Département ST

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Janvier 2017

Examen de Maths 1. **Durée : 02 heures**

Exercice n° 1. (05 pts)

1. Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 4^n + 6n - 1 \text{ est divisible par } 9.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que
$$\frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1.$$

Exercice n° 2. (07 pts)

1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{R}_1$ par :
$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2,\ \ (a,b)\,\mathcal{R}_1\,(c,d) \Longleftrightarrow a \leq c \ \text{ et } \ b \leq d.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.
   (b) $\mathcal{R}_1$ est-elle d'ordre total ?
2. On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation binaire $\mathcal{R}_2$ par :
$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*,\ \ x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence.
   (b) Donner la classe d'équivalence de 1. **Indication :** $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$.

Exercice n° 3. (08 pts)

1. Considérons l'application f définie par :
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 2x - 3. \end{array}$$
   (a) Calculer $f^{-1}(\{-6\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.
   (b) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
   (c) Donner des intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective. Déterminer l'application réciproque f^{-1}.
2. Soient a, b, c, et d des nombres réels non nuls. Considérons l'application g définie par :
$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} - \{\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}. \end{array}$$

Déterminer la condition sur a, b, c, et d pour que g soit injective.

Bon courage

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Janvier 2017

Corrigé de l'examen de Maths 1

Exercice n° 1.

1. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 4^n + 6n - 1 \text{ est divisible par } 9.$$

Il s'agit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : 4^n + 6n - 1 = 9k.$$

Pour $n = 0$, on a

$$4^0 + 6 \times 0 - 1 = 0 = 9 \times 0,$$

1

Donc

$$\exists k = 0 \in \mathbb{N} : 4^0 + 6 \times 0 - 1 = 9k.$$

On suppose que

$$\exists k \in \mathbb{N} : 4^n + 6n - 1 = 9k$$

et montrons que

$$\exists k' \in \mathbb{N} : 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k'.$$

0,5

On a

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 &= 4.4^n + 6n + 5 \\ &= 4(9k - 6n + 1) + 6n + 5 \text{ (on a utilisé l'hypothèse de récurrence)} \\ &= 36k - 18n + 9 \\ &= 9(4k - 2n + 1) \\ &= 9k' \text{ avec } k' = (4k - 2n + 1). \end{aligned}$$

1,5

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par l'absurde que

$$\frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1.$$

On suppose que

$$\frac{6n+3}{(n+2)^2} > 1.$$

2

On a

$$\begin{aligned} \tfrac{6n+3}{(n+2)^2} > 1 &\Rightarrow (n+2)^2 < 6n + 3 \\ &\Rightarrow n^2 + 4n + 4 < 6n + 3 \\ &\Rightarrow n^2 - 2n + 1 < 0 \\ &\Rightarrow (n-1)^2 < 0 \text{ contradiction}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1.$$

Exercice n° 2.

1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{R}_1$ par :

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2,\quad (a,b)\, \mathcal{R}_1\, (c,d) \Longleftrightarrow a \leq c \text{ et } b \leq d.$$

(a) Montrons que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre

i. Réflexivité de $\mathcal{R}_1$: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $a \leq a$ et $b \leq b$,

0,5

donc $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad (a,b)\mathcal{R}_1(a,b)$, d'où la réflexivité de $\mathcal{R}_1$.

ii. Antisymétrie de $\mathcal{R}_1$: Soient $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\mathcal{R}_1(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{R}_1(a,b)$, on a

$$\begin{aligned}(a,b)\mathcal{R}_1(c,d) \text{ et } (c,d)\mathcal{R}_1(a,b) &\Rightarrow [a \leq c \text{ et } b \leq d] \text{ et } [c \leq a \text{ et } d \leq b]\\ &\Rightarrow [a \leq c \text{ et } c \leq a] \text{ et } [b \leq d \text{ et } d \leq b]\\ &\Rightarrow a = c \text{ et } b = d\\ &\Rightarrow (a,b) = (c,d).\end{aligned}$$

1

D'où l'antisymétrie de $\mathcal{R}_1$.

iii. Transitivité de $\mathcal{R}_1$: Soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\mathcal{R}_1(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{R}_1(e,f)$, on a

$$(a,b)\mathcal{R}_1(c,d) \ et \ (c,d)\mathcal{R}_1(e,f) \Rightarrow \begin{cases} a \leq c \text{ et } b \leq d ....(1)\\ et\\ c \leq e \text{ et } d \leq f ....(2)\end{cases}$$

1

De (1) et (2), on obtient

$$a \leq e \text{ et } b \leq f,$$

c'est à dire que $(a,b)\mathcal{R}_1(e,f)$.

D'où la transitivité de $\mathcal{R}_1$.

De i), ii) et iii), on a $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

(b) L'ordre $\mathcal{R}_1$ n'est pas total (il est partiel) : En effet, les deux couples $(1,10)$ et $(2,9)$ ne sont pas comparables. On a

$$10 \not\leq 9 \Longrightarrow (1,10)\not{\mathcal{R}}_1(2,9)$$

1

et

$$2 \not\leq 1 \Longrightarrow (2,9)\not{\mathcal{R}}_1(1,10).$$

2. On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation binaire $\mathcal{R}_2$ par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}.$$

(a) Montrons que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence.

i. Réflexivité de $\mathcal{R}_2$: Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\begin{aligned}& x^2 + \tfrac{1}{x^2} = x^2 + \tfrac{1}{x^2}\\ \Longrightarrow\ & x\mathcal{R}_2 x.\end{aligned}$$

0,5

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}_2 x$. D'où la réflexivité de $\mathcal{R}_2$.

ii. Symétrie de $\mathcal{R}_2$: Soient $x,y \in \mathbb{R}^*$: $x\mathcal{R}_2 y$. On a

$$\begin{aligned}x\mathcal{R}_2 y &\Longrightarrow x^2 + \tfrac{1}{x^2} = y^2 + \tfrac{1}{y^2}\\ &\Longrightarrow y^2 + \tfrac{1}{y^2} = x^2 + \tfrac{1}{x^2}\\ &\Longrightarrow y\mathcal{R}_2 x.\end{aligned}$$

0,5

Donc

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*, \ x\mathcal{R}_2 y \Longrightarrow y\mathcal{R}_2 x.$$

D'où la symétrie de $\mathcal{R}_2$.

iii. Transitivité de $\mathcal{R}_2$: Soient $x,y,z \in \mathbb{R}^*$: $x\mathcal{R}_2 y$ et $y\mathcal{R}_2 z$. On a

$$\begin{aligned}\begin{cases} x\mathcal{R}_2 y\\ \text{et}\\ y\mathcal{R}_2 z\end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}\\ \text{et}\\ y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 + \frac{1}{z^2}\end{cases}\\ &\Longrightarrow x^2 + \tfrac{1}{x^2} = z^2 + \tfrac{1}{z^2}\\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}_2 z.\end{aligned}$$

1

Finalement,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^* : x\mathcal{R}_2 y \text{ et } y\mathcal{R}_2 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_2 z.$$

D'où la transitivité de $\mathcal{R}_2$.

De i), ii) et iii), on a $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence.

(b) La classe d'équivalence de 1 :

$$\begin{aligned} \bar{1} &= \{x \in \mathbb{R}^* : x\mathcal{R}_2 1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^* : x^2 + \tfrac{1}{x^2} = 1^2 + \tfrac{1}{1^2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^* : x^4 - 2x^2 + 1 = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^* : (x^2-1)^2 = 0\right\} \\ &= \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

1,5

Exercice n° 3.

1. Considérons l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 2x - 3. \end{array}$$

(a) Calculons $f^{-1}(\{-6\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-6\}) &= \{x \in \mathbb{R} / \ f(x) \in \{-6\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ f(x) = -6\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ x^2 + 2x - 3 = -6\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ x^2 + 2x + 3 = 0\right\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= \{x \in \mathbb{R} / \ f(x) \in \{0\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ f(x) = 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ x^2 + 2x - 3 = 0\right\} \\ &= \{-3, \ 1\} \end{aligned}$$

1

(b) Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

i. Injectivité de f : D'après la question précédente, on a $f(-3) = 0 = f(1)$ mais $-3 \neq 1$. Donc f n'est pas injective. 0,75

ii. Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = -6$ (par exemple) n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente). 0,75

iii. Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective). 0,5

(c) Donnons des intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective et déterminons l'application réciproque f^{-1}. 1,5

Il est facile de vérifier que $f :]-\infty, -1] \longrightarrow [-4, +\infty[$ est une bijection et que

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-4, +\infty[& \longrightarrow &]-\infty, -1] \\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) = -1 - \sqrt{4+y}. \end{array}$$

1

Remarque : On peut aussi considérer la bijection $f : [-1, +\infty[\longrightarrow [-4, +\infty[$ **et dans ce cas**

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-4, +\infty[& \longrightarrow & [-1, +\infty[\\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{4+y}. \end{array}$$

2. Soient $a, b, c,$ et d des nombres réels non nuls. Considérons l'application g définie par :

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} - \{\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}. \end{array}$$

Déterminons la condition sur $a, b, c,$ et d pour que g soit injective.

Soient $x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{-d}{c}\} : g(x) = g(y)$

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\Longrightarrow \tfrac{a\,x+b}{c\,x+d} = \tfrac{a\,y+b}{c\,y+d} \\ &\Longrightarrow (a\,x+b)(c\,y+d) = (c\,x+d)(a\,y+b) \\ &\Longrightarrow axcy + adx + bcy + bd = aycx + ady + bcx + bd \\ &\Longrightarrow (ad-bc)(x-y) = 0 \\ &\Longrightarrow x = y \text{ si } ad - bc \neq 0. \end{aligned}$$

Donc la condition pour que g soit injective est

$$ad - bc \neq 0.$$

1,5

Remarque : On peut aussi utiliser la dérivée. En effet, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{-d}{c}\}, \quad g'(x) = \frac{ad-bc}{(c\,x+d)^2}.$$

Si $ad - bc = 0$, **on a** $g'(x) = 0$ **et par suite** $g(x) = cste$. **Donc g n'est pas injective.**
Si $ad - bc \neq 0$, **on a** g **est strictement monotone, donc elle est injective.**