;"> <i>Nature du matériau</i> </p>	<p style="text-align: center;"> <i>Géométrie Du circuit</i> </p>
<p>Relation : <b>Théorème d'Ampère:</b> <math>NI = H.L</math></p>	<p><math>B = \mu H</math></p>	<p><math>\phi = B.S</math></p>

#### Perméabilité magnétique :

Le terme  $\mu$  représente la perméabilité magnétique d'un matériau? Pour les matériaux quelconques, cette grandeurs est constante et très faible, elle vaut  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (SI).

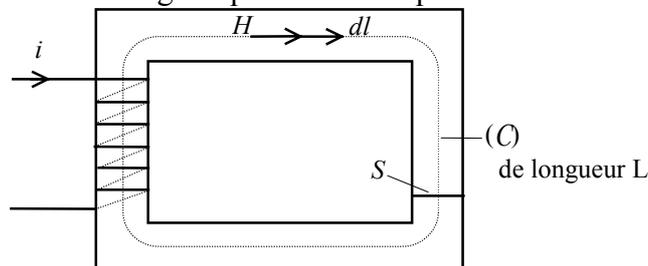
Pour les matériaux dits "magnétiques",  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$  où  $\mu_r$  est de grande valeur.

Quand cette grandeur est constante, on parle de matériau linéaire, mais le plus souvent, l'induction  $B$  est limitée par une valeur palier, on parle alors de "saturation magnétique" et la valeur de  $\mu$  dépend alors de la valeur de  $H$  et donc du courant  $i$ .

Le plus souvent donc :  $\mu = \mu(H)$

#### Circuits homogènes linéaires:

Les circuits magnétiques sont essentiellement réalisés avec des matériaux ferromagnétiques ou ferrimagnétiques car ils permettent d'obtenir des flux élevés. En effet, dans l'air ou un matériau quelconque, les lignes de champ produites par un bobinage parcouru par un courant ne sont pas canalisées et le flux produit ne prend que des valeurs très faibles. En revanche, dans le fer, les lignes de champs sont "concentrées" dans la matière ce qui produit de grandes valeurs du flux. L'allure classique d'un circuit magnétique est donc représentée ci dessous :



Dans le fer, la canalisation des lignes de champ étant notable, on fait l'hypothèse que sur une courbe moyenne (représentée en pointillés) le champ magnétique est constant.

Le théorème d'Ampère s'écrit sur ce contour :  $\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_C H \cdot dl = NI$

Donc :  $H.L = NI$

On écrit alors :  $B = \mu H = \frac{\mu NI}{L}$

Et : 
$$\Phi = BS = \frac{\mu S NI}{L}$$

Il est alors possible de faire intervenir la grandeur appelée "Réductance" et notée  $\mathfrak{R}$  satisfaisant à la relation d'Hopkinson :

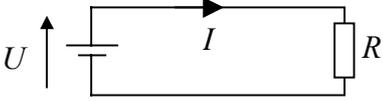
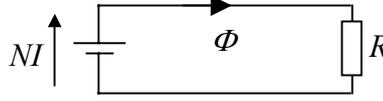
$$NI = \mathfrak{R} \Phi$$

En résumé, pour caractériser toutes les grandeurs dans un circuit magnétique homogène linéaire, on retiendra les relations :

$NI = \mathfrak{R} \Phi$ et $\mathfrak{R} = \frac{L}{\mu S}$
--

Analogie avec les circuits électriques :

L'utilisation de la réductance permet de dresser une analogie entre les relations des circuits magnétiques et les relations des circuits électriques.

<i>Circuits électriques</i>	<i>Circuits magnétiques</i>
	
<i>U : Force électromotrice fem</i>	<i>NI : force magnétomotrice fmm</i>
<i>R : Résistance</i>	<i>R : Réductance</i>
<i>Loi d'Ohm : U=R.I</i>	<i>Loi d'hopkinson : NI=RΦ</i>
Associations de Résistances	Associations de Réductances
Série : $R = R_1 + R_2$	Série : $R = R_1 + R_2$
Parallèle : $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$	Parallèle : $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$

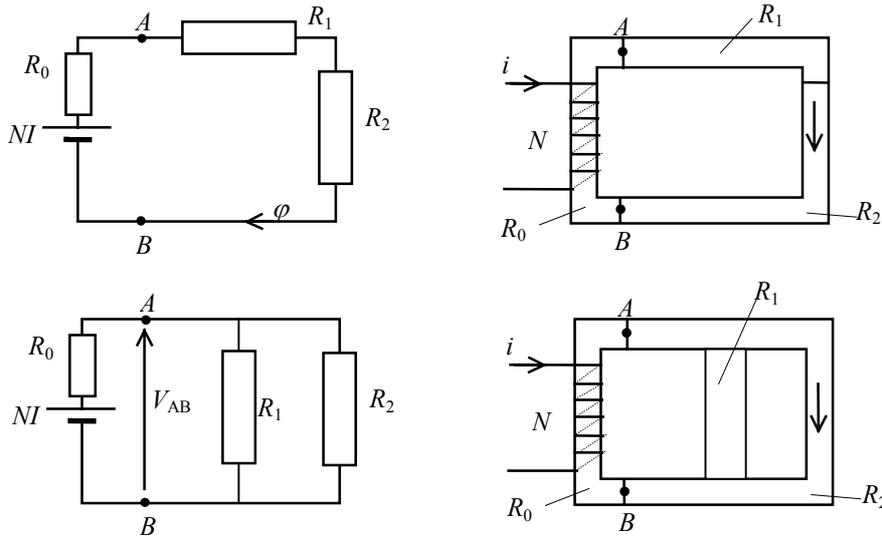
Cette analogie sera utilisée sans retenue et fait de l'étude des circuits magnétiques classiques un ensemble de techniques faciles à maîtriser pour l'électrotechnicien.

Circuits hétérogènes linéaires :

Un circuit est dit hétérogène dès lors qu'il est constitué de matériaux différents ou de géométries à sections variables.

La méthodologie va consister, comme dans un circuit électrique, à utiliser les associations connues de réductances afin de calculer les différentes grandeurs.

On représente ci dessous deux cas fréquents : les circuits hétérogènes série et parallèle. Pour chaque circuit, on représente également l'analogie électrique correspondante .



Inductance :

L'inductance est, en régime linéaire, la grandeur de proportionnalité entre le courant dans le bobinage et le flux dit "total", c'est à dire le flux :  $\phi_T = N \cdot \phi$ .

On écrit alors  $\Phi_T = N \cdot \frac{NI}{\mathfrak{R}} = L \cdot I$

La grandeur  $L$  est l'inductance du circuit magnétique bobiné, son unité est le *Henry (H)*

On retiendra :

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$$

Circuits non-linéaires :

Dès lors qu'il est impossible de négliger la saturation magnétique dans un circuit, il est important d'écartier les relations qui ne sont propres qu'en régime linéaire.

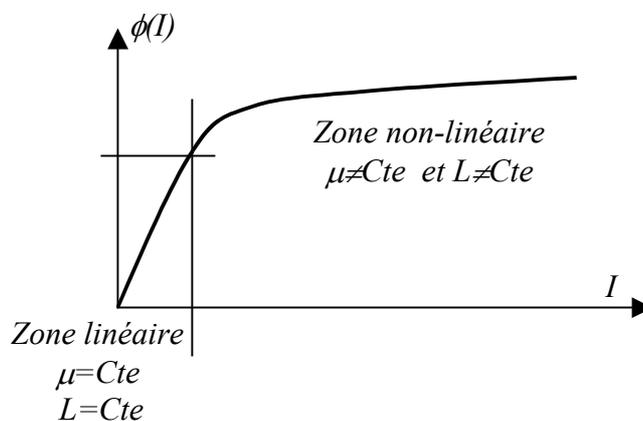
Les seules relation qu'il est toujours possible d'utiliser sont :

- Le théorème d'Ampère :  $NI = HL$
- $\Phi = BS$

En revanche, il est nécessaire d'écrire :  $B = \mu(H) \cdot H$

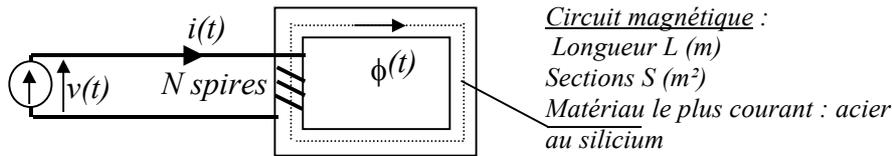
En pratique, à champ magnétique  $H$  constant, on va se référer à la "courbe d'aimantation  $B(H)$ " du matériau pour y faire correspondre la valeur de l'induction  $B$ .

De façon plus commune, on se réfère préférentiellement à la courbe  $\phi(I)$ , qui possède la même allure que la courbe  $B(H)$ , et dont on présente un exemple ci dessous:



Circuits magnétiques en régime alternatif sinusoïdal :

Considérons le circuit ci dessous en régime alternatif sinusoïdal :



Loi de Lenz :

La force électromotrice totale aux bornes du bobinage correspond ici à la tension imposée par la source. La loi de Lenz s'écrit, en convention générateur,  $v(t) = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_r}{dt}$

Matériau linéaire idéal :

Si le matériau possède une courbe  $B(H)$  linéaire, cela signifie que la perméabilité et l'inductance sont constantes. A partir de là, on écrit :  $v(t) = \frac{d\Phi_r}{dt} = L \frac{di}{dt}$  et la bobine est une inductance pure.

-Relation Tension / Induction :

Si  $v(t) = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = V \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t)$  alors,  $\Phi(t) = \frac{V \cdot \sqrt{2}}{N \cdot \omega} \cdot \sin(\omega t) = B(t) \cdot S$

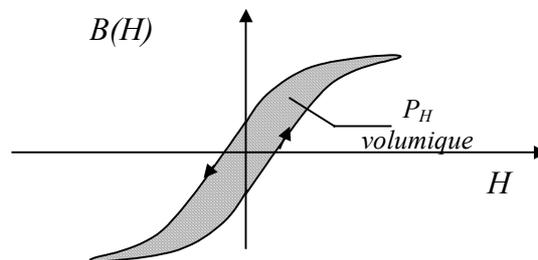
Alors on peut écrire :  $B_{max} = \frac{V \cdot \sqrt{2}}{S \cdot N \cdot \omega} = \frac{V \cdot \sqrt{2}}{S \cdot N \cdot 2\pi f}$  ou  $V = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N \cdot B_{max} \cdot S \cdot f$

On retiendra la relation :

$$V = 4,44 \cdot N \cdot B_{max} \cdot S \cdot f$$

Matériau Réel non-linéaire:

Le matériau réel possède une courbe  $B(H)$  qu'on caractérise en basse fréquence sur un cycle de variations et qui fait apparaître un phénomène d'hystérésis.



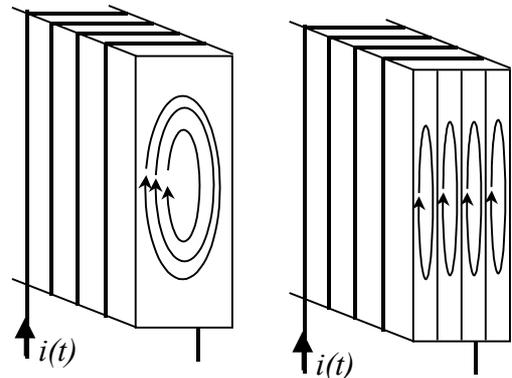
Ce phénomène étant non-linéaire, il est impossible de parler d'inductance et de perméabilité constantes. De plus le matériau réel est la source de pertes dans la masse métallique qu'on appelle "pertes fer", elles sont constituées de :

- Pertes par hystérésis :  $P_H$

On montre que la présence d'un hystérésis correspond à une dissipation de puissance active dont la valeur, par unité de volume du matériau, est égale à la surface de l'hystérésis.

- Pertes par courants de Foucault :  $P_{CF}$

Le matériau magnétique étant également conducteur électrique, le bobinage induit des courants au sein du matériau qui impliquent des pertes joules. Ces courants s'appellent "courants de Foucault", pour les éviter on réalise les circuits magnétiques à base de tôles de faibles épaisseurs (voir schéma) et isolées entre elles, on parle alors de feuilletage du circuit magnétique. De plus, on ajoute du silicium dans l'acier pour, sans modifier ses propriétés magnétiques, augmenter sa résistivité.



- Pertes Fer :  $P_F$

Les "Pertes fer" représentent la totalité des pertes énoncées.

Ainsi :

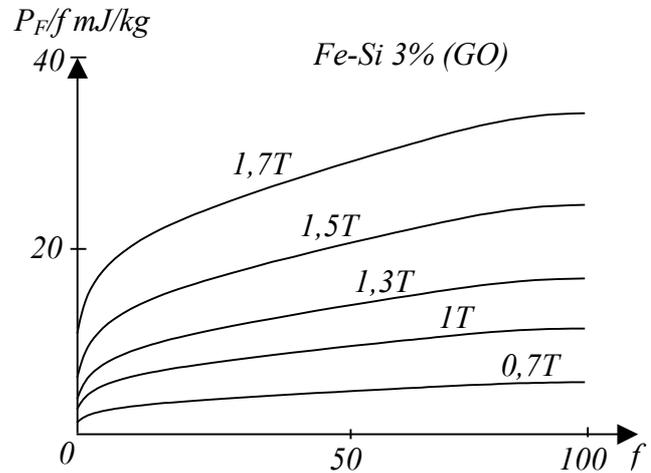
$$P_F = P_H + P_{CF}$$

Valeurs usuelles des pertes fer par unité de volume :

On indique dans le tableau ci dessous les valeurs usuelles des pertes massiques (donc par kg) pour plusieurs aciers.

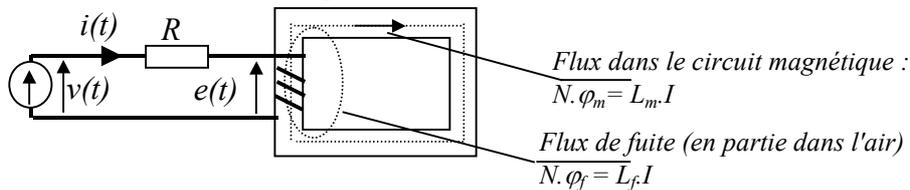
On représente également, et c'est courant dans le domaine, l'évolution de la grandeur  $\frac{P_F}{f}$  en fonction de la fréquence et de l'induction (pour des valeurs usuelles) :

Acier	Induction	Pertes fer, W/kg (50Hz)
MOH	1	0.4
	1.2	0.5
	1.5	0.8
	1.7	1.1
M3	1	0.4
	1.2	0.5
	1.5	0.95
	1.7	1.4



Modèle linéaire d'une bobine à noyau de fer :

On souhaite souvent représenter un modèle équivalent linéaire de la bobine. Ce modèle a pour objectif principal de permettre les calculs du rendement, des caractéristiques nominales et des valeurs de court-circuit. On se base, pour l'établir, sur le schéma ci dessous :



La résistance  $R$  représente la résistance du bobinage ramenée hors des enroulements.

Le flux sous le bobinage vaut :  $\phi_b = \phi_m + \phi_f$  et la loi de Lenz s'écrit :

$$e(t) = N \frac{d\phi_b}{dt} = N \frac{d\phi_m}{dt} + N \frac{d\phi_f}{dt} = L_m \frac{di}{dt} + L_f \frac{di}{dt}$$

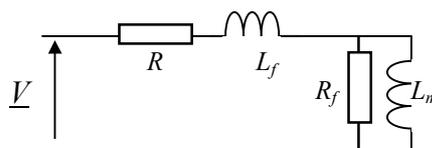
On peut donc représenter le bobinage comme la mise en série de deux inductances :  $L_m$  et  $L_f$ .

$L_m$  est appelée inductance magnétisante

$L_f$  est appelée inductance de fuite

Par ailleurs, on montre que les pertes fer sont quasiment proportionnelles au carré de la fem du circuit magnétique. On peut donc représenter ces pertes par une résistance, notée  $R_f$ , en parallèle sur cette fem.

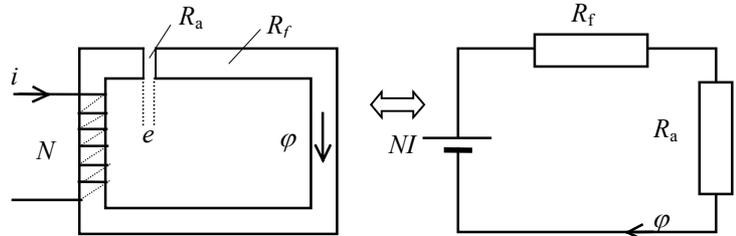
On retiendra le schéma électrique linéaire équivalent :



Notions complémentaires liées aux circuits magnétiques :

Entrefer

Un entrefer est une mince « couche » de fer, d'épaisseur  $e$ , ménagée dans un circuit magnétique (voir schéma). Le fait que cette couche soit mince permet de faire l'approximation comme quoi il ne se produit aucune fuite aux abords de l'entrefer. On considère également que la surface traversée par le flux au niveau de l'entrefer est la même que la surface du circuit magnétique. En adoptant les grandeurs utilisées en début de chapitre, on écrit ainsi les réluctances des diverses parties :

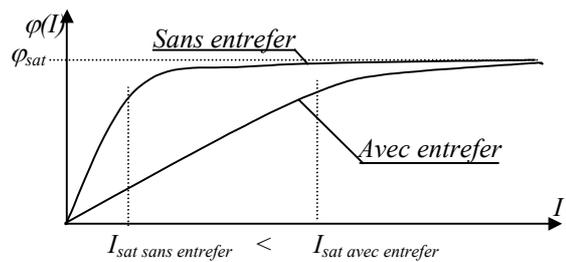


$$\mathfrak{R}_a = \frac{e}{\mu_0 \cdot S} \text{ et } \mathfrak{R}_f = \frac{l}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot S}$$

D'où :

$$N \cdot I = (\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_f) \cdot \varphi \text{ et } \boxed{\varphi = \frac{N \cdot I}{(\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_f)}}$$

On représente donc les courbes  $\varphi(I)$  avec et sans entrefer (ces courbes tenant compte de la saturation) sur les schémas ci contre. On constate sur ces courbes que le courant pour lequel apparaît la saturation est plus élevé avec la présence de l'entrefer que sans. C'est donc un effet dé-saturant qu'on obtient en pratiquant un entrefer dans un circuit magnétique.



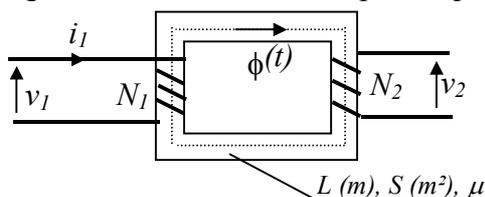
En revanche, l'inductance que représente le circuit avec entrefer :  $L = \frac{N^2}{(\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_f)}$  est inférieure

(à  $N=Cte$ ) à l'inductance du même circuit sans entrefer :  $\boxed{L_{avec\ entrefer} = \frac{N^2}{(\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_f)} < L_{sans\ entrefer} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_f}}$

On retiendra que pratiquer un entrefer permet de repousser la saturation d'un circuit magnétique à un courant plus élevé mais, en revanche, diminue la valeur de l'inductance que représente le circuit bobiné.

Inductance mutuelle :

Dès lors qu'un circuit magnétique est entouré de plusieurs bobinages, chaque courant a une influence sur le flux dans le circuit. Ainsi, une variation de courant dans un des bobinages induit une variation de tension aux bornes des autres bobinages. On parle alors d'inductance mutuelle. Celle ci se calcule en statique de la même manière qu'une inductance classique, regardons cela sur un exemple simple :



Pour calculer l'inductance mutuelle entre le bobinage 1 et 2, il suffit d'exprimer la valeur du flux créé par le courant  $i_1$  sous le bobinage 2.

$$\text{Ici, } \Phi_{1/2} = \frac{N_2 \cdot i_1}{\mathfrak{R}}$$

Il suffit ensuite d'écrire l'expression du flux total intercepté par les  $N_2$  spires du bobinage 2 comme étant proportionnel au courant  $i_1$  :

$$N_2 \cdot \Phi_{1/2} = M \cdot i_1$$

Le terme  $M$  représente l'inductance mutuelle (en Henry) entre ces deux bobinages.

Dans ce cas simple, on en déduit :  $M = \frac{N_1 \cdot N_2}{\mathfrak{R}}$

Application en régime alternatif sinusoïdal :

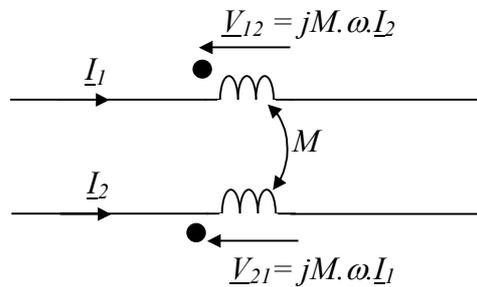
Si le flux est variable dans le temps, il se développe aux bornes du bobinage 2 la tension :

$$v_2(t) = N_2 \cdot \frac{d\Phi_{1/2}}{dt} = M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

Lorsque les deux bobinages conduisent du courant, des tensions analogues à cette dernière apparaissent aux bornes des deux bobinages. Le terme  $M$  est le même dans les deux sens.

On représente les inductances mutuelles avec le même symbole que les inductances classiques, en précisant toute fois par des flèches l'origine du courant influant.

On retiendra, en alternatif sinusoïdal, la symbolisation suivante :



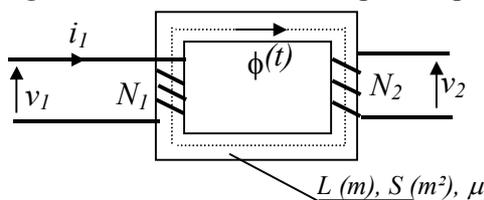
NB : Attention, en fonction du sens du bobinage 2, la tension produite par une variation du courant 1 sera dans un sens ou dans l'autre. Il est donc habituel de noter le symbole de l'inductance mutuelle avec un point indiquant la position de la flèche de la tension produite en convention récepteur.

NB : en réalité, chaque bobinage présent sur un circuit magnétique à plusieurs enroulements possèdera son inductance propre et une inductance mutuelle par rapport à tous les autres bobinages. La tension apparaissant aux bornes d'un des bobinages parmi  $n$  sera donc toujours de la forme :

$$v_1(t) = L \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt} + \dots + M \cdot \frac{di_n}{dt}$$

### Inductance mutuelle :

Dès lors qu'un circuit magnétique est entouré de plusieurs bobinages, chaque courant a une influence sur le flux dans le circuit. Ainsi, une variation de courant dans un des bobinages induit une variation de tension aux bornes des autres bobinages. On parle alors d'inductance mutuelle. Celle ci se calcule en statique de la même manière qu'une inductance classique, regardons cela sur un exemple simple :



Pour calculer l'inductance mutuelle entre le bobinage 1 et 2, il suffit d'exprimer la valeur du flux créé par le courant  $i_1$  sous le bobinage 2.

$$\text{Ici, } \Phi_{1/2} = \frac{N_1 \cdot i_1}{\mathfrak{R}}$$

Il suffit ensuite d'écrire l'expression du flux total intercepté par les  $N_2$  spires du bobinage 2 comme étant proportionnel au courant  $i_1$  :

$$N_2 \cdot \Phi_{1/2} = M \cdot i_1$$

Le terme  $M$  représente l'inductance mutuelle (en Henry) entre ces deux bobinages.

Dans ce cas simple, on en déduit :  $M = \frac{N_1 \cdot N_2}{\mathfrak{R}}$

Application en régime alternatif sinusoïdal :

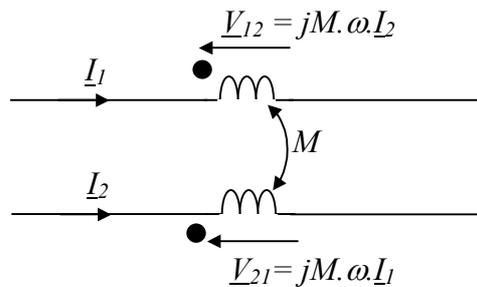
Si le flux est variable dans le temps, il se développe aux bornes du bobinage 2 la tension :

$$v_2(t) = N_2 \cdot \frac{d\Phi_{1/2}}{dt} = M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

Lorsque les deux bobinages conduisent du courant, des tensions analogues à cette dernière apparaissent aux bornes des deux bobinages. Le terme  $M$  est le même dans les deux sens.

On représente les inductances mutuelles avec le même symbole que les inductances classiques, en précisant toute fois par des flèches l'origine du courant influant.

On retiendra, en alternatif sinusoïdal, la symbolisation suivante :



NB : Attention, en fonction du sens du bobinage 2, la tension produite par une variation du courant 1 sera dans un sens ou dans l'autre. Il est donc habituel de noter le symbole de l'inductance mutuelle avec un point indiquant la position de la flèche de la tension produite en convention récepteur.

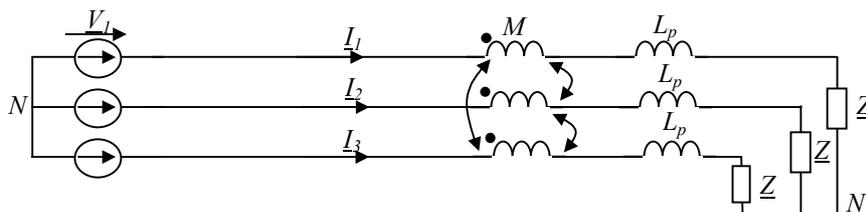
NB : en réalité, chaque bobinage présent sur un circuit magnétique à plusieurs enroulements possèdera son inductance propre et une inductance mutuelle par rapport à tous les autres bobinages. Le tension apparaissant aux bornes d'un des bobinages parmi  $n$  sera donc toujours

$$v_i(t) = L_i \cdot \frac{di_i}{dt} + M_{i1} \cdot \frac{di_1}{dt} + M_{i2} \cdot \frac{di_2}{dt} + \dots + M_{in} \cdot \frac{di_n}{dt}$$

Inductance cyclique :

La notion d'inductance cyclique est liée à la présence d'inductances mutuelles dans un circuit triphasé équilibré ou en étoile sans neutre.

Un tel circuit peut se représenter sous la forme suivante :



Les équations de maille s'écrivent :

$$\underline{V}_1 = jM\omega \cdot \underline{I}_2 + jM\omega \cdot \underline{I}_3 + jLp\omega \underline{I}_1 + \underline{Z} \cdot \underline{I}_1 + \underline{V}_{N'N} = jM\omega(\underline{I}_2 + \underline{I}_3) + jLp\omega \underline{I}_1 + \underline{Z} \cdot \underline{I}_1 + \underline{V}_{N'N}$$

$$\underline{V}_2 = jM\omega \cdot \underline{I}_1 + jM\omega \cdot \underline{I}_3 + jLp\omega \underline{I}_2 + \underline{Z} \cdot \underline{I}_2 + \underline{V}_{N'N}$$

$$\underline{V}_3 = jM\omega \cdot \underline{I}_2 + jM\omega \cdot \underline{I}_1 + jLp\omega \underline{I}_3 + \underline{Z} \cdot \underline{I}_3 + \underline{V}_{N'N}$$

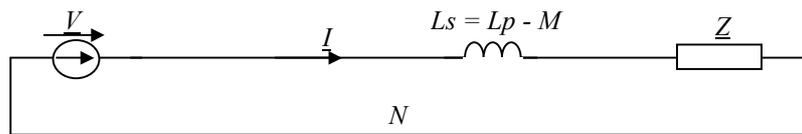
D'après les hypothèses de départ (*équilibre ou pas de neutre*), la somme des trois courants est nulle, on écrit donc :  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$  c'est à dire :  $-\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

En remplaçant cela dans l'équation de la maille 1, on obtient :

$$\underline{V}_1 = (jLp\omega - jM\omega) \underline{I}_1 + \underline{Z} \cdot \underline{I}_1 + \underline{V}_{N'N} = j(Lp - M)\omega \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z} \cdot \underline{I}_1$$

On voit donc que la notion de mutuelle disparaît en faisant apparaître une inductance équivalente appelée "inductance cyclique" et notée :  $L_s = Lp - M$

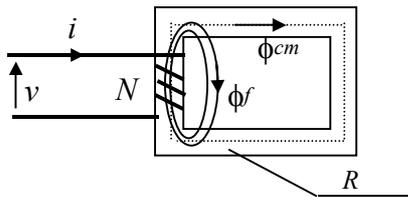
L'utilisation de l'inductance cyclique, sous réserve de conformité du circuit aux hypothèses, permet l'édification du schéma monophasé équivalent :



*NB : Cette notion est particulièrement utilisée dans les alternateurs et moteurs synchrones, et dans l'études des lignes de distribution d'énergie.*

Inductance de fuite :

Le fer d'un circuit magnétique ne canalise jamais vraiment toutes les lignes de champ. En réalité, il existe toujours des "fuites" magnétiques qui correspondent à un flux dit "de fuites".



On fait l'hypothèse que ce flux est "embrassé" par les  $N$  spires du bobinage et que son trajet correspond à une réluctance  $R_f$ .

Vu par le circuit électrique, la tension aux bornes du bobinage s'écrit donc :

$$v(t) = N \frac{d\Phi}{dt} = N \frac{d\Phi_{cm} + d\Phi_f}{dt}$$

$$\text{Alors : } v(t) = \frac{N^2}{R} \frac{di}{dt} + \frac{N^2}{R_f} \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt} + L_f \frac{di}{dt}$$

Il est donc clair que les fuites magnétiques sont équivalentes à une inductance  $L_f$  en série dans le circuit électrique avec l'inductance du circuit sans fuites. On l'appelle "l'inductance de fuites".

*NB : Cette inductance étant le reflet d'un trajet dans l'air, sa valeur n'est pas modifiée par une éventuelle saturation puisque le flux correspondant est généralement très faible. C'est donc une grandeur très "fiable" qui intervient d'ailleurs dans la modélisation des machines en régime saturé.*

## V - 2) Transformateurs

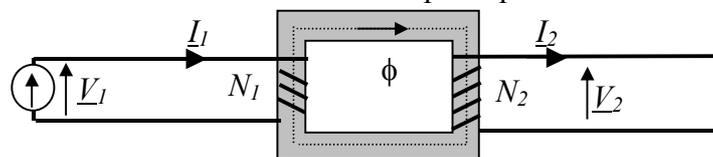
Sur les réseaux électriques, les tensions produites par les alternateurs, les tensions de distribution grandes distances et les tensions d'utilisations ne sont pas les mêmes. La gamme des tensions disponibles sur le réseau s'échelonne entre  $12V$  et  $750kV$  !

Par ailleurs, étant donné que les lignes de distribution grandes distances sont des lignes sans neutre, il est nécessaire de recréer le neutre au plus près des zones de consommation pour pouvoir disposer de lignes monophasées.

Il est alors nécessaire d'utiliser un outil à très bon rendement, à bon marché et permettant la transformation des amplitudes des tensions ainsi que la création d'un neutre local. **Cet outil est le transformateur.**

### V - 3) Transformateur monophasé idéal

Un transformateur monophasé est constitué de deux bobinages présents sur le même circuit magnétique. On représente ci-dessous le schéma de principe.



L'utilisation des formules introduites précédemment permet d'écrire :

$v_1(t) = N_1 \cdot d\phi/dt$  et  $v_2(t) = N_2 \cdot d\phi/dt$  d'où la relation :

$$v_2(t) / v_1(t) = N_2 / N_1 = m$$

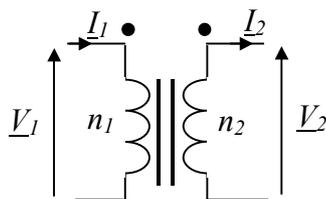
Ainsi que :  $N_1 \cdot i_1(t) - N_2 \cdot i_2(t) = (L/\mu S) \cdot \phi(t)$

Quand  $I_2$  est assez important, le terme  $(L/\mu S) \cdot \phi$  devient négligeable, on écrit alors :

$$\text{En charge} : i_2(t)/i_1(t) = N_1/N_2 = m^{-1}$$

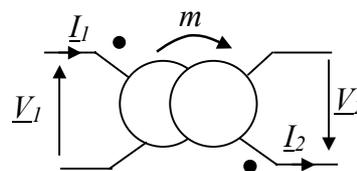
NB : les bobinages présents sur un transformateur ont un sens, en conséquence il est possible de  $V_2(t) = m \cdot V_1(t)$  ou que  $V_2(t) = -m \cdot V_1(t)$ . Pour lever le doute sur cette incertitude, et afin de noter les tensions avec une convention cohérente, le sens des bobinages doit être indiqué sur le symbole correspondant à un transformateur.

#### Symbolisation et conventions :



Bobinage Primaire  
Convention récepteur

Bobinage Secondaire  
Convention générateur



Bobinage Primaire  
Convention récepteur

Bobinage Secondaire  
Convention générateur

Dans les deux cas : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} = m$	et en charge $\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{m}$
---	--

NB : On représente ci dessus deux manières de symboliser les transformateurs monophasés, avec deux cas de sens de tension de sortie. Le respect de la "convention du point" ne laisse aucune ambiguïté sur les sens des tensions et des courants théoriques à utiliser.

Puissance :

La puissance apparente complexe à l'entrée du transformateur vaut  $\underline{S}_1 = \underline{V}_1 \cdot \underline{I}_1^*$

A la sortie du transformateur, elle vaut  $\underline{S}_2 = \underline{V}_2 \cdot \underline{I}_2^* = m \cdot \underline{V}_1 \cdot (1/m) \cdot \underline{I}_1^* = \underline{V}_1 \cdot \underline{I}_1^* = \underline{S}_1$

D'où :

$$P_1 = P_2 \quad \text{et} \quad Q_1 = Q_2$$

Conclusion : Le **transformateur idéal** est absolument passif et **sans pertes**.

Quand il élève la tension, il abaisse le courant (ou inversement) et ne modifie pas la puissance qui transite.

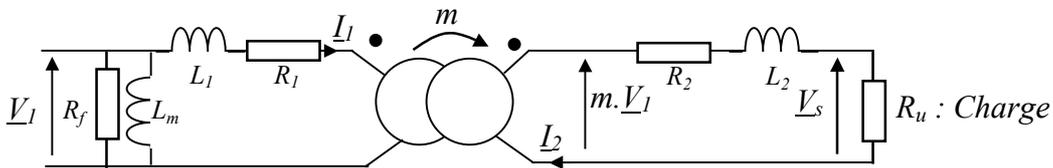
**V - 4) Transformateur monophasé réel**

Dès lors qu'on parle de transformateur réel, c'est qu'on tient compte des pertes qu'il apporte ainsi que de son facteur de puissance. il est alors possible de considérer dans son schéma équivalent des éléments résistifs et réactifs équivalents.

Les différents défauts des transformateurs sont les suivants :

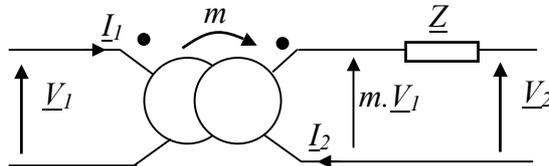
- Résistances séries des bobinages :  $R_1$  et  $R_2$
- Inductances dites "de fuites" séries des bobinages :  $L_1$  et  $L_2$
- Echauffement du circuit magnétique appelé "*pertes fer*" sensiblement proportionnelles au carré de la tension d'entrée : on fait une équivalence avec une résistance appelée  $R_f$  en parallèle avec l'entrée.
- Inductance équivalente du transformateur à vide dite "*inductance magnétisante*" qu'on notera  $L_m$ .

On représente donc, à partir d'un transformateur idéal, le schéma équivalent du transformateur réel :



Ce schéma, assez complet est lourd à manipuler et absolument inutilisable pour caractériser rapidement un transformateur. En revanche, et à la lumière de la remarque qui suit, il est simplifiable.

Remarque : Considérons l'impédance  $\underline{Z}$  au secondaire d'un transformateur idéal dont le rapport de transformation est :  $m$ .

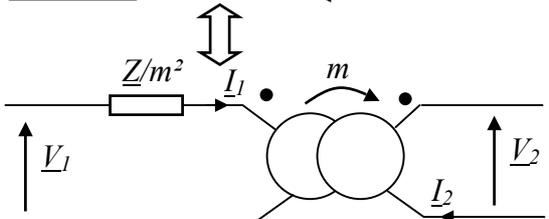


On peut écrire :

$$\underline{V}_2 = m\underline{V}_1 - \underline{Z} \cdot \underline{I}_2$$

$$= m(\underline{V}_1 - \underline{Z}/m \cdot \underline{I}_2)$$

et :  $\underline{I}_2 = \underline{I}_1/m$



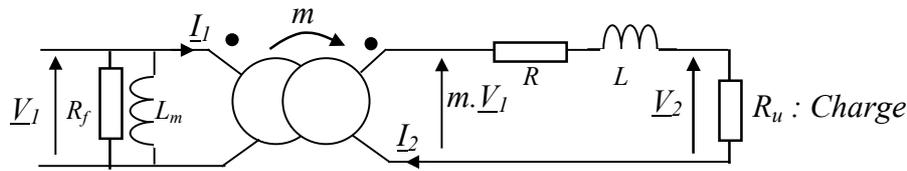
On écrit donc :

$$\underline{V}_2 = m(\underline{V}_1 - (\underline{Z}/m^2) \cdot \underline{I}_1)$$

Ce qui est équivalent au schéma ci contre.

On montre, plus généralement, qu'une **impédance  $\underline{Z}$**  au **secondaire** d'un transformateur idéal est **équivalente** à une **impédance  $\underline{Z}/m^2$**  au **primaire** de ce transformateur.

En simplifiant le schéma équivalent du transformateur réel, on obtient le schéma dit "schéma équivalent au secondaire" représenté ci dessous :



Où on montre que :  $R = R_2 + m^2.R_1$        $L = L_2 + m^2.L_1$

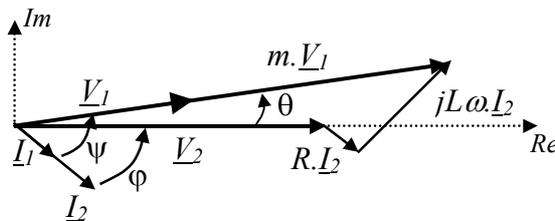
Détermination des éléments équivalents :

On détermine habituellement ces éléments au cours de deux "essais" appelée "essai à vide" et "essai en court circuit".

- *Essai à vide* : Le transformateur n'est connecté à aucune charge et alimenté par le primaire.  
On mesure  $P_1$  et  $S_1 = V_1.I_1$  sachant que  $P_1 = V^2/R_f$  et  $Q_1 = V^2/(L_m.\omega)$   
On calcule alors directement :  $R_f = V^2/P_1$  et  $L_m = V^2/(\omega.\sqrt{(S_1^2 - P_1^2)})$
- *Essai en court circuit* : Le transformateur est court-circuité au secondaire et alimenté au primaire sous tension réduite (ce qui permet de négliger  $R_f$  et  $L_m$ ).  
On mesure  $P_1$  et  $S_1 = V_1.I_1$  sachant que  $P_1 = R.I_2^2 = R.I_1^2/m^2$  et  $Q_1 = L_m\omega.I_1^2/m^2$   
On calcule alors directement :  $R = m^2.P_1/I_1^2$  et  $L_m = \sqrt{(S_1^2 - P_1^2).m^2}/\omega I_1^2$

Représentation des tensions et courants dans le plan complexe :

Afin de mener à bien des calculs sur le schéma équivalent du transformateur réel, il est habituel de représenter ses tensions et courants dans le plan complexe. On aboutit classiquement à la représentation ci dessous :



L'angle  $\varphi$  est le déphasage entre  $I_2$  et  $V_2$  ,      L'angle  $\psi$  est le déphasage entre  $I_1$  et  $V_1$

NB : Il est à noter d'après ce schéma qu'il existe en général, et à cause des imperfections, un déphasage entre  $V_2$  et  $V_1$ .

Plus important : il existe une chute de tension entre  $V_2$  et  $m.V_1$  (la tension à vide).

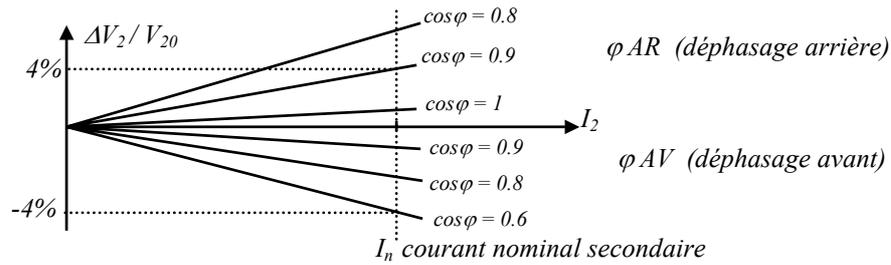
On exprime cette tension, en valeur efficace, comme étant :  $\Delta V_2 = mV_1 - V_2$

après calcul théorique et une légère approximation comme quoi  $\theta$  est faible, on retiendra :

$$\Delta V_2 = mV_1 - V_2 \cong R.I_2.\cos\varphi + L.\omega.I_2.\sin\varphi$$

Ce qui donne, habituellement, la famille de courbes suivante<sup>2</sup> :

<sup>2</sup> Source : Electrotechnique industrielle Seguiet, Notelet



Par ailleurs, le déphasage  $\psi$  entre  $I_1$  et  $V_1$  donne la valeur du facteur de puissance  $\cos \psi$  du transformateur, vu au primaire bien sûr.

### Rendements des transformateurs

Le **rendement classique** du transformateur s'exprime facilement en fonction des données à courant  $I_2$  constant :

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_{\text{pertes}}} = \frac{R_u \cdot I_2^2}{R_u \cdot I_2^2 + R \cdot I_2^2 + V^2 / R_f} = \frac{V_2^2 / R_u}{V_2^2 / R_u + R \cdot I_2^2 + V^2 / R_f}$$

En revanche, pour les transformateurs de distribution, la charge est variable. Le rendement évolue donc dans le temps.

On définit donc un **rendement énergétique**, sur un temps défini  $T$ , comme étant le quotient de l'énergie utilisée sur l'énergie totale consommée pendant ce temps.

On écrira donc :

$$\eta_e \text{ sur le temps } T = \frac{\text{Energie utile}}{\text{Energie utile} + \text{Energie perdue}} \text{ pendant le temps } T$$

NB : La plupart du temps, le calcul est effectué sur une durée  $T=24$ heures

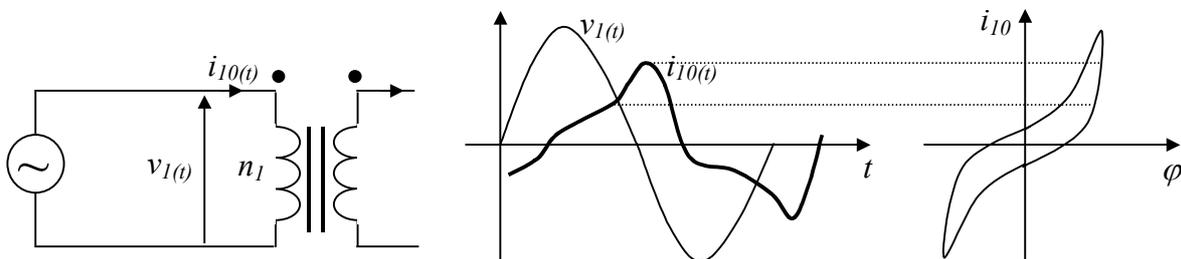
### Tension à vide

La tension au secondaire du transformateur lorsqu'il est à vide est notée fréquemment :

$$V_{20} = m V_1$$

### Courant à vide

Si on observe à l'oscilloscope le courant appelé par un transformateur dont le secondaire est ouvert, on observe une forme d'onde conforme au schéma ci dessous :



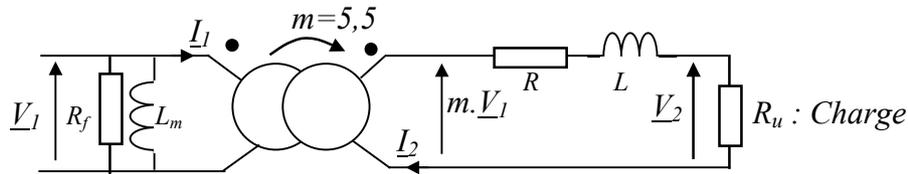
Ce courant est entièrement justifié par la présence du "cycle d'hystérésis" du circuit magnétique également représenté sur le schéma. A vide, le courant primaire fait saturer le circuit magnétique. La saturation du flux impose des ampères-tour élevées, ce qui justifie la présence de courant élevé. L'hystérésis, lui, impose la dissymétrie du courant.

On retiendra qu'à vide le transformateur est un dipôle fortement non-linéaire.

NB : Ce courant a son fondamental à 50Hz et des harmoniques impairs à 150, 250, 350Hz, etc...

### V - 5) Exemple

On considère un transformateur monophasé 2200VA, 220V / 1160V dont le schéma équivalent est représenté ci dessous :



On souhaite déterminer la valeur des éléments d'imperfection d'après deux essais :

1) essai à vide :  $V_1=220V$   $P_1=90W$   $I_1=0,8A$

On calcule  $R_f$  et  $L_m$  d'après les formules  $R_f = V^2/P_1 = 537,7\Omega$

Puis  $Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = 151,24 VAR$  et  $L_m = V^2/(\omega.Q_1) = 1,01\Omega$

2) essai en c-c :  $V_1=8.5V$   $P_1=80W$   $I_1=10A$

On sait que  $m=5,5$

On calcule  $R = m^2.P_1/I_1^2 = 24,2\Omega$  On calcule  $Q_1 = 28,7VAR$  et  $L = Q_1.m^2/\omega I_1^2 = 27mH$

On souhaite calculer la tension  $V_2$  en pleine charge :

La charge nominale correspond au fonctionnement nominal du transformateur. C'est dans ces conditions qu'on a  $S = 2200VA = V_{1n}.I_{1n}$  c'est à dire que le courant de pleine charge est  $I_{1n} = 10A$ .

En conséquence le courant  $I_{2n} = 10/5,5 = 1,8A$

On calcule alors la chute de tension au secondaire avec la formule :

$$\Delta V_2 = mV_1 - V_2 \cong R.I_2.\cos\varphi + L.\omega.I_2.\sin\varphi$$

sachant que la charge est une résistance pure,  $\cos\varphi=1$  et  $\sin\varphi=0$ .

on trouve alors :  $\Delta V_2 = 43,56 V$

Ainsi, à vide le transformateur délivre  $220 \times 5,5 = 1210V$  et en pleine charge  $1210 - 43,56 = 1166,4V$ , tension qui correspond bien aux 1160V de sortie indiqués dans les données globales.

On souhaite chiffrer le rendement du transformateur :

Pour calculer le rendement on écrit :

$$I\eta = P_{Ru}/(P_{RU} + P_R + P_{Rf}) = 1166,4 \times 1,8 / (1163,6 \times 1,8 + 220^2/R_f + R.(1,8)^2) = 0,92$$

Ce qui est normal pour un transformateur.

## V - 6) Valeurs relatives et Impédances réduites

### Impédances réduites en monophasé

Soit un transformateur défini par  $S_N$  et  $V_{IN}$ . A une impédance  $Z$  de cet appareil est associé la valeur dite "réduite" :

$$Z\% = 100 \cdot \frac{Z \cdot I_N}{V_N} = 100 \cdot \frac{Z \cdot S_N}{V_N^2}$$

Il est possible d'appliquer cette écriture à la partie réelle ( $R$ ) et à la partie imaginaire ( $X=L\omega$ ) de l'impédance complexe  $\underline{Z}=R+jX$ .

C'est à dire écrire :

$$(R+jX)\% = 100 \cdot (R+jX) \cdot \frac{S_N}{V_N^2}$$

On montre alors que :

$$Z\% = \sqrt{(R\%)^2 + (X\%)^2}$$

*NB : ces valeurs réduites chiffrent tout simplement, en pourcentage de la tension nominale, les chutes de tension dues aux résistances et aux éléments réactifs.*

### Chutes de tension

La valeur de la chute de tension  $\Delta V_2$  ne présente pas beaucoup d'intérêt en soi. On préfère la comparer à la tension à vide en exprimant la chute de tension secondaire en %.

On écrit :

$$\Delta V_2\% = \frac{\Delta V_2}{V_{20}} = 100 \cdot \frac{V_{20} - V_2}{V_{20}}$$

On peut également définir :

- la chute de tension résistive :  $R\% = 100 \cdot \frac{R \cdot I_{2N}}{V_{20}}$
- la chute de tension inductive :  $X\% = 100 \cdot \frac{L\omega \cdot I_{2N}}{V_{20}}$

On retiendra : Pour  $I_2 = I_{2N}$  :  $\Delta V_2\% = R\% \cdot \cos\varphi + X\% \cdot \sin\varphi$

### Courant de court-circuit

Le courant de court-circuit correspond au courant débité au secondaire du transformateur lorsque celui-ci est mis en court-circuit. La valeur de ce courant est importante puisqu'elle permet d'établir les protections des lignes de distribution.

Ce courant s'écrit:

$$I_{cc} = \frac{m \cdot V_1}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \frac{m \cdot V_1}{Z_2}$$

On considère également que ce courant s'écrit :  $I_{cc} = \frac{S_{cc}}{V_n}$

### Tension de court-circuit

Cette notion est importante et est couramment utilisée par les techniciens des transformateurs.

La *tension de court-circuit*  $V_{1cc}$  est la tension primaire correspondant à un *courant de court-circuit égal au courant nominal*.

On écrit donc :  $m \cdot V_{cc} = Z_2 \cdot I_{2N} = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \cdot I_{2N}$

En valeur relative :  $V_{cc}\% = 100 \cdot \frac{V_{1cc}}{V_1} = 100 \cdot \frac{\sqrt{R^2 I_{2N}^2 + (L\omega)^2 I_{2N}^2}}{m \cdot V_1}$

En remarquant que  $mV_1 = V_{20}$  :  $V_{cc}\% = 100 \cdot \sqrt{\frac{R^2 I_{2N}^2 + (L\omega)^2 I_{2N}^2}{V_{20}^2}}$

On reconnaît ainsi, et on retiendra :  $V_{cc}\% = \sqrt{(R\%)^2 + (X\%)^2}$

NB : La chute ohmique relative  $R\%$  donne également le pourcentage des pertes joules dans les enroulements. De même, la chute inductive  $X\%$  donne le pourcentage de puissance réactive.

NB : En cas de court-circuit au secondaire, c'est majoritairement  $X$  qui limite l'intensité de court-circuit.

### Puissance de court-circuit

Le transformateur étant alimenté sous tension primaire nominale, supposons un court-circuit au secondaire. Le transformateur va débiter au secondaire le courant  $I_{2cc}$ .

En écrivant que :  $mV_{1cc} = Z_2 \cdot I_{2N}$  et  $mV_1 = Z_2 \cdot I_{2cc}$ , on obtient :

$$\frac{V_{1cc}}{V_1} = \frac{I_{2N}}{I_{2cc}} \quad \text{donc : } V_{cc}\% = 100 \cdot \frac{I_{2N}}{I_{2cc}} = 100 \cdot \frac{m \cdot I_{2N}}{m \cdot I_{2cc}} = 100 \cdot \frac{I_{1N}}{I_{1cc}} = 100 \cdot \frac{V_1 \cdot I_{1N}}{V_1 \cdot I_{1cc}}$$

On définit alors, et on retiendra : la *puissance (apparente) de court-circuit* :

$$S_{cc} = V_1 \cdot I_{1cc} = 100 \cdot \frac{S_N}{V_{cc}\%}$$

### Impédances réduites en triphasé

En triphasé, les impédances réduites s'écrivent :  $Z\% = 100 \cdot \frac{Z \cdot I_N}{V_N} = 100 \cdot \frac{Z \cdot S_N}{3 \cdot V_N^2} = 100 \cdot \frac{Z \cdot S_N}{U_N^2}$

On retiendra donc l'écriture :

$$Z\%_{\text{tri}} = 100 \cdot \frac{Z \cdot S_N}{U_N^2}$$

### Tension de court-circuit en triphasé

Pour la même raison, en triphasé, l'écriture de la tension de court circuit sera :

$V_{cc}\% = 100 \sqrt{\frac{R^2 I_{2N}^2}{3 \cdot V_{20}^2} + \frac{(L\omega)^2 I_{2N}^2}{3 \cdot V_{20}^2}}$ . On retiendra donc :

$$U_{ccTRI}\% = \sqrt{(R\%)^2 + (X\%)^2}$$

### Courant de court-circuit en triphasé

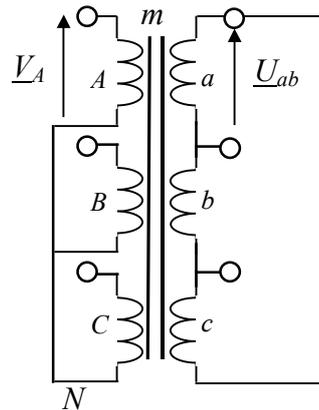
Le courant de court-circuit s'écrit en triphasé :

$$I_{ccTRI} = \frac{S_{cc}}{3 \cdot V_n} = \frac{S_{cc}}{\sqrt{3} \cdot U_n}$$

## V - 7) Transformateurs triphasés

Afin de transformer l'amplitude des tensions d'un système triphasé, il faut théoriquement se servir de 3 transformateurs monophasés, dont les phases seront couplées, en fonction des contraintes, en étoile ou en triangle. En réalité, on se sert d'un seul circuit magnétique sur lequel sont bobinés les 6 bobinages. On appelle cela un transformateur triphasé. Il est de plus possible de coupler différemment le primaire et le secondaire pour, par exemple créer un neutre local ou apporter un déphasage entre certaines tensions.

On représente ci dessous, **en tant qu'exemple**, le symbole d'un transformateur triphasé dont le primaire est câblé en étoile et le secondaire en triangle.



On notera de façon conventionnelle les bobinages **primaires en majuscule (A,B et C)** et **secondaires en minuscules (a,b et c)**.

Les bobinages représentés côte à côte sont dits "en regard" et les tensions à leurs bornes sont proportionnelles de rapport  $n_a/n_A$ . C'est à dire qu'ici  $U_{ab} = (n_a/n_A).V_A$

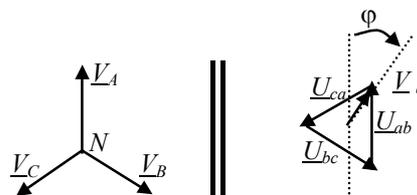
*NB : attention,  $n_a/n_A$  n'est pas toujours égal à  $m$*

Le couplage est toujours indiqué par un symbole :

- Y ou y : couplage **étoile** primaire ou secondaire
- $\Delta$  ou d : couplage **triangle** primaire ou secondaire
- Z ou z : couplage **Zig-Zag** primaire ou secondaire

Rapport de transformation :

On désigne par rapport de transformation,  $m$ , le rapport entre une tension simple au secondaire et la tension simple correspondante au primaire.



Les tensions primaires et secondaires **de l'exemple ci-dessus** se représentent comme ci contre.

On note deux caractéristiques importantes :

- $m = \frac{V_a}{V_A} = \frac{U_{ab}}{\sqrt{3} \cdot V_A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{n_a}{n_A}$
- Le déphasage entre  $\underline{V}_A$  et  $\underline{V}_a$  vaut  $\pi/6 = 2\pi/12 = 1h$

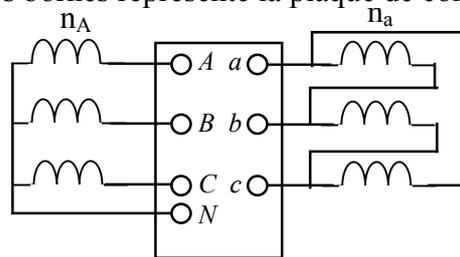
La relation qui relie  $\underline{V}_A$  et  $\underline{V}_a$  est donc :  $\underline{V}_a = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{n_a}{n_A} \underline{V}_A \cdot e^{j\pi/6}$  → indice horaire  $m$

Afin de caractériser un transformateur triphasé, on donnera toujours **son couplage, son rapport de transformation et son indice horaire**, c'est à dire le déphasage entre  $\underline{V}_A$  et  $\underline{V}_a$ .

*NB : l'indice horaire sera souvent exprimé en heures pour plus de commodité puisque ce sera toujours un multiple de  $\pi/6 = 1h$ .*

Autre symbolisation:

La symbolique ci dessous apparaît souvent pour unifier les symboles des transformateurs triphasés, le rectangle avec les bornes représente la plaque de connections du transformateur.

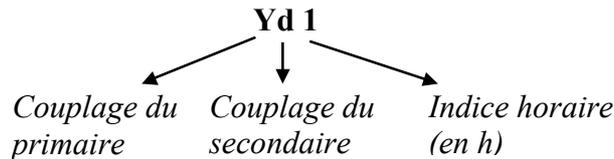


Cette symbolisation suffisante, tout comme le schéma complet dont elle est le reflet, pour déterminer les caractéristiques de transformation du transformateur.

Nom conventionnel :

Pour simplifier la représentation, on donne aux transformateurs triphasés un nom qui résume toutes les caractéristiques.

Le transformateur utilisé **comme exemple** correspond à :



De la même manière on peut trouver : Yy, Yd, Yz, Dy, Dd, Dz, Zy, Zd, Zz , avec de plus les différents indices horaires possibles.

On retiendra les cas les plus communs explicités dans le tableau ci après<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Source : Electrotechnique industrielle Seguiet, Notelet

Symbole	$V_a/V_A$	Montage électrique des phases	Diagramme vectoriel
Yy0	$\frac{n_2}{n_1}$		
Yd1	$\frac{n_2}{\sqrt{3}n_1}$		
Yz11	$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{n_2}{n_1}$		
Dy11	$\sqrt{3} \frac{n_2}{n_1}$		
Dd0	$\frac{n_2}{n_1}$		
Zy1	$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{n_2}{n_1}$		

## VI ) Les harmoniques

Dans le premier exemple de calcul de puissances (*Chap III-7*) on voit qu'un courant carré, même en phase avec la tension, implique la présence d'une puissance analogue à une puissance réactive. En réalité, dans ce cas, on l'appelle puissance déformante. La présence d'un facteur de puissance fortement inférieur à 1 encourage à étudier les causes et les effets des composantes non sinusoïdales, c'est à dire de la présence "d'harmoniques" de courant ou de tension. Pour les étudier, il faut partir de considérations mathématiques aboutissant à la notion de "spectre".

### VI – 1 ) Bases mathématiques

La base mathématique de l'existence des harmoniques provient de la **décomposition des signaux périodiques en série de Fourier**. Ceci revient à dire que : « tout signal  $s$ , périodique de période  $T=1/f$ , peut se décomposer en une somme infinie de termes sinus et cosinus de fréquences multiples de  $f$ . Mathématiquement, cela s'écrit :

$$s(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n.\cos(n\omega t)+b_n.\sin(n\omega t)$$

La valeur  $a_0$  représente la valeur moyenne de  $f(t)$ .

On calcule les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  avec les formules suivantes :

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T s(t).\cos(n\omega t)dt \quad \text{et} \quad b_n=\frac{2}{T}\int_T s(t).\sin(n\omega t)dt$$

De plus, il existe quelques pré-requis qui permettent de ne pas faire de calculs inutiles :

- si la fonction est paire, les coefficients  $b_n$  sont nuls
- si la fonction est impaire, les coefficients  $a_n$  sont nuls
- si la fonction possède une symétrie sur ses deux demi-périodes, les termes d'indice pairs sont nuls.

### VI – 2 ) Application aux signaux électriques

En électrotechnique, les grandeurs alternatives sont périodiques, et donc particulièrement adaptés au développement en série de *Fourier*. Nous allons montrer **sur un exemple** assez classique, un signal carré, à quoi correspondent physiquement les harmoniques et quelles sont les méthodes de représentation et de travail en électrotechnique.

Considérons un signal  $s(t)$  carré de période  $T$ .

- La valeur moyenne de  $s$  est nulle

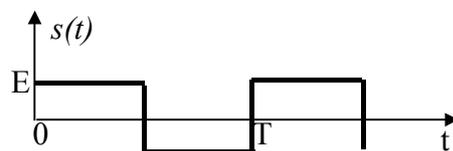
Donc :  $a_0 = \langle s \rangle = 0$

-  $s$  est impaire, donc les coefficients  $a_n$  sont nuls

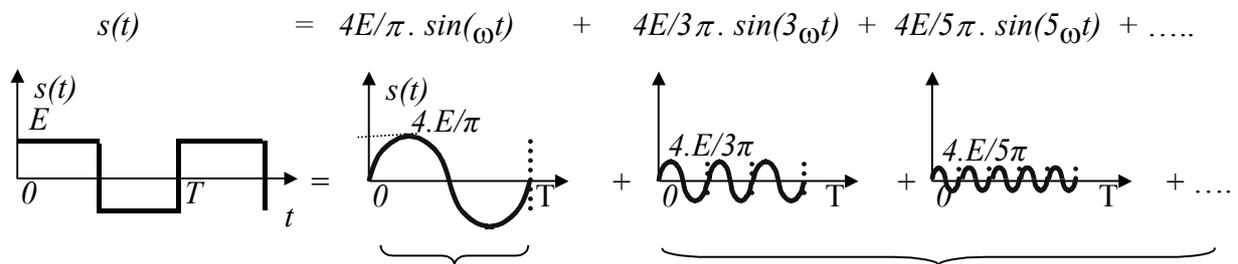
-  $s$  possède une symétrie par rapport à  $T/2$ , donc les  $b_n$  d'indice  $n$  pairs sont nuls.

Il reste à calculer :  $b_{2k+1} = \frac{2}{T} \int_T s(t).\sin((2k+1)\omega t)dt$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} E.\sin((2k+1)\omega t)dt = \frac{4.E}{(2k+1)\pi}$$



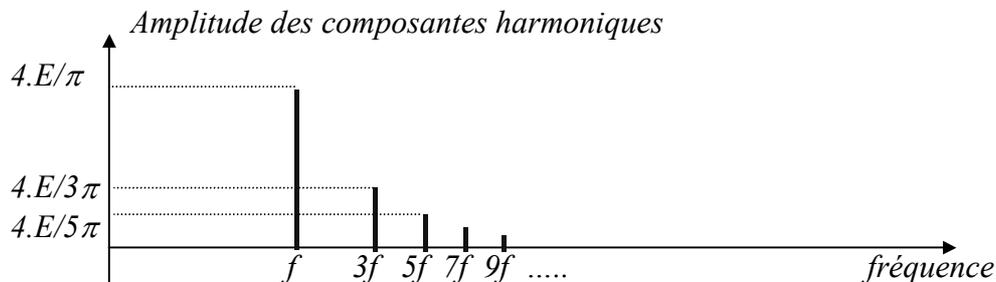
Ainsi, on peut dire que :



Les signaux sont appelés : **Fondamental**  
(ou **premier Harmonique**)

**Harmoniques**

Une représentation agréable de cette somme infinie consiste à représenter les amplitudes de composantes sinusoïdales en fonction des fréquences, on appelle ça **le spectre de s**. Pour le signal carré cela donne :



En somme, un carré, tout comme tout autre signal périodique est la somme d'un fondamental à la même fréquence et de sinusoïdes de fréquences multiples.

*NB : On comprend maintenant pourquoi les outils d'études des signaux sinusoïdaux permettent l'étude de tous les signaux périodiques.*

*Pour étudier un circuit sous des tensions ou des courants non sinusoïdaux, il suffit d'étudier l'influence du circuit sur chaque harmonique. Pour ce faire, on représente souvent l'effet d'un circuit en fonction de la fréquence du signal (diagramme de Bode), ainsi on visualise directement l'influence du circuit sur le spectre des tensions et courants.*

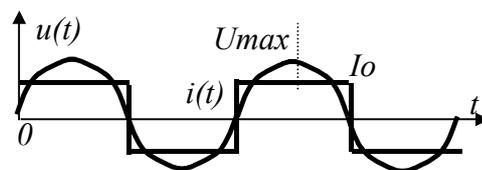
### **VI – 3 ) Puissance déformante et nature des courants harmoniques**

#### Puissance déformante :

En électrotechnique, plus un signal comporte d'harmoniques, moins il est considéré comme "pur" c'est à dire sinusoïdal. Dans le domaine de l'énergie électrique, on a tendance à filtrer les tensions et les courants afin d'en minimiser le contenu harmonique. En effet celui ci ne participe pas à la conversion d'énergie et fait chuter la valeur du facteur de puissance.

Sur l'exemple d'une tension sinusoïdale et d'un courant carré, il faut considérer que la puissance active est celle due à la tension et au fondamental du courant, qui sont en phase :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_{\max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4I_0}{\pi} \cdot \cos(\varphi) = \frac{2 \cdot U_{\max} \cdot I_0}{\pi}$$



La puissance apparente est égale au produit des valeurs efficaces :  $S = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\max} I_0$ .

Les fondamentaux étant en phase, la puissance réactive est nulle, pourtant il reste une puissance :  $D = \sqrt{S^2 - P^2} = I_0 U \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)$  : c'est la **puissance déformante**, c'est à dire celle due au contenu harmonique d'une ou des deux grandeurs.

On retiendra donc toujours la formulation générale :  $S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$

Plus théoriquement, pour une charge sous tension sinusoïdale consommant un courant  $i$  déformé. On peut relier la valeur efficace  $I$  du courant aux amplitudes des composantes

harmoniques en écrivant :  $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2}$   $n \rightarrow \infty$

La formulation des puissance s'écrit :

$$(VI)^2 = (V \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2})^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

Or, les puissances active et réactive ne sont concernées que par le fondamental du courant  $i$ .

Ainsi, on peut écrire :  $P = V I_1 \cos \varphi_1$  et  $Q = V I_1 \sin \varphi_1$

La relation devient :  $V^2 (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2) = V I_1^2 + D^2$

En simplifiant les composantes de rang 1, on obtient :  $V^2 (I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2) = D^2$

la puissance déformante a donc l'expression suivante :

$$D = V \sqrt{(I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2)}$$
  $n \rightarrow \infty$

#### Nature des courants harmoniques

En général en électrotechnique, les harmoniques pairs sont négligeables (il faut pour cela que les grandeurs soient alternatives symétriques, ce qui est souvent le cas). Les principaux harmoniques présents sont le troisième (150Hz), le cinquième (250Hz), le septième (350Hz) et le neuvième (450Hz). Ces harmoniques sont parfois à l'origine de graves problèmes.

### **VI – 4 ) Sources d'harmoniques et propagation**

Les sources principales d'harmoniques sont :

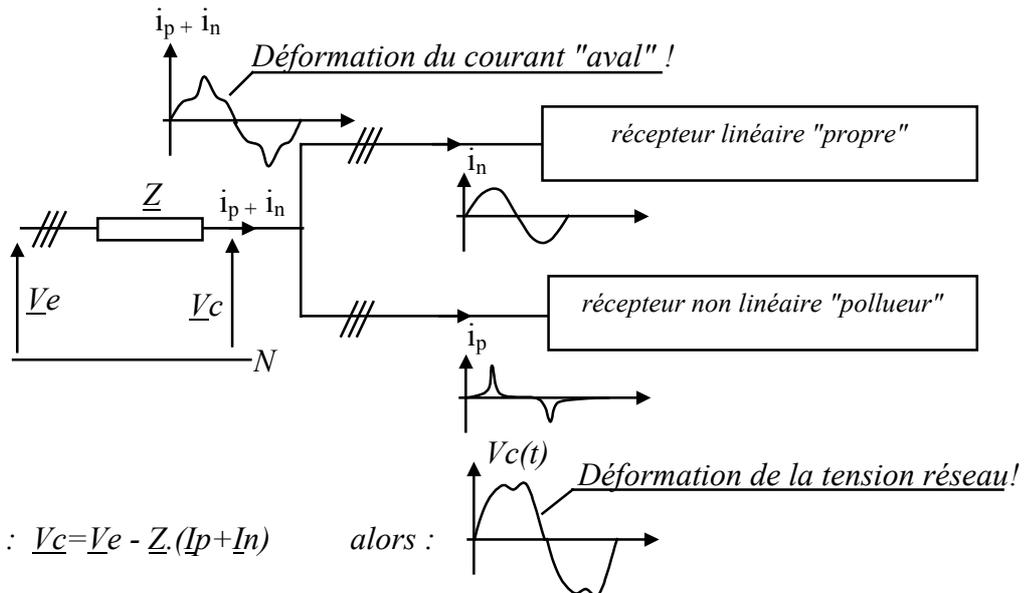
- Sources de tensions non sinusoïdales : *alternateurs, machines tournantes, etc...*
- Sources de courants non sinusoïdaux : *récepteurs non linéaires, systèmes à courants "hachés", gradateurs, tous les convertisseurs de l'électronique de puissance...*

Sur les réseaux électriques, il est nécessaire de minimiser globalement la présence d'harmoniques, malheureusement chaque appareil générateur d'harmoniques appelle des courants qui se répartissent sur tout le réseau suivant le principe représenté ci après.

On considère sur ce schéma un "nœud" de réseau (*en lignes triphasées*), où un embranchement débite sur une charge linéaire et l'autre sur une charge non linéaire.

Le courant avant le nœud est la somme des deux courants et est, par conséquent, non sinusoïdal.

De plus, à cause des impédances de ligne, symbolisées par  $Z$ , la tension au niveau de la charge souffre d'une chute de tension non linéaire et présente par conséquent un contenu harmonique.

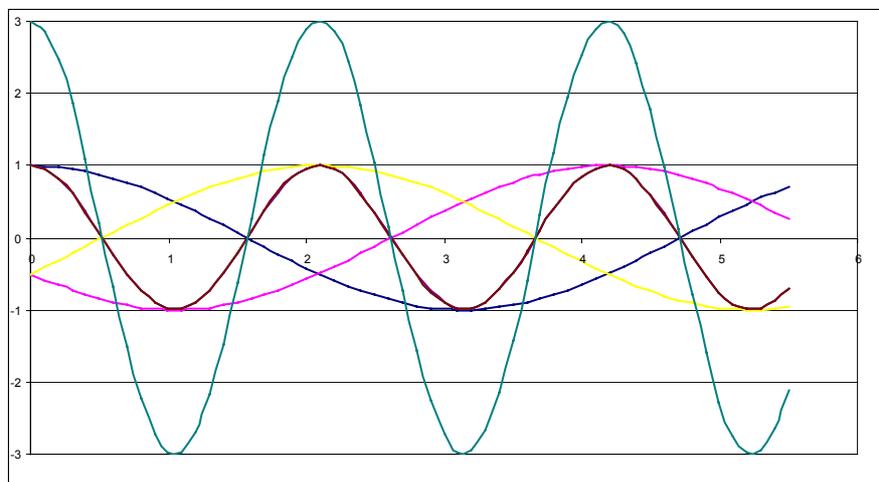


Le fait qu'on retrouve la non-linéarité d'une charge sur tout le réseau s'appelle la "propagation des harmoniques". On a même l'habitude de dire que les harmoniques "remontent" le réseau, c'est à dire se propagent des récepteurs vers les sources.

### VI – 5 ) Composition des courants harmoniques en triphasé

Dans les systèmes triphasés, contrairement aux courants fondamentaux, les courants de rang 3, 6, 9, etc... ne s'annulent pas dans le conducteur de neutre, au contraire ils s'ajoutent.

En effet, les composantes de rang 3 (et ses multiples) des courants de ligne se retrouvent en phase. On représente ci trois sinusoïdes à la fréquence f déphasées de  $2\pi/3$ . On représente également trois sinusoïdes de phase instantanées  $3\omega t$ ,  $3(\omega t + 2\pi/3)$  et  $3(\omega t + 2\pi/3)$



Sur ce tracé, on visualise bien le fait que les sinusoïdes correspondant à des harmoniques 3 d'un courant seront superposées et leur somme vaudra 3 fois l'une d'entre elles.

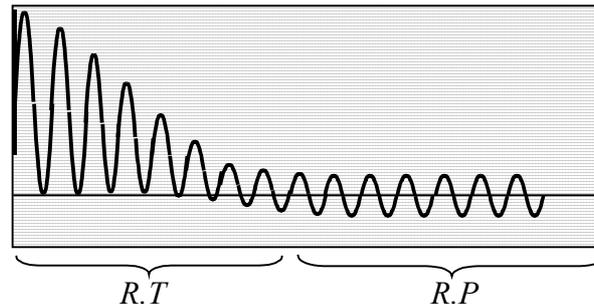
Ainsi, le conducteur de neutre véhicule des courants de rang 3, 6, 9, etc qui peuvent être énormes. La conséquence est immédiate au niveau de l'échauffement et parfois même de la destruction de ce conducteur.

## VII ) Les régimes transitoires

### VII – 1 ) Régime permanent et régime transitoire

Jusqu'à présent dans ce cours, toutes les formules ont été établies en **régime permanent**, c'est à dire lorsque les amplitudes des tensions et des courants ont atteint leurs valeurs de fonctionnement normal. Néanmoins, lors des mises sous tension ou des modifications de structure des circuits électriques, il se produit des phases de transitions qu'on appelle **régimes transitoires (R.T.)** et qui n'obéissent pas forcément aux règles du régime permanent.

Pour l'exemple, on représente ci dessous le relevé du courant de ligne lors de la mise sous tension d'un transformateur *MT/BT*.



L'étude du régime transitoire est souvent nécessaire afin de déterminer si les tensions et les courants qui en découlent ne présentent pas des évolutions dangereuses. Dans le cas de transformateurs de distribution d'énergie, le courant de démarrage peut atteindre jusqu'à 20 fois la valeur nominale. Il est donc impératif de prévoir cette valeur pour y adapter les organes de protection. Il est donc utile de savoir prédéterminer ces régimes, au moins dans les cas assez simples.

### VII – 2 ) Résolution des équations différentielles

Les relations courant / tension utilisables lors des régimes transitoires sont forcément les relations générales des dipôles. Ces relations, qui utilisent les dérivées des courants et tensions, font des équations de maille ou de nœud des circuits des équations différentielles. Pour résoudre un régime transitoire il est donc nécessaire de savoir résoudre une équation différentielle.

Une équation différentielle à coefficients constants de la fonction inconnue  $S$  se présente

comme suit :

$$a_n \cdot \frac{d^n S(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} S(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dS(t)}{dt} + a_0 = f(t)$$

$n$  est le degré de l'équation,  $f$  forme le second membre de l'équation

La méthode permettant de résoudre ces équations se passe toujours en trois temps :

1- **Résolution de l'équation sans second membre** :  $a_n \cdot \frac{d^n S(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} S(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dS(t)}{dt} + a_0 = 0$

On obtient la fonction  $S_{ssm}$ , dans laquelle existe une ou plusieurs constantes d'intégration.

2- La **solution générale** de l'équation s'écrit :  $S_{gen} = S_{ssm} + S_{part}$  où  $S_{part}$  représente une solution particulière de l'équation, c'est à dire une fonction quelconque qui vérifie l'équation.

En électrotechnique, il est toujours possible de trouver cette solution particulière puisque le système est réel et qu'il est toujours possible de déterminer son régime permanent. Ce dernier satisfera toujours à l'équation différentielle.

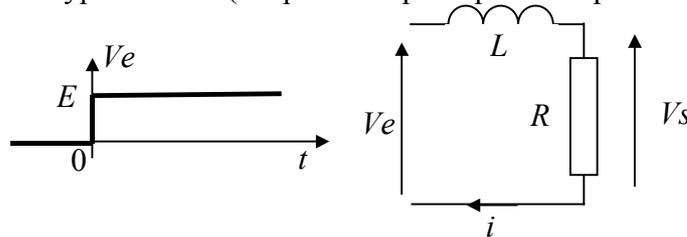
On retiendra donc :  $S_{part} =$  **Solution de l'équation en régime permanent**

3- Détermination des constantes à l'aide des conditions initiales ou finales des grandeurs.

### VII – 3 ) Application aux régimes transitoires du premier ordre

Considérons l'exemple du circuit suivant :

La tension  $V_e$  est de type échelon (ce qui correspond par exemple à une mise sous tension )



- On cherche à déterminer quelle sera l'évolution de  $i(t)$  .

Il suffit d'écrire l'équation de maille différentielle :  $V_e(t) = L.di/dt + R.i$

Pour  $t \geq 0$  ,  $E = L.di/dt + R.i$  est l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants qu'il faut résoudre, pour cela on met en œuvre la méthode énoncée plus haut.

1 : Résolution de l'équation sans second membre :

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R.i = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i \Rightarrow i(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) \text{ avec } K = cte$$

2 : On trouve une solution particulière de l'équation :

Ici, la solution particulière correspond naturellement au régime permanent du courant : c'est à dire à la valeur de courant continu :  $i = E/R$  (l'inductance est transparente en continu)

$$\text{la solution générale s'écrit alors : } i(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) + \frac{E}{R}$$

3 : Exploitation des conditions initiales :

à  $t=0$ ,  $i=0$  d'où  $K = -E/R$  . La solution est donc : 
$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - \exp(-\frac{R}{L} \cdot t))$$

NB : En mathématique il existe aussi une méthode dite de "variation de la constante". Elle est inutile en électrotechnique puisqu'on dispose toujours de la possibilité du calcul du régime permanent, et donc de la solution particulière.

### VII – 4 ) Application aux régimes transitoires du second ordre

Quand le circuit à étudier est plus complexe, on manipule souvent des équation différentielles

du second ordre, c'est à dire du type :  $a \cdot \frac{d^2v(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{dv(t)}{dt} + c = f(t)$

La méthode de résolution est la même que précédemment, à la différence de la détermination de la solution sans second membre.

1 : Résolution de l'équation sans second membre :

Pour résoudre l'équation  $a \cdot \frac{d^2v(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{dv(t)}{dt} + c = 0$  , on forme le polynôme caractéristique :

$$a \cdot r^2 + br + c = 0$$

On note  $\Delta = b^2 - 4ac$  le discriminant de ce polynôme. Les solutions dépendent de sa valeur.

-  $\Delta > 0$  : il existe deux racines réelles au polynôme :  $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

la solution de l'équation sans second membre s'écrira :  $v_{ssm}(t) = A \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot e^{r_2 \cdot t}$

Avec  $A$  et  $B$  deux constantes à déterminer.

-  $\Delta = 0$  : il existe une seule racine réelle au polynôme :  $r = -\frac{b}{2a}$

la solution de l'équation sans second membre s'écrira :  $v_{ssm}(t) = (A \cdot t + B) \cdot e^{r \cdot t}$

Avec  $A$  et  $B$  deux constantes à déterminer.

-  $\Delta < 0$  : il existe deux racines complexes au polynôme :  $r_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha \pm j\beta$

la solution de l'équation sans second membre s'écrira :  $v_{ssm}(t) = A.e^{r_1.t} + B.e^{r_2.t} = e^{\alpha t} (A.e^{j\beta t} + B.e^{-j\beta t})$

Avec  $A$  et  $B$  deux constantes à déterminer.

On écrira préférentiellement la solution de l'équation sans second membre sous la forme :

$$v_{ssm}(t) = e^{\alpha t} (C.\cos(\beta t) + D.\sin(\beta t))$$

En posant  $\tan\varphi = \frac{D}{C}$  et  $K = \frac{C}{\cos\varphi}$ , on obtient l'écriture :

$$v_{ssm}(t) = K.e^{\alpha t}.\cos(\beta t - \varphi)$$

Où  $K$  et  $\varphi$  sont deux constantes à déterminer.

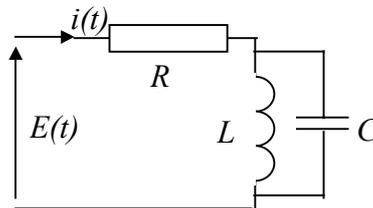
*NB : le terme  $\beta$  correspond toujours à la pulsation de résonance du circuit : appelée communément  $\omega_0$  (et évoquée au bas de cette page)*

*NB : Il est facile à comprendre à ce stade que la valeur du discriminant permet de prédéterminer si la grandeur sera "amortie" ( $\Delta \geq 0$ ) ou "oscillante" ( $\Delta < 0$ )*

Méthodologie pratique issue du traitement du signal :

En traitement du signal électrique on dispose d'une méthodologie propre à l'étude des second ordre, on détaille ceci sur un exemple :

Soit le circuit suivant :



L'équation différentielle reliant  $i$  à  $E$  est à priori assez compliquée, on préfère écrire directement la relation en notation complexe :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + L//C} \quad \text{avec} \quad L//C = \frac{j.L.\omega}{1 + L.C.(j\omega)^2}$$

$$\text{donc : } \underline{I} = \frac{\underline{E}}{R.(1 + L.C.(j\omega)^2) + j.L.\omega} (1 + L.C.(j\omega)^2) = \underline{E} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1 + L.C.(j\omega)^2}{1 + j \cdot \frac{L}{R} \omega + L.C.(j\omega)^2}$$

Ensuite, on met le dénominateur sous une forme normalisée :

$$1 + j.2m \cdot \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

ici, en identifiant le dénominateur à la forme normalisée, on trouve :

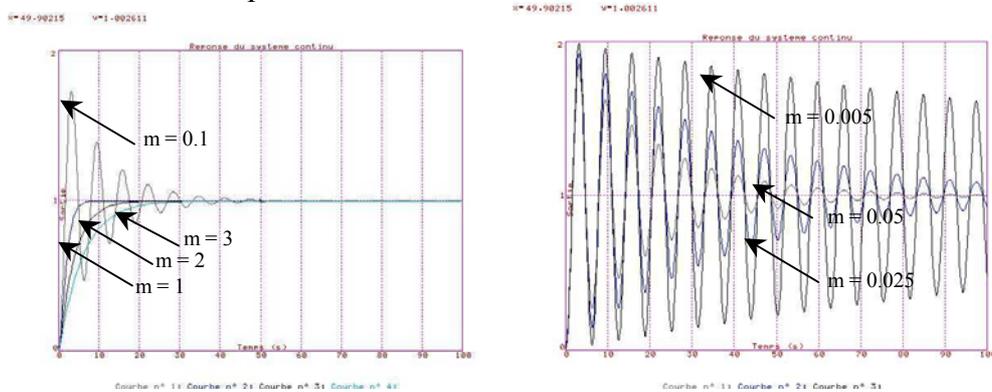
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{qu'on appelle la } \textit{pulsation de résonance} \text{ (correspond à } f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}})$$

$$\text{et} \quad m = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{qu'on appelle l'amortissement} \quad (0 < m < 1)$$

Il faut savoir qu'un amortissement  $m > 1$  correspond à des réactions amorties et lentes, inversement  $m < 1$  correspond à des réactions oscillantes avec des dépassements de la valeur finale.

A partir des valeurs de  $m$  et  $\omega_0$ , on se réfère à des abaques et de formes d'ondes types des régimes transitoires disponibles pour le traitement du signal.

On en présente deux exemples ci dessous :



NB : Pour plus d'informations, se référer à un cours d'Automatique et traitement du signal

### VII – 5 ) Exemple de calcul avec second membre sinusoïdal

Pour prédéterminer les régimes transitoires en électrotechnique sous tension sinusoïdale, il suffit de savoir résoudre, au pire, une équation différentielle du type :

$$a \cdot \frac{d^2v}{dt^2} + b \frac{dv}{dt} + c = E \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

La méthode de résolution est strictement la même que celle évoquée plus haut :

La différence consiste dans le fait que la solution particulière est toujours le **régime permanent** de la grandeur recherchée, cette fois **sinusoïdal**.

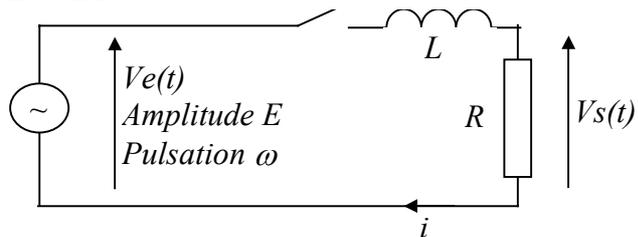
On propose ci dessous la résolution du transitoire en courant du circuit proposé :

On cherche donc à déterminer  $i(t)$ .

On donne les caractéristiques de la tension d'entrée :

Pour  $t < 0$  : K ouvert

Pour  $t > 0$  : K fermé et  
 $V_e(t) = E \cdot \sin(\omega t)$



La solution de l'équation sans second membre s'écrit :

$$i_{sm}(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)$$

La solution particulière, c'est à dire le régime permanent se déduit directement de l'analyse harmonique du problème :

En régime permanent sinusoïdal, le courant s'écrit :  $i_{part}(t) = I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

Où  $I_{eff} = \frac{V_e}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$  et  $\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$

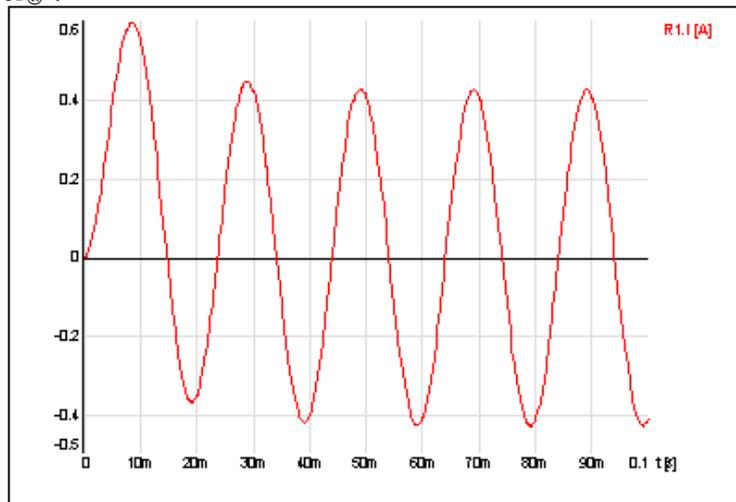
La solution générale de l'équation s'écrit donc sans équivoque :

$$i(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) + I_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

Pour déterminer la valeur de  $K$ , il suffit d'écrire que  $i(0) = 0$ , on obtient alors la solution générale :

$$i(t) = I_{eff} \cdot \sqrt{2} \left( \sin(\varphi) \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) + \sin(\omega t - \varphi) \right)$$

Le graphe ci-dessous représente  $R \cdot i(t)$ , le résultat de la simulation de ce régime transitoire avec le logiciel Simplorer®<sup>4</sup>.

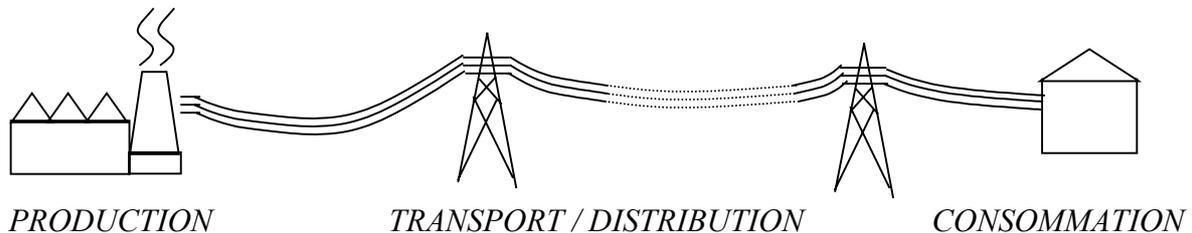


<sup>4</sup> logiciel gratuit en version démo disponible sur le site : <http://www.ansoft.com/products/em/simplorer/>

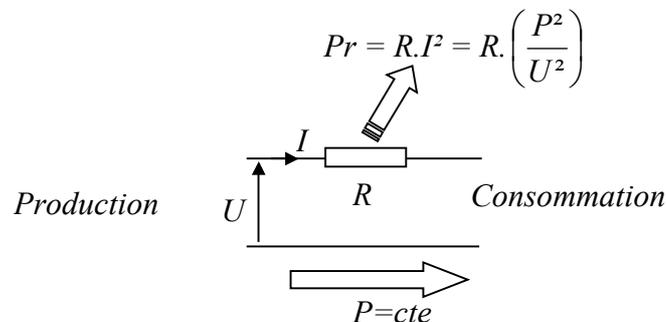
## VIII ) Le Réseau Electrique

### VIII – 1) Organisation globale

Les réseaux de production d'énergie électrique sont organisés grossièrement suivant le schéma ci dessous :



- La **production** consiste à utiliser des énergies diverses de manière à faire tourner des alternateurs qui produisent des tensions et des courants électriques triphasés. On distingue ainsi des centrales de production : thermiques, nucléaires, hydrauliques, éoliennes, photovoltaïques, géothermiques, etc. Les avantages et inconvénients de chaque type proviennent principalement de la facilité d'exploitation et d'entretien des ressources, de leur "renouvelabilité" et surtout du rendement de la transformation d'énergie.
- La **distribution** consiste à acheminer la tension produite par des lignes ou des câbles jusque chez les consommateurs tout en réalisant le moins de pertes possibles. Considérons une ligne de distribution d'énergie électrique qu'on modélise par une résistance  $R$  censée dissiper une certaine puissance perdue  $P_r$ .



La puissance perdue lors de la distribution,  $P_r$ , est d'autant plus petite que la tension  $U$  est grande, voilà pourquoi **on achemine l'énergie électrique à Haute Tension (HT de 10kV à 100kV) et Très Haute Tension (THT > 100kV)**.

Le transport de l'énergie électrique se fait donc graduellement à des tensions d'autant plus grandes que la ligne est longue et qu'elle véhicule une grande puissance. L'outil permettant d'élever et de rabaisser la tension est naturellement le transformateur triphasé.

- La **consommation** représente l'ensemble des utilisateurs de l'énergie électrique. Cet ensemble est très diversifié et se répartit sur des échelles de Tensions de 230V à 20kV et des courants de quelques mA à quelques kA (1000 Ampères).

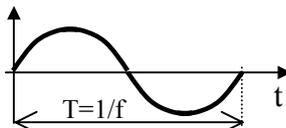
### VIII – 2) Nature de la tension, comparaison continu / alternatif

Les tensions et les courants présents sur le réseau sont sinusoïdaux à une fréquence fixe de 50Hz (60Hz aux USA, au Canada, etc.).

Pourquoi la tension sinusoïdale s'est-elle généralisée sur les réseaux électriques ?

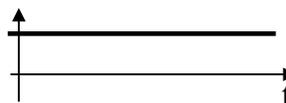
Les tensions sinusoïdales sont présentes à 99% sur les réseaux électriques, au dépend des tensions continues. Pour connaître les raisons de ce choix, on dresse deux tableaux d'avantages et d'inconvénients relatifs aux régimes alternatif sinus et continu.

**Courant Alternatif** :



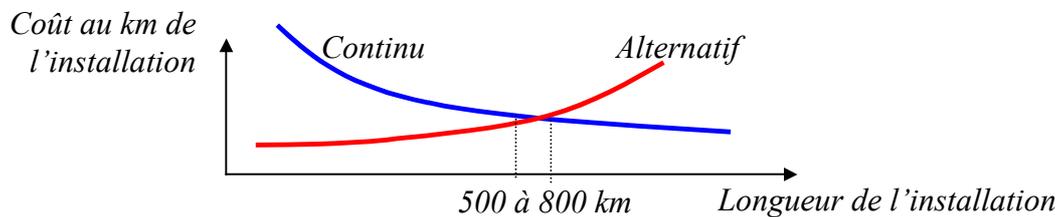
<i>Avantages</i>	<i>Inconvénients</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permet l'utilisation de transformateurs pour élever et abaisser la tension.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Difficulté d'interconnexion de plusieurs réseaux (il faut avoir même tension, même fréquence et même phase).</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Facilite la coupure des courants par le passage naturel par zéro 2 fois par période c'est à dire 100 fois par seconde.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Implique des effets inductifs et capacitifs tout au long du réseau, d'où l'existence de puissance réactive pénalisante pour le producteur.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Production directe par alternateurs.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Implique un effet de peau, c'est à dire la concentration du courant dans la périphérie des câbles, d'où la nécessité de câbles et lignes adaptés et donc plus chers.</li> </ul>

**Courant Continu** :



<i>Avantages</i>	<i>Inconvénients</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pas d'effet réactifs, donc pas de puissance réactive pénalisante pour la production.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Difficulté de couper les courants continus, d'où des dispositifs de coupure plus performants et plus chers.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Facilite l'interconnexion de des réseaux, il suffit d'avoir partout la même tension.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Terminaisons très coûteuses .</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pas d'effet de peau, les câbles et les lignes sont plus simples et moins chers.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Impossibilité de produire ou d'élever la tension dans les très hautes tensions d'où des pertes importantes sur les lignes.</li> </ul>

Les décisions industrielles, et à plus forte raison celles qui concernent les infrastructures nationales, se font essentiellement par rapport aux contraintes de coût. Il est alors nécessaire de tenir compte du graphe ci dessous qui représente qualitativement le coût au kilomètre des installations en courant alternatif et continu en fonction de la longueur de l'installation ( dans le cas d'un transport par lignes aériennes et non par câbles).



En dessous de 500 à 800 km, il est plus avantageux de choisir une tension alternative qui, de plus permet l'utilisation généralisée de transformateurs et donc de valeurs de tension adaptées à chaque tronçon de l'installation.

Voilà pourquoi **la tension du réseau est alternative**. En revanche, dans le cas d'un transport par câbles (éventuellement souterrains) la distance critique est d'environ 30km, voilà pourquoi, par exemple, la liaison France-Angleterre est faite en courant continu, ce qui, de plus, facilite l'interconnexion.

Il faut donc bien comprendre que le choix d'une installation en continu ou en alternatif est à la fois économique, historique et dépend de l'échelle de l'installation.

### VIII - 3) L'alternatif sinusoïdal et le triphasé

#### Pourquoi la tension alternative est sinusoïdale et non pas carrée ou triangulaire ?

En fait, les tensions non sinusoïdales sont composées, on l'a vu, d'harmoniques de fréquences multiples de la fréquence fondamentale. Ces harmoniques s'atténuent fortement le long des lignes à cause de "l'effet de peau".

L'effet de peau est un phénomène physique concernant le lieu de circulation des courants dans les conducteurs. Ces derniers ont tendance à se répartir sur la périphérie des conducteurs, qu'on peut appeler "couronne de conduction", et ce d'autant plus que la fréquence est élevée. La conséquence évidente est que plus la fréquence d'un courant est élevée, plus la résistance du conducteur ( $R = \rho L/S$ ) qui le véhicule est grande.

Les composantes harmoniques des courants non sinusoïdaux s'atténuent fortement le long des lignes du fait des chutes de tension dues aux résistances équivalentes.

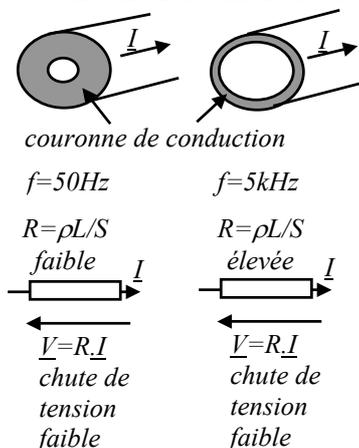
Si les centrales produisaient des tension non sinusoïdales, il ne subsisterait que la sinusoïde fondamentale au bout de quelques dizaines de kilomètres de lignes...le contenu harmonique perdu représentant de la puissance fournie pour rien.

On retiendra de façon plus générale qu'on désire éviter à tout prix la présence de puissance déformante.

Il faut rajouter à ça le fait que la plupart des alternateurs génèrent naturellement des tensions sinusoïdales.

**La tension du réseau est donc alternative sinusoïdale.**

La pureté de cette tension réside d'ailleurs dans la faiblesse de son contenu harmonique.

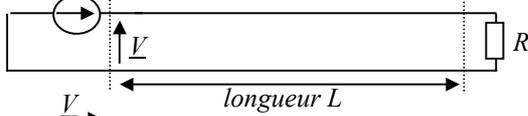


Pourquoi le réseau est il triphasé et non pas monophasé ?

La réponse s'appuie sur trois données majeures :

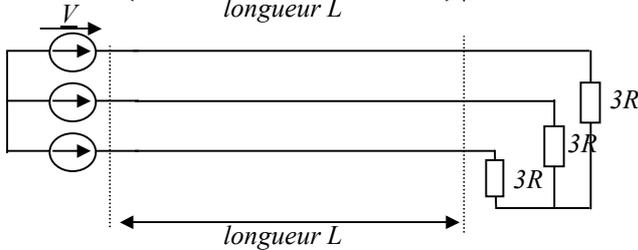
- La distribution en lignes triphasées sans neutre est économique en terme de poids de conducteur.

On rappelle la comparaison sans équivoque d'une distribution monophasée et triphasée.



$$\text{Monophasé : } I = V/R \Rightarrow S = I\delta = V/R\delta$$

$$\text{Vol Cu} = 2.L.S = 2.L.V/R\delta$$



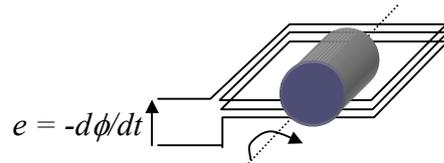
$$\text{Triphasé : } I = V/3R \Rightarrow S = I\delta = V/3R\delta$$

$$\text{Vol Cu} = 3.L.S = L.V/R\delta$$

$$\text{Donc : Vol Cu}_{TRI} = (\text{Vol Cu}_{MONO})/2$$

- Les machines électriques qui produisent et utilisent ces tensions fonctionnent de façon optimale en régime triphasé.

Un alternateur est constitué d'un rotor aimanté qui tourne au sein d'un bobinage, on représente rotor et bobinage de façon schématique ci contre :

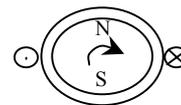


La rotation du champ créé par le rotor représente une variation périodique du champ magnétique dans l'axe du bobinage. Si on note  $\phi$  le flux du champ magnétique dans l'axe du bobinage. La tension crée aux bornes du bobinage s'exprime :  $e = -d\phi/dt$

Si la rotation est uniforme et la répartition du champ sinusoïdale en fonction du temps, c'est à dire que  $\phi(t) = \phi_{max} \cdot \sin(\omega t)$  on obtient :  $e(t) = \omega \cdot \phi_{max} \cdot \cos(\omega t) = E_{max} \cdot \cos(\omega t)$

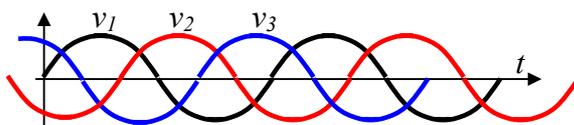
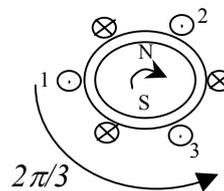
La représentation des alternateurs et de leurs enroulements est facilitée par une vue en coupe représentée ci contre :

Pour profiter de la périphérie des rotors, on bobine généralement plusieurs bobinages indépendants, le nombre optimal étant de trois, on les représente ci contre :



Les bobinages s'appellent alors les "phases", ils sont déphasés géométriquement de  $2\pi/3$ .

La représentation des tensions  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  produites par chaque bobinage fait apparaître le système de tensions triphasées, représentées ci dessous :



$$\text{où : } \begin{cases} v_1 = V \cdot \sin(\omega t) \\ v_2 = V \cdot \sin(\omega t - 2\pi/3) \\ v_3 = V \cdot \sin(\omega t + 2\pi/3) \end{cases}$$

La réciproque de ce phénomène est qu'en alimentant un ensemble de bobinages triphasés par un système de courants triphasés, on crée un champ magnétique tournant qui peut entraîner des rotors. On retiendra que les systèmes triphasés sont capables de produire des champs tournants.

- La puissance instantanée que fournissent ou utilisent les systèmes triphasés est constante.

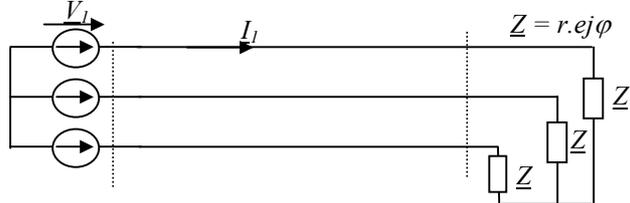
Considérons le système triphasé ci contre :

Le système de tensions triphasées s'écrit :

$$\begin{cases} v_1 = V. \sqrt{2}. \cos(\omega t) \\ v_2 = V. \sqrt{2}. \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ v_3 = V. \sqrt{2}. \cos(\omega t + 2\pi/3) \end{cases}$$

Le système de courants triphasés s'écrit

$$\begin{cases} i_1 = I. \sqrt{2}. \cos(\omega t - \varphi) \\ i_2 = I. \sqrt{2}. \cos(\omega t - 2\pi/3 - \varphi) \\ i_3 = I. \sqrt{2}. \cos(\omega t + 2\pi/3 - \varphi) \end{cases}$$



La puissance totale instantanée s'écrit :

$$\begin{aligned} P(t) &= v_1.i_1(t) + v_2.i_2(t) + v_3.i_3(t) \\ &= 2.V.I.(\cos \omega t. \cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t - 2\pi/3). \cos(\omega t - 2\pi/3 - \varphi) + \cos(\omega t + 2\pi/3). \cos(\omega t + 2\pi/3 - \varphi)) \\ &= V.I.(\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi + \cos(2\omega t - 4\pi/3 - \varphi) + \cos \varphi + \cos(2\omega t + 4\pi/3 - \varphi) + \cos \varphi) \\ &= 3V.I.\cos \varphi + V.I.(\underbrace{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - 4\pi/3 - \varphi) + \cos(2\omega t + 4\pi/3 - \varphi)}_{= 0}) \\ &= 3V.I.\cos \varphi \end{aligned}$$

La puissance instantanée fournie par le système équilibré est donc constante et égale à la puissance moyenne.

Les systèmes triphasés équilibrés permettent donc, en particulier dans le domaine électromécanique où c'est très important, de fournir une puissance "sans à coup" ni "temps morts"aux charges qu'ils alimentent.

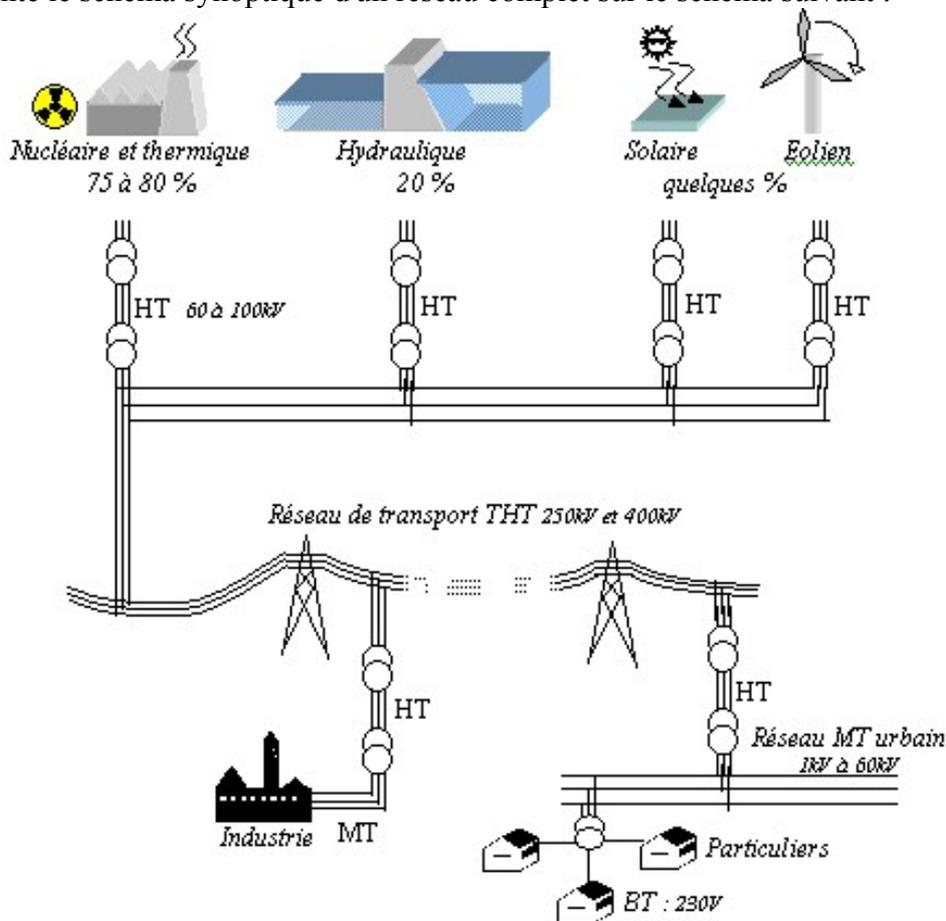
C'est la cohabitation de ces caractéristiques qui font que le **réseau est un système triphasé équilibré de tensions alternatives sinusoïdales.**

#### VIII – 4) Le réseau réel

Le réseau électrique réel est constitué de diverses centrales de productions. Les tensions produites par les alternateurs sont élevées en *HT* (*haute tension*) puis en *THT* (*très haute tension*) pour être transportées sur de longues distances. Après cela, on rabaisse la tension dans la gamme des *MT* (*moyennes tensions*) de façon à alimenter directement des agglomérations ou des industries. Dans chaque quartier, on trouve des postes de transformation abaisseurs qui délivrent la tension domestique *BT* (*basse tension* : 230V) à un certain nombre de pôles de consommation.

Il est à noter que les trois phases des lignes de distribution *MT* et *BT* (*Feeders*) sont réparties sur l'ensemble des utilisateurs de façon à équilibrer au maximum le réseau. En effet, il est impératif d'imposer l'équilibre des courants pour éviter le déséquilibre des tensions inévitable lié à l'absence du neutre sur les lignes *HT* et *THT*.

On représente le schéma synoptique d'un réseau complet sur le schéma suivant :



Plusieurs particularités sont à noter :

- Le réseau électrique doit accéder au plus près des lieux de consommation et doit former un ensemble maillé de telle manière qu'il y ait toujours plusieurs chemins possibles pour relier deux points.

La carte ci dessous<sup>5</sup> fait apparaître le maillage du réseau de transport *Très Haute Tension* (250 – 400kV). Il est à noter que le réseau de distribution *Basse Tension* est tellement compact qu'il est impossible à visualiser à l'échelle nationale.

On notera également la présence des lignes de connexion reliant la France aux pays voisins.



Dans le chapitre suivant, nous essaierons de répondre aux questions ci dessous :

- L'énergie électrique ne se stocke pas, il est donc impératif de fournir en permanence l'énergie consommée par l'ensemble des utilisateurs.

Comment alors s'adapter "en direct" à l'appel de puissance au niveau d'un pays ?

- Quand l'appel en puissance augmente, la tension du réseau varie en amplitude à cause des chutes de tension dues à l'impédance des lignes.

Les chutes de tension du réseau ont elles des conséquences sur la stabilité du réseau ?

- Pour vendre ou acheter de l'énergie électrique à un pays voisin, les deux réseaux doivent être interconnectés, quelles que soient leurs tensions, fréquence et phase.

Comment est-il possible d'interconnecter deux réseaux indépendants ?

<sup>5</sup> Source site du Réseau de Transport de l'électricité Français (RTE) : <http://www.rte-france.com/index.jsp>

### VIII – 5) Gestion de la production et différenciation des sources

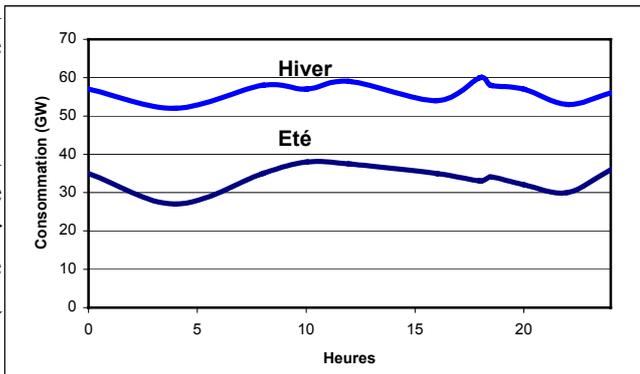
En France, la production d'électricité est répartie en différentes sources dont les temps de mise en fonctionnement sont très variables :

- à 75 à 80 % : énergie nucléaire                      temps de réaction ~30mn
- à 20%                      : énergie hydraulique                      temps de réaction ~ 0.5mn
- à qqs %                      : énergie éolienne et autres                      temps de réaction ~ 0.5mn

NB : En tout, en 2003, 470TWh ont été consommée en France...

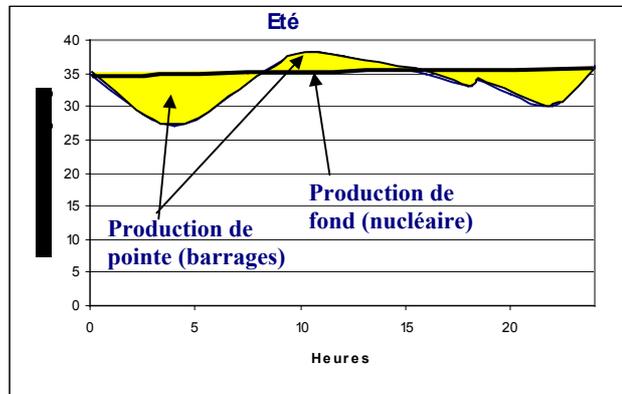
Le problème est que la demande de puissance instantanée du réseau évolue assez vite en fonction du moment de la journée et du rythme des habitants d'un pays.

On représente ci contre l'évolution journalière de la consommation électrique nationale en hiver et en été.



Les **centrales nucléaires** dont la production s'adapte avec des temps de réaction de l'ordre de l'heure sont programmées pour fournir un "**sabot**" **d'énergie** qui représente sensiblement la valeur moyenne de la consommation.

La figure ci après représente la production des grosses installations lentes au fil d'une journée (valeur "moyenne") en comparaison avec la consommation réelle.



La différence entre les deux (zone en couleur) est un problème puisqu'elle représente soit une puissance positive, c'est-à-dire un **manque de production**, soit une puissance négative c'est-à-dire un **excès de production**.

La résolution de ce problème réside dans la "**production de pointe**", c'est-à-dire dans l'utilisation judicieuse des **barrages hydrauliques**.

L'existence de ces barrages est particulièrement importante puisqu'ils sont réversibles en puissance. C'est à dire qu'ils peuvent soit produire du courant de par l'exploitation de la chute de l'eau, soit pomper de l'eau de la réserve basse vers la réserve haute et donc consommer du courant.

La figure ci dessus représente donc la proportion de la puissance "de base" et de la puissance "de pointe" produites sur le réseau.

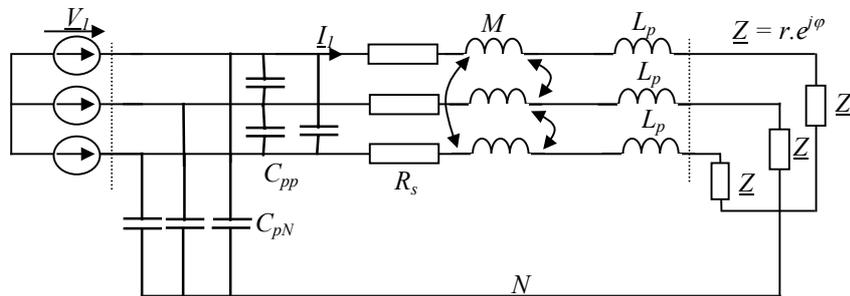
L'équilibre constant entre puissance fournie et puissance consommée est vérifiable par la vitesse des alternateurs. En effet, si la consommation est trop importante, les alternateurs ralentissent et la fréquence du réseau chute. Les unités de production sont donc pilotées en

temps réel de manière à ce que la fréquence reste scrupuleusement égale à 50Hz puisqu'elle est l'image de l'équilibre des puissances sur le réseau.

Les ordres de mise en service et d'actions sur les centrales sont gérés par le **"centre de dispatching national"** qui fonctionne 24h/24 et 7j/7 de manière à réguler le réseau en direct. Dans ce centre, des observateurs de la fréquence indiquent aux différentes centrales de production les modifications d'allure à apporter pour garantir au mieux la bonne marche de l'ensemble.

### VIII – 6) Modélisation de parties du réseau

Considérons une partie du réseau électrique débitant sur une charge triphasée équilibrée constituée par l'impédance  $\underline{Z}$ . On fait apparaître, sur le schéma ci-dessous, les résistances séries, les inductance propres séries  $L_p$ , les inductances mutuelles<sup>6</sup> équivalentes  $M$ , et les capacités parasites qui relient les phases entre elles et au neutre. ces éléments représentant les défauts de lignes.



La relation de maille de la phase 1 s'écrit :

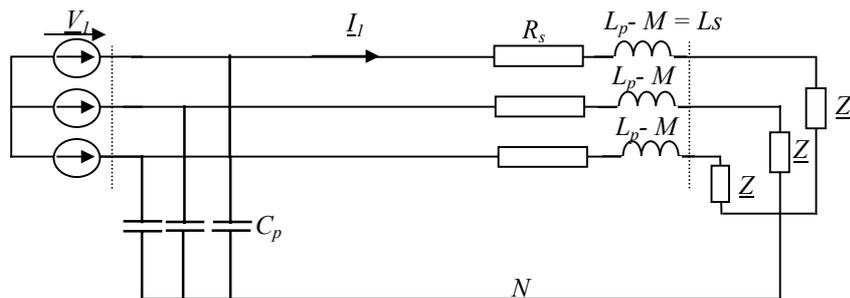
$$\underline{V}_1 = jM\omega.\underline{I}_2 + jM\omega.\underline{I}_3 + jL_p\omega\underline{I}_1 + \underline{Z}.\underline{I}_1 \quad \text{or si le système est équilibré : } \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

L'équation de maille devient :

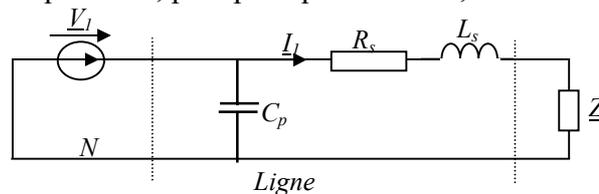
$$\underline{V}_1 = j(L_p - M)\omega\underline{I}_1 + \underline{Z}.\underline{I}_1$$

D'autre part, les capacités  $C_{pp}$  associés en triangle entre les phases sont équivalentes à des capacités entre phase et neutre.

Le schéma équivalent devient alors :



Le schéma monophasé équivalent, plus pratique à utiliser, se réduit donc à :



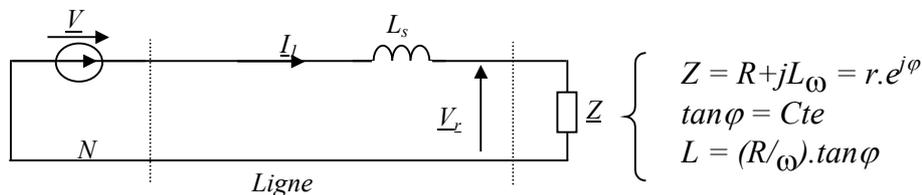
NB : La capacité parasite qui apparaît sur le schéma est très importante dans le cas d'un transport par câbles. Le transport par lignes aériennes fait apparaître des capacités parasites souvent négligeables, ce qui ramène l'imperfection à l'impédance de la ligne :  $R_s + jL\omega$

<sup>6</sup> dipôle qui développe une tension liée à un courant externe, par exemple:  $V_m = M.di_2(t)/dt \Rightarrow V_M = jM\omega I_2$

## VIII – 7) Ecroulement de la tension et interconnexion internationale

### Phénomène d'écroulement de la tension réseau

Lorsqu'un réseau fournit de la puissance à sa charge, les impédances de ligne imposent des chutes de tension qui font habituellement chuter la valeur efficace disponible aux utilisateurs. On peut, en négligeant la résistance série des lignes et les capacités parasites, modéliser le réseau comme suit :



Le but de cette modélisation est de représenter les effets de l'appel en puissance (ici la variation de R avec  $\cos\varphi = cte$  (ici  $\tan\varphi$ )) sur la tension réseau  $V_r$ .

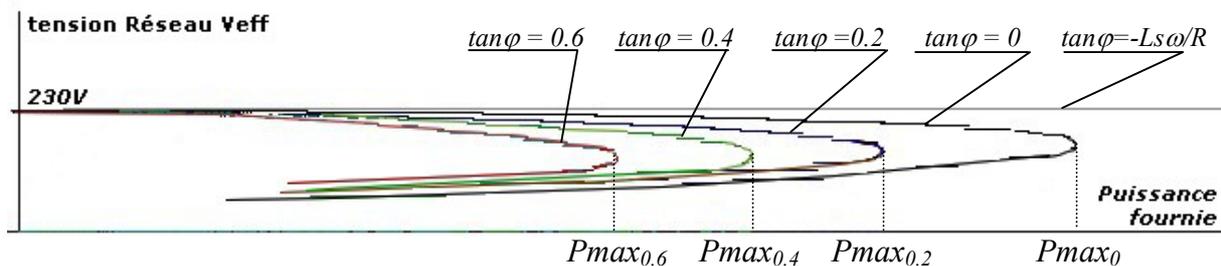
$V_r$  et  $I$  s'écrivent facilement :

$$V_r = \frac{V \cdot Z}{Z + jL_s\omega} \quad \text{et} \quad I = \frac{V}{Z + jL_s\omega}$$

$$\text{d'où} \quad V_r = \frac{V \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}{\sqrt{R^2 + ((L + L_s)\omega)^2}} \quad \text{et} \quad I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + ((L + L_s)\omega)^2}}$$

En faisant varier R, on obtient les différentes valeurs de  $V_r$  à représenter en fonction de  $P = R \cdot I^2$ .

La figure ci dessous représente un ensemble de courbes issues de simulation de ce problème, et ce pour différentes valeurs de  $\tan\varphi$ .



Il apparaît, pour chaque valeur de  $\tan\varphi$ , une puissance maximale que le réseau est incapable de fournir. Plus la charge et la ligne sont inductives, plus cette puissance est faible.

Même pour  $\cos\varphi = 1$  ( $\tan\varphi = 0$ ), il existe à cause de l'impédance de la ligne une puissance maximale à ne pas atteindre.

*NB : Il existe une valeur de  $\tan\varphi$ , correspondant à une charge capacitive, où l'inductance série  $L_s$  est compensée. Dans ce cas là, il n'apparaît plus de chute de tension ni de puissance maximale. Malheureusement, les charges sont globalement inductives ou à  $\tan\varphi > 0$ .*

La partie des courbes qui suit le passage à  $P_{max}$  s'appelle **l'écroulement du réseau**, il constitue un "grand incident" sur le réseau qui habituellement "plonge un pays dans le noir" pendant de longues heures. Les années 1950 ont vu, en France, plusieurs jours de panne nationale. Plus récemment, des incidents similaires ont eu lieu aux USA et en Italie.

Pour éviter ce phénomène, le seul moyen est d'adapter la puissance maximale potentielle du réseau à la demande, pour cela une seule solution : interconnecter deux (ou plus) réseaux pour faire chuter l'impédance de ligne équivalente.

### Interconnexion des réseaux

Tous les producteurs d'électricité ont intérêt à se connecter à leurs voisins et ce aussi bien en régime de fonctionnement normal qu'en cas de défaillance de leur réseau de transport.

Les pays Européens ayant depuis longtemps des réseaux d'électricité nationaux, le degré supérieur de l'interconnexion a consisté à relier chaque pays avec ses voisins directs.

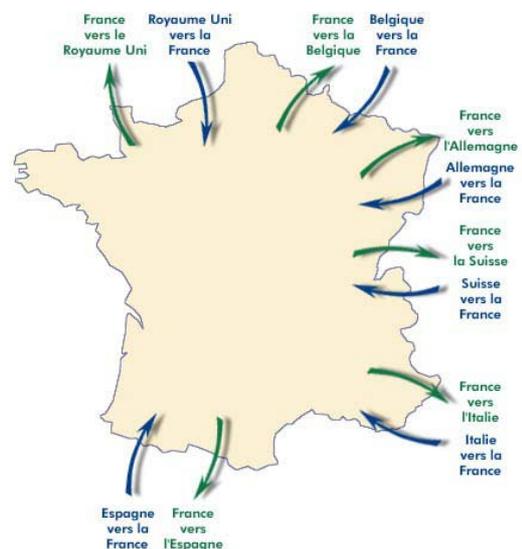
En **fonctionnement normal**, cela permet d'acheter ou de vendre de l'électricité d'un pays à l'autre. De plus, les rythmes des populations étant différents en fonction des cultures, la demande instantanée varie beaucoup au fil des heures pour un pays. En revanche, la consommation globale de plusieurs pays, comme une valeur moyenne, varie plus lentement. Il est alors possible de faire fonctionner les centrales de production de masse de façon plus intense et régulière, et donc plus rentable, et ce malgré les fluctuations de la demande.

En cas d'**avarie** d'une partie du réseau ou en cas d'**appel de puissance trop important** et non prévu, il est nécessaire qu'un apport extérieur de puissance vienne "aider" le réseau en difficulté.

Il est alors impératif que les échanges entre pays soient parfaitement réversibles.

Le schéma ci-contre fait apparaître de façon détaillée la liste des connexions internationales reliant la France à ses voisins.

Par ailleurs, les capacités d'échanges électriques des pays se chiffrent sur la base d'un indicateur : le taux d'interconnexion. Plus un pays est un carrefour de l'énergie électrique, plus son taux d'interconnexion est grand. C'est le cas de la Suisse qui se trouve au centre de l'interconnexion Ouest-Européenne.



Au niveau Européen, l'ensemble des pays de l'Europe de l'ouest, les pays nordiques et les pays de l'Est forment 3 blocs qui ont tendance à former un bloc géant d'interconnexion. On représente sur la carte ci-contre les grands ensembles de pays interconnectés Européens. Dans le cadre des directives Européennes sur la concurrence, l'interconnexion devient le vecteur principal de l'accès à la concurrence et de la diversification du marché.



L'Europe tend à former un seul et gigantesque réseau de transport de l'énergie électrique.

### VIII-8) Calcul des courants de court-circuits

En pratique, chaque partie du réseau est dimensionnée pour une certaine tension de ligne, une certaine puissance apparente nominale et présente des impédances de lignes constantes.

La détermination du courant de court-circuit est un exercice important permettant la dimensionnement des protections sur le réseau et la détermination des valeurs extrêmes des grandeurs importantes.

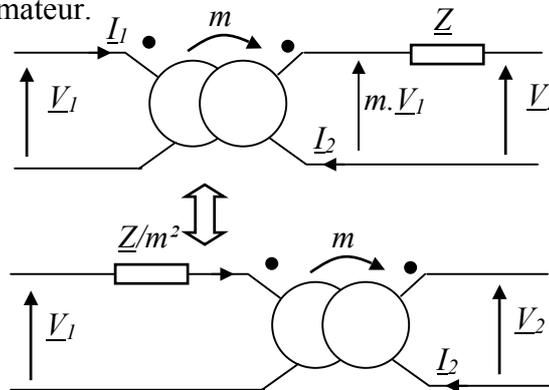
Pour calculer les courants de court-circuit, deux méthodes existent<sup>7</sup> :

- La méthode de la base de tension
- La méthode de la base de puissance

#### Méthode de la base de tension

Dans cette méthode, on ramène toutes les impédances de la ligne sur un unique tronçon, correspondant à une tension choisie. Au bout de ce tronçon, on représente le court-circuit. L'impédance équivalente ramenée permet de calculer le courant  $I_{cc}$ .

Outil indispensable pour cette méthode : l'équivalence primaire / secondaire des impédances autour d'un transformateur.



#### Méthode de la base de puissance

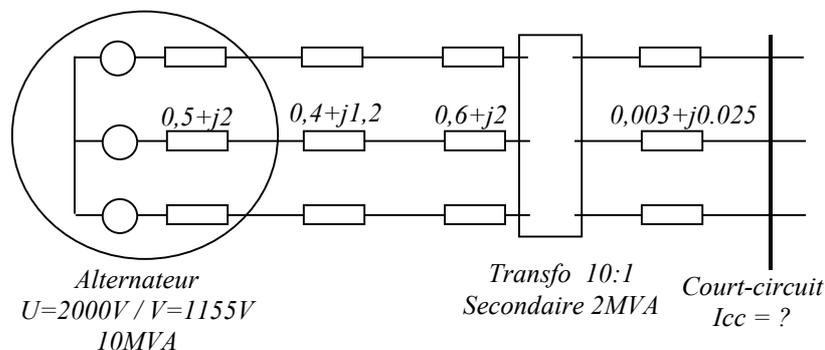
Dans cette méthode, on ramène toutes les impédances réduites de la ligne sur un unique tronçon, correspondant à une puissance apparente choisie. Au bout de ce tronçon, on représentera le court-circuit. La valeur de l'impédance réduite ramenée permet le calcul de la puissance de court-circuit, et donc celui du courant de court-circuit.

Outil indispensable pour cette méthode : l'écriture des impédances réduites  $Z\%_{ori} = 100 \cdot \frac{Z \cdot S_N}{U_N^2}$ ,

de la tension de court-circuit  $V_{cc}\% = \sqrt{(R\%)^2 + (X\%)^2}$  et de la puissance (apparente) de court-circuit :

$$S_{cc} = V_1 \cdot I_{cc} = 100 \cdot \frac{S_N}{V_{cc}\%}$$

On propose de comparer ces deux méthodes sur l'exemple suivant :



<sup>7</sup> Voir le chapitre sur les bases de calcul de l'ouvrage très complet : *Electrotechnique* par R.P. Bouchard et G Olivier (voir bibliographie)

Comparaison des deux méthodes :

<b>BASE DE TENSION</b>	<b>BASE DE PUISSANCE</b>
<p>Schéma équivalent monophasé</p> <p><math>V=1155V</math>      <math>V=1155V</math>      <math>V=115,5V</math></p>	<p>Calcul des impédances réduites : avec <math>Z\% = ZS_n/U_n^2</math></p> <p><math>10MVA</math>      <math>10MVA</math>      <math>2MVA</math>  <math>U=2kV</math>      <math>U=2kV</math>      <math>U=200V</math></p>
<p>impédances du secondaire ramenées au primaire</p> <p><math>V=1155V</math>      <math>V=1155V</math>      <math>V=1155V</math></p>	<p>impédances réduites ramenées à une puissance de 1MVA : (par exemple)</p> <p><math>1MVA</math>      <math>1MVA</math>      <math>1MVA</math></p>
<p>Rassemblement en impédance équivalente :</p> <p><math>V=1155V</math></p>	<p>Rassemblement des impédances :</p> <p><math>1MVA</math>      <math>1MVA</math>      <math>1MVA</math></p>
<p>On en déduit :</p> $I_{cc} = \frac{1155}{\sqrt{1,8^2 + 7,7^2}} = 146A$ <p>Ce courant est avant le transformateur, au secondaire, il suffit d'écrire, pour une tension de 115,5V :</p> $I_{cc} = 146 \cdot \frac{1155}{115,5} = 1460A$	<p>On en déduit :</p> $V_{cc}\% = \sqrt{(R\%)^2 + (X\%)^2} = 197,78\%$ <p>Alors : <math>S_{cc} = 100 \cdot \frac{S_N}{V_{cc}\%} = 0.505MVA</math></p> $I_{cc} = \frac{S_{cc}}{3 \cdot V_n} = \frac{0,505 \cdot 10^6}{3 \times 115,5} = 1450A$

Les résultats sont comparables, aux erreurs d'arrondis près.

Exemple de détermination d'un courant de court-circuit sur un réseau compliqué :

On se propose à présent de déterminer le courant de court circuit au point *P* du réseau représenté ci dessous sous la forme d'un schéma unifilaire :

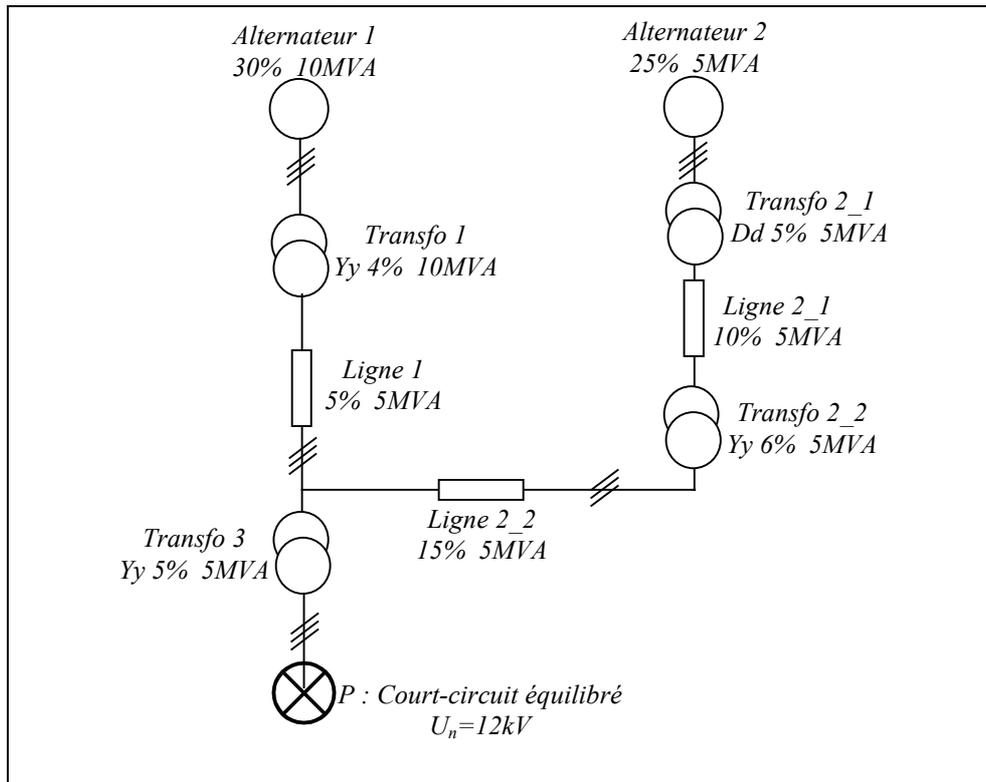
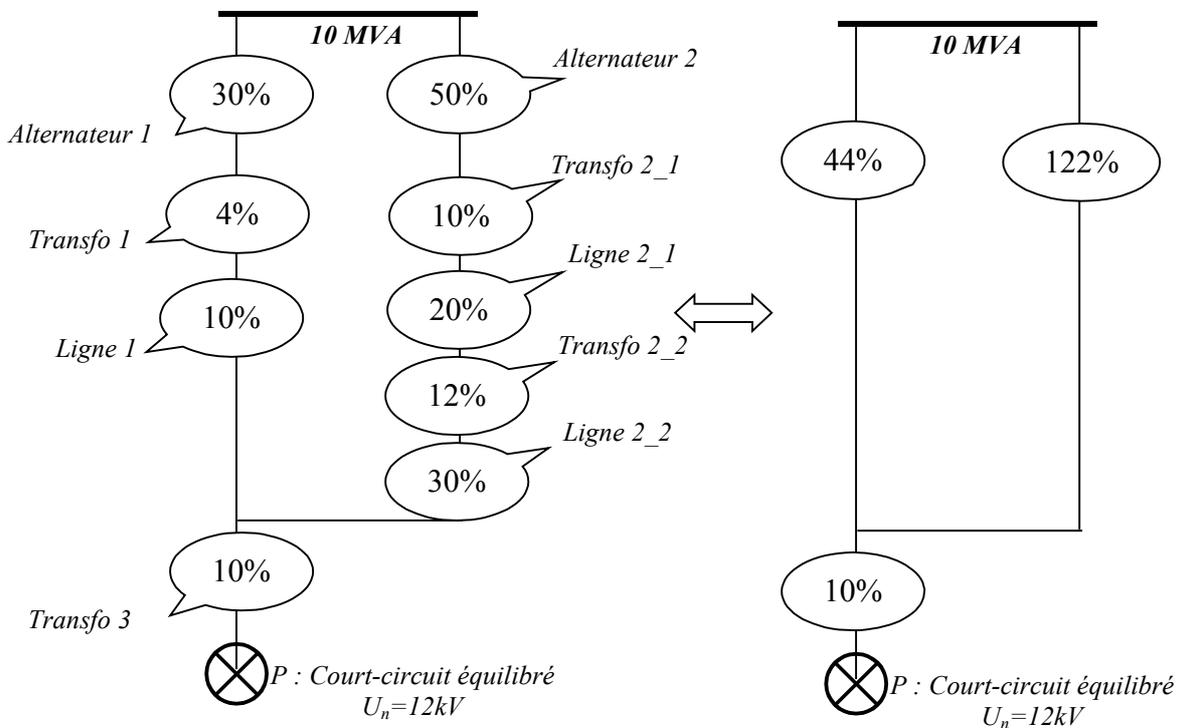


Schéma équivalent sur une base de puissance de **10MVA** :



ligne toute entière est donc équivalente au schéma suivant :

La



Il suffit donc d'écrire :  $S_{cc} = 100 \cdot \frac{S_n}{U_{cc}} = \frac{10 \cdot 10^6}{42,33\%} = 23,6 \text{ MVA}$

Pour finir :  $I_{cc} = \frac{S_{cc}}{3 \cdot V_n} = \frac{S_{cc}}{\sqrt{3} \cdot U_n} = \frac{23,6 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \times 12000} = 1135 \text{ A}$

## **Bibliographie :**

- *Electrotechnique Industrielle*, Séguier / Notelet, Lavoisier Tec et Doc
- *Electrotechnique 2<sup>ème</sup> édition*, T. Wildi , Presses de l'université de Laval
- *Electrotechnique 2<sup>ème</sup> édition*, R.P.Bouchard / G. Olivier, presses internationales polytechniques (Québec)
- *Electricité : Voyage au cœur du système*, Eyrolles
- *Réseaux d'énergie électrique : modélisation : lignes, câbles*, J.M Escané, Eyrolles
- *Electronique de puissance*, M.Lavabre, Educavivre
- *Génie électrique : du réseau au convertisseur*, J.L. Coquerelle, Technip

## **Logiciels :**

- *Simplorer : version de démonstration* disponible sur le site :  
<http://www.ansoft.com/products/em/simplorer/>

**Remerciements :** *Merci à celui qui lit ce polycopié jusqu'à la fin pour son intérêt porté à cette belle matière qu'est l'électrotechnique.*

*un grand merci à tous mes anciens professeurs qui m'ont donné l'amour de cette science et fait découvrir les finesses (pas toutes, il reste du travail).*

*Un grand merci tout particulier au professeur **J.C. Gianduzzo** pour l'étendue de ses connaissances et son aptitude particulière à les transmettre.*

*Merci à ma femme et ma fille (et mon petit dernier) pour tout le reste.*