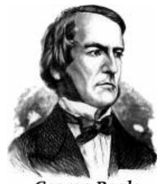
Chapitre 2 - Algèbre de Boole et Circuits Logiques

Série TD2



George Boole

Séance de TD4 (Semaine du 30 avril au 6 mai 2017)

Lors de cette séance, les chargés de TD doivent remettre aux étudiants le QCM2 à rendre dans 2 semaines.

Q1 – Voici les axiomes de l'algèbre de Boole

- ☐ Idempotence
- ☐ Commutativité
- ☐ Associativité
- ☐ Eléments neutre
- ☐ Eléments symétrique
- ☐ Complémentarité
- ☐ Absorption
- ☐ DeMorgan
- ☐ Inhibition
- ☐ Double distributivité

Q2 – L'ensemble des parties d'un ensemble ***E*** muni des lois ***Union*** et ***intersection*** et de l'application involutive « ***complémentaire par rapport à E*** » est une algèbre de Boole.

☐ Vrai ☐ Faux

Q3 – Complétez les 2 tableaux ci-dessous :

Loi "+"	**Nom de la propriété**
x + x = x	
x + y = y + x	
x+y+z = x+(y+z) = (x + y)+z	
x + 0 = x	
x + (y . z) = (x + y) . (x + z)	
$\overline{x} + x = 1$	

Loi "."	**Nom de la propriété**
x . x = x	
x . y = y . x	
x.y.z = x . (y . z) = (x . y) . z	
x . 1 = x	
x . (y + z) = (x . y) + (x . z)	
$\overline{x}.x = 0$	

Q4 – Le principe de dualité stipule qu'on peut déduire à partir de toute formule une nouvelle formule juste en remplaçant les opérateurs « + » par « . » et « 1 » par « 0 ».

☐ Vrai ☐ Faux ☐ Définition incomplète

Q5 – Indiquez à quoi correspondent les formules suivantes ?

$$\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y} \qquad \overline{x.y} = \overline{x}+\overline{y}$$

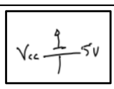
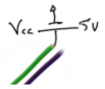
Q6 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 1 » correspond à :

- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ☐ Un niveau de tension de 0V
- ☐ Un niveau de tension voisine de 5V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ☐ Une lampe allumée
- ☐ Une lampe éteinte
- ☐ Un interrupteur mis sur ON
- ☐ Un interrupteur mis sur OFF

Q7 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 0 » correspond à :

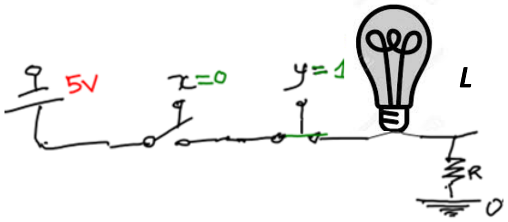
- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ☐ Un niveau de tension de 0V
- ☐ Un niveau de tension voisine de 5V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ☐ Une lampe allumée
- ☐ Une lampe éteinte
- ☐ Un interrupteur mis sur ON
- ☐ Un interrupteur mis sur OFF

Q8 – Complétez le tableau ci-dessous :

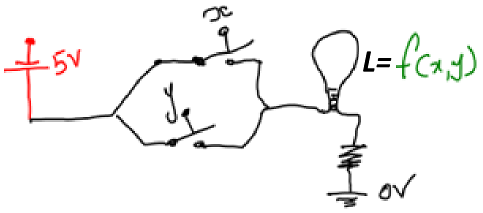
Etat électrique	**Etat logique**	**Etat électrique**	**Etat logique**
			
			
			
			

Q9 – En supposant que l'on représente deux variables booléennes « ***x*** » et « ***y*** » par 2 interrupteurs et une fonction « ***L*** » par une lampe.

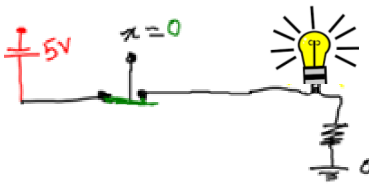
A ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



B ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



Q10 – – Le schéma électrique suivant



f(x) = ……

Correspond à :

- ☐ La négation
- ☐ Le OU
- ☐ Le ET
- ☐ Le OU exclusif
- ☐ Le NON OU exclusif
- ☐ L'équivalence

Q11 – Si vous avez ***n*** variables, combiens de lignes (hors mis la première ligne d'entête) allez-vous avoir dans la table de vérité représentant la fonction $F = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0)$:

Q12 – Indiquez les lois (axiomes et théorèmes) utilisés dans les démonstrations ci-dessous :

Transformation algébrique	Lois utilisées
$\overline{A}\,.\,B + A\,.B = B.\overline{A}\ + B.A$	
$B.\overline{A}\ + B.A =\ B.(\overline{A} +\ A)$	
$B.(\overline{A} +\ A) =\ B.1$	
$B.1 = B$	

Transformation algébrique	Lois utilisées
$(A \oplus B)\,.\,B + A.B =$ $(\overline{A}.B + A.\overline{B})\,.\,B + A.B$	
= $B.(B.\overline{A} + \overline{B}.A) + A.B$	
= $B.(B.\overline{A}) + B.(\overline{B}.A) + A.B$	
= $(B.B).\overline{A} + (B.\overline{B}).A + A.B$	
= $B.\overline{A} + (B.\overline{B}).A + A.B$	
= $B.\overline{A} + 0.A + A.B$	
= $B.\overline{A} + 0 + A.B$	
= $B.\overline{A} + A.B$	
= $B.(\overline{A} + A)$	
= $B.1$	
= B	

Transformation algébrique	Lois utilisées
$x + (\overline{x}.y) = (x + \overline{x}).(x + y)$	
$= 1.(x + y)$	
$= x + y$	

Q13 – Soit la table de vérité suivante

x_1	x_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Indiquez les fonctions correspondent aux colonnes suivantes:

Colonne	**Fonction**
f_0	
f_1	
f_6	
f_7	
f_8	
f_9	
f_{14}	

Q14 – Démontrer la propriété suivante :

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ fois}} = x$$

Indication : Procédez par récurrence ! Et utilisez la propriété d'idempotence

Q15 – Démontrer la propriété : « $x \,.\, x \,.\, \bar{x} = 0$ ». (Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Q16 – Démontrer la propriété : « $x \,.\, 0 = 0$ ». (Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Q17 – Soient ***x*** et ***y*** deux variables booléennes

$(x, y) \in V^2$ où $V = \{0,1\}$

☞ On définit l'opérateur « $\oplus$ » de la manière suivante : **$x \oplus y = 1$ si et seulement si $x \neq y$**

Montrez, à l'aide d'une table de vérité que $x \oplus y = \bar{x}.y + x.\bar{y}$

☞ On définit l'opérateur $\overline{\oplus}$ de la manière suivante : **$x \overline{\oplus} y = 1$ si et seulement si $x = y$**

Montrez, à l'aide d'une table de vérité que $x \overline{\oplus} y = \overline{x \oplus y}$

Q18 – Si je trouve un ensemble d'opérateurs **$\{O_1, O_2, \ldots O_n\}$** de sorte que toute fonction logique peut être exprimée à base des opérateurs de cet ensemble. Comment qualifierez-vous cet ensemble.

Q19 – La loi de ***De Morgan*** stipule que la négation d'une somme logique est égale au produit des négations et la négation d'un produit logique est égale à la somme des négations.

- Appliquez cette loi sur 2 variables x_2 et x_1.
- Appliquez cette loi sur 3 variables x_3, x_2 et x_1.
- Appliquez cette loi sur ***n*** variables $x_n, \ldots x_2, x_1$.
- En vous servant d'une table de vérité, démontrer cette loi pour 2 variables x_2 et x_1.

Q20 – Montrer que les ensembles des opérateurs {ET, NON} et {OU, NON} constituent des systèmes logiques complets.

Q21 – Soit $f(x, y, z) = x.y + y.\bar{z}$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NAND : $x \uparrow y = \overline{x.y}$
- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NOR : $x \downarrow y = \overline{x + y}$

Q22 – Donnez la table de vérité des fonctions :

$$f_1(x, y, z) = x.y + x.\bar{y} + y.z$$

$$f_2(x, y, z) = \overline{x \,.\, (\bar{y} + z)}$$

<u>Indication</u> : Vous devez d'abord exprimer ***f(x,y,z)*** sous sa forme canonique disjonctive, puis vous déduisez sa table de vérité.

Q23 – Donnez le logigramme des fonctions suivantes :

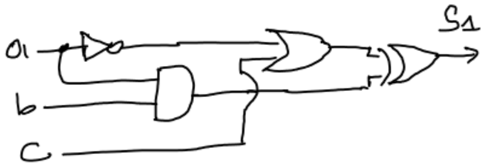
$$f_1 = (x + \bar{y}) \uparrow (x \oplus z)$$

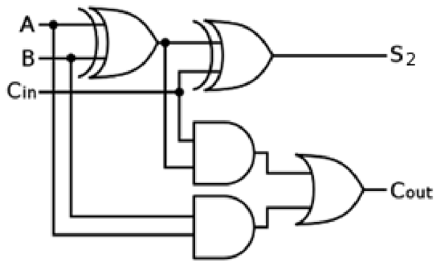
$$f_2 = (x + \bar{y}) \downarrow (x \overline{\oplus} z)$$

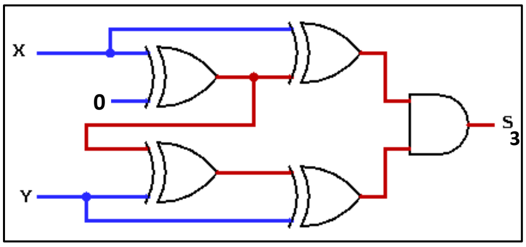
Séance de TD6 (Semaine du 14 au 20 mai 2016)

Les étudiants doivent montrer le QCM2. Une correction de ce QCM sera publiée en ligne.

Q26 – Donnez les équations de sorite des circuits ci-dessous







Q27 – Donnez la table de vérité de la fonction ***F*** suivante : ***F(x,y,z,t)*** = **Σ(0,1,4,8,13,15)**

Q28 – Indiquez par une croix toutes les cases adjacentes de la case de couleur foncée

t ↓ / yz→	00	01	11	10
0				
1				

tu ↓ / yz→	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

	x							
	0				1			
tu ↓ / yz→	00	01	11	10	10	11	01	00
00								
01								
11								
10								

	x							
	0				1			
tu ↓ / yz→	00	01	11	10	10	11	01	00
00								
01								
11								
10								

Q29 – Soit la fonction *F* suivante :

A - Donnez la forme canonique disjonctive de *F*

B – En utilisant la méthode algébrique donnez une forme simplifiée de ***F*** à base des opérateurs **ET**, **OU** et **NON**

D – Utilisez la table de Karnaugh pour vérifier vos résultats (celui obtenu en question B)

E – Dessinez le logigramme de ***F***

F – Indiquez combien de formes simplifiées vous pouvez avoir

m_i	*x*	*y*	*z*	*t*	*F(x,y,z,t)*
m_0	0	0	0	0	0
m_1	0	0	0	1	0
m_2	0	0	1	0	1
m_3	0	0	1	1	1
m_4	0	1	0	0	1
m_5	0	1	0	1	1
m_6	0	1	1	0	0
m_7	0	1	1	1	0
m_8	1	0	0	0	0
m_9	1	0	0	1	0
m_{10}	1	0	1	0	1
m_{11}	1	0	1	1	0
m_{12}	1	1	0	0	1
m_{13}	1	1	0	1	0
m_{14}	1	1	1	0	1
m_{15}	1	1	1	1	1