Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Janvier 2016

Examen de Maths1
Durée : 02 heures

Exercice 1. (6 points)

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4^n + 2$ est divisible par 3.
2. Soient k et k' deux entiers naturels non nuls. Montrer par contraposition que si $k.k' = 1$, alors $k = k' = 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par l'absurde que $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 2. (4 points)

On considère l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-3} \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
2. Quelle restriction doit-on faire sur l'espace d'arrivée pour que f devienne une bijection ? Dans ce cas donner l'application réciproque de f

Exercice 3. (4 points)

1. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :
$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y') \iff y = y'$.

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b. Déterminer la classe d'équivalence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4. (6 points)

1. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}\right)$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x - \sin 2x}{x^2}\right)$

c. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{3 - 3\tan x}{\sin x - \cos x}\right)$.

2. Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{si } x < -2, \\ a, & \text{si } x = -2, \\ (2x+b)^2, & \text{si } x > -2. \end{cases}$$

Soit continue sur $\mathbb{R}$.

Bon Courage

Université A/Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Janvier 2016

Corrigé de l'examen de Maths 1

Exo n°01 : 6pts

1) Pour $n=0$, on a $4^0+2=3=3\cdot k$ avec $\boxed{k=1}$.
la propriété est vérifiée pour $n=0$, supposons qu'elle est vraie à l'ordre n. (i.e) $4^n+2=3\cdot k$ avec $k\in\mathbb{N}$.
Montrons que $4^{n+1}+2$ est divisible par 3, on a (2)
$4^{4+1}+2 = 4\cdot 4^n+2 = (3+1)\cdot 4^n+2 = 3\cdot 4^n+4^n+2$
$= 3\cdot 4^n+3k = 3(4^n+k)=3\cdot k'$ avec $k'=(4^n+k)\in\mathbb{N}$,
donc $\forall n\in\mathbb{N}$ on a 4^n+2 est divisible par 3.

2) Supposons que $K\neq 1$ ou $K'\neq 1$, alors, on a
$(K\geq 2$ et $K'\geq 1)$ ou $(K\geq 1$ et $K'\geq 2)$. Dans les deux
cas, on a $KK'\geq 2$ et en particulier, $KK'\neq 1$. (2)
Donc $(K\neq 1$ ou $K'\neq 1)\Rightarrow(KK'\neq 1)$ par contraposition
on a montré que $\boxed{1=KK'\Rightarrow(K=1 \text{ et } K'=1)}$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, si n^2+1 est le carré d'un entier,
alors $\exists k\in\mathbb{N} \mid n^2+1=k^2 \Rightarrow k^2-n^2=1$ (2)
$\Rightarrow \begin{cases} K-n=1 \\ K+n=+1 \end{cases} \Rightarrow 2n=0 \Rightarrow n=0$, contradiction
avec le fait que $n\in\mathbb{N}^*$ et pour le cas où $k=0$.
impossible, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$. $\sqrt{n^2+1}\notin\mathbb{N}$.

Exo n° 02 : 4 pts

1) Soient x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}-\{3\}$, si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\frac{2x_1+1}{x_1-3} = \frac{2x_2+1}{x_2-3} \Rightarrow -7x_1 = -7x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$,

d'où f est injective. (1)

• Soit $y \in \mathbb{R} / f(x) = y$, alors $\frac{2x+1}{x-3} = y \Rightarrow$

$\boxed{x = \frac{3y+1}{y-2}}$, pour que x soit défini, il faut que $y \neq 2$, alors f n'est pas surjective. (1)

2) Pour que f soit surjective, il suffit de prendre (1) $\mathbb{R}-\{2\}$ comme espace d'arrivée. Dans ce cas

$f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2}$ (définie de $\mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{3\}$). (1)

Exo n° 03 :

a/ 1) on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $y=y$, alors $(x,y) R (x,y)$ d'où R est réflexive (0,5)

2) Soit $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2 / (x,y) R (x',y') \Rightarrow y = y' \Rightarrow y' = y$ (1)

$\Rightarrow (x',y') R (x,y)$, d'où R est symétrique

3) Soit $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2 /$

$\begin{cases} (x,y) R (x',y') \\ (x',y') R (x'',y'') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y' \\ y' = y'' \end{cases} \Rightarrow y = y''$, (1)

$(x,y) R (x'',y'')$, d'où R est transitive.

Comme R est Reflexive, symétrique et transitive donc elle est d'équivalence.

c) $\dot{(x,y)} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) R (a,b)\}$ 1.5

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b\} = \{(a,y) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Exo n°: 04.

a) $$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \mapsto 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{x} \cdot \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

1

$$= \lim_{x \mapsto 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right]} = 1$$

b) ona : $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

$\cos(x) = \cos(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x - 2 \sin x \cos x}{x^2}$$

1

$$= \lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{(1 - 2\cos x)}{x} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x}{x^2} \cdot (1 - 2\cos x) = \infty$$

c) $\displaystyle\lim_{x \to \pi/4} \frac{3-3\tan x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{\left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)\cdot 3\cos x}{[\sin x - \cos x]\cdot \cos x}$

$\displaystyle = \lim_{x \to \pi/4} \frac{3[\cos x - \sin x]}{[\sin x - \cos x]\cos x} = \boxed{\cancel{-3\sqrt{2}}}$ 1

2. Les restrictions de f aux intervalles $]-\infty,-2[$ et 0,5 $]-2, +\infty[$ sont des polynômes, donc continues sur ces deux intervalles. La fonction f sera continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en -2

(ie) $\displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} f(x) = f(-2) = a$

$\displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (2x+b)^2 = (-4+b)^2$

$\displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x-1)^2 = 9$ 1

donc $(-4+b)^2 = a = 9$ 0,5

$\Rightarrow (a=9, b=7)$ et $(a=9, b=1)$ 1