Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Février 2017

Examen de remplacement de Maths 1.
Durée 2 heures.

Exercice 1. (06 points)

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x > 0,\quad (1+x)^n \geqslant (1+nx)$.
2. Montrer par contraposition que si $x \neq \frac{1}{2}$ et $y \neq 4$, alors $-8x - y + 2xy + 2 \neq -2$.
3. Montrer par l'absurde que 0 n'est pas racine de $A(x) = x^4 + 12x - 1$.

Exercice 2. (06 points)

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}_1$ par :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\quad x\,\mathcal{R}_1\,y \Longleftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y).$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.
(b) Donner la classe d'équivalence de 0 et de 2.

2. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}_2$ par :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\quad x\,\mathcal{R}_2\,y \Longleftrightarrow (x^2-8)^2 + 5 \geq (y^2-8)^2 + 5.$$

$\mathcal{R}_2$ est-elle une relation d'ordre ?

Exercice 3. (08 points)
On considère l'application f définie par :

$$f: \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

(a) Calculer $f^{-1}(\{1\})$.
(b) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
(c) Donner l'intervalle J pour lequel la fonction $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow J$ soit bijective.
Déterminer l'application réciproque f^{-1} de la bijection f.
(d) Calculer $f([1,3])$, $f^{-1}(\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\})$ et $f^{-1}([-2,0])$.

Bon Courage

Université A/Mira de Bejaia. Février 2017

Faculté de Technologie.

Département de Technologie.

1ère année ST

Corrigé de l'examen de remplacement Maths 1.

Exercice 1:

1. Montrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, x > 0 : (1+x)^n \geq (1+nx)$

pour $n=0$, on a $(1+x)^0 \geq (1+0x) \Rightarrow 1 \geq 1$ vrai 0,5

on suppose que $(1+x)^n \geq (1+nx)$ et montrons que

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+(n+1)x)$$ 0,5

on a: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

$(1+nx)(1+x) = 1+(1+n)x+nx^2 \geq 1+(1+n)x$ car $nx^2 \geq 0$

donc: $(1+x)^{n+1} \geq (1+(1+n)x)$ 1,5

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, x > 0 : (1+x)^n \geq (1+nx)$.

2. Montrons par ~~l'absurd~~ contraposée que:

si $x \neq \frac{1}{2}$ et $y \neq 4$, alors $-8x - y + 2xy + 2 \neq -2$

la contraposée de la proposition est:

si $-8x - y + 2xy + 2 = -2$, alors $x = \frac{1}{2}$ ou $y = 4$ 0,5

c'est à dire: $-8x - y + 2xy + 2 = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $y = 4$

on a: $-8x - y + 2xy + 2 = -2 \Rightarrow (y-4)(2x-1) = 0$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}$ ou $x = 4$ 1,5

par le principe de contraposition, on a démontré la proposition

3. Montrons par l'absurde que : "0" n'est pas une racine de $A(x)$

on suppose que "0" est une racine de $A(x)$ 0,5

on a : $A(x) = x^4 + 12x - 1$

$A(0) = 0^4 + 12 \times 0 - 1 = 0 \Rightarrow -1 = 0$ impossible. 1

(contradiction)

Finalement : "0" n'est pas une racine de $A(x)$.

Exercice 2 :

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire R_1 par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x R_1 y \iff x^3 - y^3 = 3(x - y)$$

(a) : Montrons que R_1 est une relation d'équivalente.

i) Réflexivité de R_1 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a 0,5

$$x^3 - x^3 = 3(x - x) \quad \left(\begin{matrix}0=0\\ \text{vrai}\end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow x R_1 x$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x R_1 x$.

D'où la réflexivité de R_1.

ii) Symétrie de R_1 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$: $x R_1 y$. On a

$$x R_1 y \Rightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y)$$

$$\Rightarrow -(y^3 - x^3) = -(3(y - x))$$

$$\Rightarrow (y^3 - x^3) = 3(y - x) \quad 0,5$$

$$\Rightarrow y R_1 x.$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x R_1 y \Rightarrow y R_1 x$.

D'où la symétrie de R_1.

iii) Transitivité de R_1 : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$: $x R_1 y$ et $y R_1 z$.

$$\begin{cases} x R_1 y \\ \text{et} \\ y R_1 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x-y) \\ \text{et} \\ y^3 - z^3 = 3(y-z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 - z^3 = 3(x-z)$$

1

$$\Rightarrow x R_1 z$$

Donc : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $\quad x R_1 y$ et $y R_1 z \Rightarrow x R_1 z$

d'où la transitivité de R_1.

De i), ii) et iii) on a R_1 est une relation d'équivalence.

(b) la classe d'équivalence de 0 et de 5.

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{x \in \mathbb{R} : x R_1 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x^3 - 0^3) = 3(x-0)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 3x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x(x^2-3) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = 0 \text{ ou } x^2 = 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{3}\} \\ &= \{0, \pm\sqrt{3}\} \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} \bar{2} &= \{x \in \mathbb{R} : x R_1 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2^3 = 3(x-2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 3x - 2 = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x+1)(x^2 - x - 2) = 0 \end{aligned}$$

$\overline{\overline{2}}$ $= \{ x \in \mathbb{R} \, (x+1)(x+1)(x-2) = 0 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} : (x = -1 \text{ ou } x = 2 \}$.

$= \{-1, 2\}$

1,5

2. on définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire R_2 par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x R_2 y \Leftrightarrow (x^2-8)^2+5 \geq (x^2-8)^2+5$$

R_1 n'est pas une relation d'ordre, car elle n'est pas antisymétrique :

$$-2 R_1 2 \quad \text{car} \quad \overbrace{\underbrace{((-2)^2-8)^2+5}} ^{21} \geq \overbrace{\underbrace{((2)^2-8)^2+5}}^{21}$$

et

$$2 R_1 -2 \quad \text{car} \quad \underbrace{((2)^2-8)^2+5}_{21} \geq \underbrace{((-2)^2-8)^2+5}_{21}$$

1,5

mais $-2 \neq 2$

Exercice 3 :

1. Considérons l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

(a) calculons $f^{-1}(\{1\})$.

$$f^{-1}(\{1\}) = \{ x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{1\} \} = \{ x \in \mathbb{R} / f(x) = 1 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{x+2} = 1 \} = \emptyset$$ 0,5

(b) Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

i) Injectivité de f : soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1+2} = \frac{x_2+1}{x_2+2}$$

$$\Rightarrow (x_1+1)(x_2+2) = (x_2+1)(x_1+2)$$

$$\Rightarrow x_1x_2 + 2x_1 + x_2 = x_1x_2 + 2x_2 + x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

Donc f est injective. 1

ii). Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = 1$ (par exemple) n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente). 0,5

iii) Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective. 0,5

(c). Donnons l'intervalle J pour lequel la fonction $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow J$ soit bijective et déterminons l'application réciproque f^{-1}.

il est facile de vérifier que

$f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \,]1, +\infty[$ est une bijection.

1

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}, \forall y \in]1, +\infty[$ on a:

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{x+1}{x+2}$$

$$\Rightarrow y(x+2) = x+1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-2y}{y-1}$$

donc $f^{-1} :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\}$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{1-2y}{y-1}$$

1

Remarque : On peut aussi considérer la bijection

$$f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow]-\infty, 1[.$$

et dans ce cas.

$$f^{-1} :]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{1-2y}{y-1}$$

(d). calculons $f([1,3])$, $f^{-1}(\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\})$ et $f^{-1}([-2,0])$

* $f([1,3]) = \{f(x) / x \in [1,3]\}$

$$= \{f(x) / 1 \leq x \leq 3\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

donc f est croissante.

$$f([1,3]) = [f(1), f(3)] = [\frac{2}{3}, \frac{4}{5}]$$

1

$$* \; f^{-1}\left(\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right\}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}-\{-2\} \,/\, f(x) \in \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right\}\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}-\{-2\} \,/\, f(x) = \frac{2}{3}, \quad f(x) = \frac{4}{5}\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}-\{-2\} \,/\, \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{x+1}{x+2} = \frac{4}{5}\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}-\{-2\} \,/\, x = 1, \quad x = 3\right\}$$

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right\}\right) = \left\{1, \frac{4}{5}\right\}$$ (res pe

0,5

$$* \; f^{-1}([-2, 0]) = \left\{x \in \mathbb{R}-\{-2\} \,/\, f(x) \in [-2, 0]\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}-\{-2\} \,/\, -2 \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 0\right\}$$

i) $-2 \leq \dfrac{x+1}{x+2} \Rightarrow x+1 \geq -2x-4$

$$\Rightarrow 3x+5 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$$

<u>et</u>

ii) $\dfrac{x+1}{x+2} \leq 0 \Rightarrow x+1 \leq x+2$

$$\Rightarrow x \in]-2, -1]$$

	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x+1)}{(x+2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

de i) et ii) : $x \in \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[\cap \left]-2, -1\right]$

$$f^{-1}([-2, 0]) = \left[-\frac{5}{3}, -1\right].$$

2