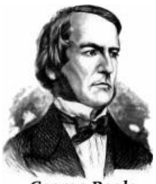
Chapitre 2 - Algèbre de Boole et Circuits Logiques
Corrigé Série TD2


George Boole

Séance de TD4 (Semaine du 30 avril au 6 mai 2017)

Lors de cette séance, les chargés de TD doivent remettre aux étudiants le QCM2 à rendre dans 2 semaines.

Q1 – Voici les axiomes de l'algèbre de Boole

- ☐ Idempotence
- ✓ **Commutativité**
- ✓ **Associativité**
- ✓ **Eléments neutre**
- ☐ Eléments symétrique
- ✓ **Complémentarité**
- ☐ Absorption
- ☐ DeMorgan
- ☐ Inhibition
- ✓ **Double distributivité**

Attention !

l'idempotence n'est pas un axiome !
Voici sa demonstration:

$x = x + 0 \leftarrow$ element neutre
$= x + (x \cdot \bar{x}) \leftarrow$ complémentarité
$= (x + x) \cdot (x + \bar{x}) \leftarrow$ distributivité
$= (x + x) \cdot 1 \leftarrow$ complémentarité
$= x + x \leftarrow$ element neutre

Remarque : l'absorption, l'inhibition et DeMorgan constituent des théorèmes. « Elément symétrique » n'est pas du tout une propriété de l'algèbre de Boole !

Q2 – L'ensemble des parties d'un ensemble ***E*** muni des lois ***Union*** et ***intersection*** et de l'application involutive « ***complémentaire par rapport à E*** » est une algèbre de Boole.

✓ **Vrai** ☐ Faux

Commentaire : Effectivement, vous pouvez facilement vérifier les axiomes et les théorèmes de l'algèbre de Boole dans un tel ensemble avec ces 3 lois.

Q3 – Complétez les 2 tableaux ci-dessous :

Loi "+"	Nom de la propriété
x + x = x	**Idempotence**
x + y = y + x	**Commutativité**
x+y+z = x+(y+z) = (x + y)+z	**Associativité**
x + 0 = x	**Elément neutre**
x + (y . z) = (x + y) . (x + z)	**Distributivité de la loi « + » par rapport à la loi « . »**
$\bar{x} + x = 1$	**Complémentarité**

Loi "."	Nom de la propriété
x . x = x	**Idempotence**
x . y = y . x	**Commutativité**
x.y.z = x . (y . z) = (x . y) . z	**Associativité**
x . 1 = x	**Elément neutre**
x . (y + z) = (x . y) + (x . z)	**Distributivité de la loi « . » par rapport à la loi « + »**
$\bar{x}.x = 0$	**Complémentarité**

Q4 – Le principe de dualité stipule qu'on peut déduire à partir de toute formule une nouvelle formule juste en remplaçant les opérateurs « + » par « . » et « 1 » par « 0 ».

☐ Vrai ☐ Faux ✓ **Définition incomplète**

Commentaire **:** En réalité le principe de dualité stipule qu'on peut déduire à partir de toute formule une nouvelle formule juste en remplaçant les opérateurs « + » par « . » et **inversement** et les éléments « 1 » par « 0 » et **inversement**.

Q5 – Indiquez à quoi correspondent les formules suivantes ?

$$\overline{x + y} = \bar{x}.\bar{y} \qquad \overline{x.y} = \bar{x} + \bar{y}$$

Il s'agit du théorème de DeMorgan qui stipule que :

☞ **La négation d'une somme logique est le produit des négations.**

☞ **La négation d'un produit logique est la somme des négations.**

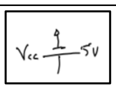
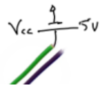
Q6 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 1 » correspond à :

- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ☐ Un niveau de tension de 0V
- ✓ **Un niveau de tension voisine de 5V**
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ✓ **Une lampe allumée**
- ☐ Une lampe éteinte
- ✓ **Un interrupteur mis sur ON**
- ☐ Un interrupteur mis sur OFF

Q7 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 0 » correspond à :

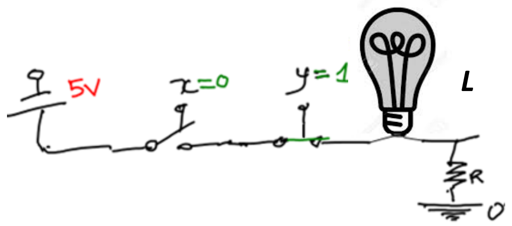
- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ✓ **Un niveau de tension de 0V**
- ☐ Un niveau de tension voisine de 5V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ☐ Une lampe allumée
- ✓ **Une lampe éteinte**
- ☐ Un interrupteur mis sur ON
- ✓ **Un interrupteur mis sur OFF**

Q8 – Complétez le tableau ci-dessous :

Etat électrique	**Etat logique**	**Etat électrique**	**Etat logique**
	**1**		**1**
	**1**		**0**
	**0**		**1**
	**0**		**0**

Q9 – En supposant que l'on représente deux variables booléennes « ***x*** » et « ***y*** » par 2 interrupteurs et une fonction « ***L*** » par une lampe.

A ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.

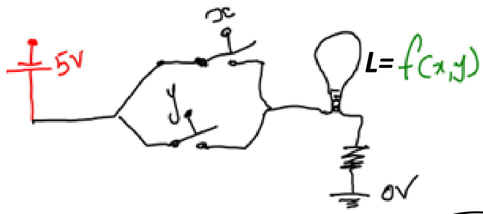


x	y	L=f(x,y)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Situation
x=0, y=1 et
L=0

Commentaire **: La fonction implémentée dans le schéma électrique est un « ET » logique. La situation indiquée sur la figure correspond à la seconde ligne de notre table de vérité.**

B ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.

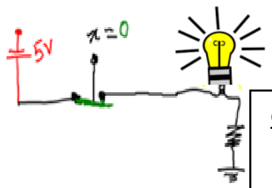


x	y	L=f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Situation
x=0, y=0 et
L=0

Commentaire **: La fonction implémentée dans le schéma électrique est un « OU » logique. La situation indiquée sur la figure correspond à la première ligne de notre table de vérité.**

Q10 – – Le schéma électrique suivant



$f(x) = \overline{x}$

Correspond à :

- ✓ **La négation**
- ☐ Le OU
- ☐ Le ET
- ☐ Le OU exclusif
- ☐ Le NON OU exclusif
- ☐ L'équivalence

Commentaire :
Lorsque x=0, c'est à dire que x n'est pas actionné, le courant passe donc la lampe s'allume, ce qui fait : L=1.

Lorsque x=1, c'est à dire que x est actionné, le courant ne passe pas donc la lampe s'allume, ce qui fait : L=0.

Q11 – Si vous avez ***n*** variables, combiens de lignes (hors mis la première ligne d'entête) allez-vous avoir dans la table de vérité représentant la fonction ***F = f(x_{n-1}, x_{n-2}, …, x_1, x_0)*** :

Nous avons montré dans le premier chapitre qu'en ayant « *n* » case binaire, vous pouvez générer 2^n configurations possibles. Dans le cas des variables d'une fonction, c'est la même chose : vous avez « *n* » variables et chaque variable est binaire, donc c'est comme si vous avez *n* case binaires. Donc, le nombre de situations que vous pouvez avoir à partir de *n* variables est donc 2^n situations. Chacune de ces situations est représentée par une ligne de la table de vérité de la fonction. Donc le nombre de lignes (hors mis la première qui correspond à l'entête de la table) est de 2^n.

Q12 – Indiquez les lois (axiomes et théorèmes) utilisés dans les démonstrations ci-dessous :

Transformation algébrique	Lois utilisées
$\overline{A}\,.\,B + A\,.B = B.\overline{A} + B.A$	**Commutativité de « . »**
$B.\overline{A} + B.A = B.(\overline{A} + A)$	**Distributivité de « . » par rapport à « + »**
$B.(\overline{A} + A) = B.1$	**Complémentarité de « + »**
$B.1 = B$	**Elément neutre de « . »**

Transformation algébrique	Lois utilisées
$(A \oplus B)\,.B + A.B =$ $(\overline{A}.B + A.\overline{B})\,.B + A.B$	Définition du $\oplus$ (ou exclusif)
= $B.(B.\overline{A} + \overline{B}.A) + A.B$	Commutativité de « . »
= $B.(B.\overline{A}) + B.(\overline{B}.A) + A.B$	Distributivité de « . » par rapport à « + »
= $(B.B).\overline{A} + (B.\overline{B}).A + A.B$	Associativité de « . »
= $B.\overline{A} + (B.\overline{B}).A + A.B$	Idempotence de « . »
= $B.\overline{A} + 0.A + A.B$	Complémentarité
= $B.\overline{A} + 0 + A.B$	Absorption
= $B.\overline{A} + A.B$	Elément neutre de « + »
= $B.(\overline{A} + A)$	Distributivité de « . » par rapport à « + »
= $B.1$	Complémentarité
= B	Elément neutre de « . »

Transformation algébrique	Lois utilisées
$x + (\overline{x}.y) = (x + \overline{x}).(x + y)$	Distributivité de « + » par rapport à « . »
$= 1.(x + y)$	Complémentarité de « + »
$= x + y$	Elément neutre de « . »

Q13 – Soit la table de vérité suivante

x_1	X_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Indiquez les fonctions correspondent aux colonnes suivantes:

Colonne	Fonction	
f_0	Fonction constante	$f(x_1, x_0) = 0$
f_1	ET logique	$f(x_1, x_0) = x_1.x_0$
f_6	OU exclusif (XOR) :	$f(x_1, x_0) = x_1 \oplus x_0$
f_7	OU logique	$f(x_1, x_0) = x_1 + x_0$
f_8	NON OU (NOR) :	$f(x_1, x_0) = x_1 \downarrow x_0 = \overline{x_1 + x_0}$
f_9	NON OU exclusif (NXOR)	$f(x_1, x_0) = \overline{x_1 \oplus x_0}$ $= x_1 \overline{\oplus} x_0$
f_{14}	NON ET (NAND) :	$f(x_1, x_0) = x_1 \uparrow x_0 = \overline{x_1.x_0}$

Q14 – Démontrer la propriété suivante :

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ fois}} = x$$

Indication :
Procédez par récurrence !
Et utilisez la propriété d'idempotence

Réponse :
Pour *n* = 2 fois :

$$\begin{aligned} x &= x.1 \\ &= x.(x + \bar{x}) \\ &= (x.x) + (x.\bar{x}) \\ &= (x.x) + 0 \\ &= x.x \end{aligned}$$

Donc notre propriété est vrai pour n=2 : « x+x=x »

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{\boldsymbol{n\text{-}1} \textbf{ fois}} = x$$

Démontrons qu'elle reste vraie pour n fois :

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{\boldsymbol{n} \textbf{ fois}} = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{\boldsymbol{n\text{-}1} \textbf{ fois}} + x$$

Remplaçons *(x+x + … x) n-1* fois par x :

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{\boldsymbol{n} \textbf{ fois}} = x + x$$

or x+x=x donc

$$\boxed{\underbrace{x + x + \ldots + x}_{\boldsymbol{n} \textbf{ fois}} = x}$$

Q15 – Démontrer la propriété : « $x \,.\, x \,.\, \bar{x} = 0$ ».
(Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Transformation algébrique	**Propriété utilisée**
$\boldsymbol{x \,.\, x \,.\, \bar{x} = (x.\ x) \,.\, \bar{x}}$	**Associativité**
$\boldsymbol{= x.\bar{x}}$	**Idempotence**
$\boldsymbol{= 0}$	**Complémentarité**
Ce qui donne : $\boldsymbol{x \,.\, x \,.\, \bar{x} = 0}$	

Q16 – Démontrer la propriété : « $x \,.\, 0 = 0$ ».
(Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Transformation algébrique	**Propriété utilisée**
$x \,.\, 0 = x \,.\, (x.\bar{x})$	**Complémentarité**
$= (x \,.\, x).\bar{x}$	**Associativité**
$= x.\bar{x}$	**Idempotence**
$= 0$	**Complémentarité**
Ce qui donne : $\boldsymbol{x \,.\, 0 = 0}$	

Q17 – Soient ***x*** et ***y*** deux variables booléennes
(*x, y*) ∈ V² où V = {0,1}

☞ On définit l'opérateur « **⊕** » de la manière suivante : ***x⊕y = 1* si et seulement si *x≠y***
Montrez, à l'aide d'une table de vérité que
$\boldsymbol{x \oplus y = \bar{x}.y + x.\bar{y}}$

Égalité

Réponse :

x	y	$\boldsymbol{\bar{x}}$	$\boldsymbol{\bar{y}}$	$\boldsymbol{\bar{x}.y}$	$\boldsymbol{x.\bar{y}}$	$\boldsymbol{\bar{x}.y + x.\bar{y}}$	$\boldsymbol{x \oplus y}$
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0

☞ On définit l'opérateur $\overline{\oplus}$ de la manière suivante : ***x*$\overline{\oplus}$*y = 1* si et seulement si *x=y***
Montrez, à l'aide d'une table de vérité que
$\boldsymbol{x \,\overline{\oplus}\, y = \overline{x \oplus y}}$

Égalité

Réponse :

x	y	$\boldsymbol{\bar{x}}$	$\boldsymbol{\bar{y}}$	$\boldsymbol{x \oplus y}$	$\boldsymbol{\overline{x \oplus y}}$	$\boldsymbol{x \,\overline{\oplus}\, y}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1

Valeurs trouvées par définition :
x*$\overline{\oplus}$*y = 1* si et seulement si *x=y

Q18 – Si je trouve un ensemble d'opérateurs **{*O₁, O₂, … Oₙ*}** de sorte que toute fonction logique peut être exprimée à base des opérateurs de cet ensemble. Comment qualifierez-vous cet ensemble.

<u>Réponse</u> : **Il s'agit d'un système logique complet (SLC). Le groupe {ET, OU et NON} est un SLC. On pourra montrer que NAND à lui seul constitue un SLC. NOR aussi est un SLC. Idem pour les groupes {ET, NON} et {OU, NON}**

Q19 – La loi de ***De Morgan*** stipule que la négation d'une somme logique est égale au produit des négations et la négation d'un produit logique est égale à la somme des négations.

- Appliquez cette loi sur 2 variables $\boldsymbol{x_2}$ et $\boldsymbol{x_1}$.

$$\overline{x_2.x_1} = \overline{x_2} + \overline{x_1}$$
$$\overline{x_2 + x_1} = \overline{x_2}.\overline{x_1}$$

- Appliquez cette loi sur 3 variables $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_2}$ et $\boldsymbol{x_1}$.

$$\overline{x_3.x_2.x_1} = \overline{x_3} + \overline{x_2} + \overline{x_1}$$
$$\overline{x_3 + x_2 + x_1} = \overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}$$

- Appliquez cette loi sur ***n*** variables $\boldsymbol{x_n}$, …, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_1}$.

$$\overline{x_{n-1}...x_2.x_1} = \overline{x_n} + \overline{x_2} + \overline{x_1}$$
$$\overline{x_{n-1}+...x_2 + x_1} = \overline{x_n}.\overline{x_2}....\overline{x_1}$$

- En vous servant d'une table de vérité, démontrer cette loi pour 2 variables $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$.

x2	x2	$x_2.x_1$	$\overline{x_2.x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2} + \overline{x_1}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Egalité

Q20 – Montrer que les ensembles des opérateurs {ET, NON} et {OU, NON} constituent des systèmes logiques complets (SLC).

Réponse : Un groupe d'opérateurs constitue un SLC si les 3 opérateurs de base peuvent être exprimés à base de ce groupe d'opérateurs. Dans le groupe {ET, NON}, nous avons déjà le « ET » et le « NON ». Il faut donc pouvoir exprimé le « OU » à base de ce groupe pour le considérer comme un SLC !

$$\boldsymbol{x + y = \overline{x + y}}$$
$$\boldsymbol{x + y = \bar{x}.\bar{y}}$$

On voit donc que le « OU » est bel et bien exprimé à base du « ET » et du « NON » !
On dédié donc que le groupe {ET, NON} est un SLC.

On peut démontrer de la même façon que {OU, NON} est un SLC.

Q21 – Soit $\boldsymbol{f(x,y,z) = x.y + y.\bar{z}}$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NAND : $\boldsymbol{x \uparrow y = \overline{x.y}}$

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = x.y + y.\bar{z}}$$
$$\boldsymbol{= \overline{\overline{x.y + y.\bar{\bar{z}}}} = \overline{\overline{x.y}.\overline{y.\overline{z.z}}}}$$
$$\boldsymbol{= (x \uparrow y) \uparrow \big(y \uparrow (z \uparrow z)\big)}$$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NOR : $\boldsymbol{x \downarrow y = \overline{x + y}}$

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = x.y + y.\bar{z}}$$
$$\boldsymbol{= y.(x + \bar{z}) = \overline{\overline{y.(x + \bar{z})}}}$$
$$\boldsymbol{= \overline{\overline{y + y} + \overline{(x + \overline{z + z})}}}$$
$$\boldsymbol{= (y \downarrow y) \downarrow \big(x \downarrow (z \downarrow z)\big)}$$

Q22 – Donnez la table de vérité des fonctions :

$$\boldsymbol{f_1(x,y,z) = x.y + x.\bar{y} + y.z}$$

$$\boldsymbol{f_2(x,y,z) = \overline{x.(\bar{y} + z)}}$$

<u>Indication</u> : Vous devez d'abord exprimer ***f(x,y,z)*** sous sa forme canonique disjonctive, puis vous déduisez sa table de vérité.

$$\boldsymbol{f_1(x,y,z) = x.y.(z + \bar{z}) + x.\bar{y}.(z + \bar{z}) + (x + \bar{x}).y.z}$$

$$\boldsymbol{f_1(x,y,z) = x.y.z + x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + x.y.z + \bar{x}.y.z}$$

$$\boldsymbol{f_1(x,y,z) = m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_7 + m_3}$$

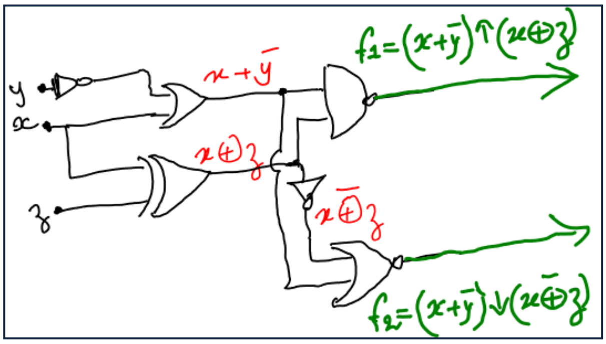
$$\boldsymbol{f_1(x,y,z) = m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7}$$

Ce qui me donne la table de vérité suivante :

mintermes	x, y, z	$f_1(x,y,z)$
m_0	000	0
m_1	001	0
m_2	010	0
m_3	011	1
m_4	100	1
m_5	101	1
m_6	110	1
m_7	111	1

Q23 – Donnez le logigramme des fonctions suivantes :

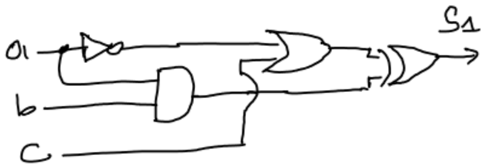
$$f_1 = (x+\overline{y}) \uparrow (x \oplus z)$$
$$f_2 = (x+\overline{y}) \downarrow (x \overline{\oplus} z)$$

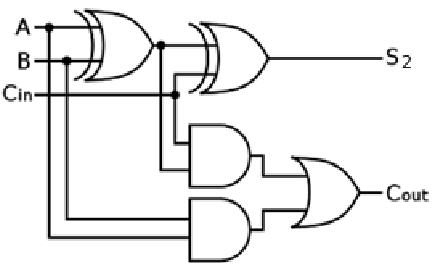


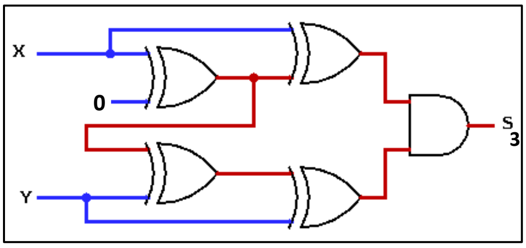
Séance de TD6 (Semaine du 14 au 20 mai 2016)

Les étudiants doivent montrer le QCM2. Une correction de ce QCM sera publiée en ligne.

Q26 – Donnez les équations de sorite des circuits ci-dessous







$S_1 = (\overline{a} + c) \oplus (a \cdot b)$

$S_2 = (A \oplus B) \oplus Cin$

$Cout = (A \oplus B).Cin + A.B$

$S_3 = (x \oplus (x \oplus 0)) \cdot ([(x \oplus 0) \oplus y] \oplus y)$

Q27 – Donnez la table de vérité de la fonction ***F*** suivante : ***F(x,y,z,t)*** **= Σ(0,1,4,8,13,15)**

Réponse :

xyzt	*F(x,y,z,t)*
0000	1
0001	1
0010	0
0011	0
0100	1
0101	0
0110	0
0111	0
1000	1
1001	0
1010	0
1011	0
1100	0
1101	1
1110	0
1111	1

Q28 – Indiquez par une croix toutes les cases adjacentes de la case de couleur foncée

yz→ / t ↓	00	01	11	10
0				
1				

yz→ / tu ↓	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

	x							
	0				1			
yz→ / tu ↓	00	01	11	10	10	11	01	00
00								
01								
11								
10								

	x							
	0				1			
yz→ / tu ↓	00	01	11	10	10	11	01	00
00								
01								
11								
10								

Q29 – Soit la fonction *F* suivante :

A - Donnez la forme canonique disjonctive de *F*

B – En utilisant la méthode algébrique donnez une forme simplifiée de *F* à base des opérateurs **ET**, **OU** et **NON**

C – Utilisez la table de Karnaugh pour vérifier vos résultats (celui obtenu en question B)

D – Dessinez le logigramme de *F*

E – Indiquez combien de formes simplifiées vous pouvez avoir

m_i	x	y	z	t	F(x,y,z,t)
m_0	0	0	0	0	0
m_1	0	0	0	1	0
m_2	0	0	1	0	1
m_3	0	0	1	1	1
m_4	0	1	0	0	1
m_5	0	1	0	1	1
m_6	0	1	1	0	0
m_7	0	1	1	1	0
m_8	1	0	0	0	0
m_9	1	0	0	1	0
m_{10}	1	0	1	0	1
m_{11}	1	0	1	1	0
m_{12}	1	1	0	0	1
m_{13}	1	1	0	1	0
m_{14}	1	1	1	0	1
m_{15}	1	1	1	1	1

Réponse :

A - La forme canonique disjonctive de *F* :

F = Σ(2,3,4,5,10,12,14,15)

B – Simplification algébrique de *F* :

F = Σ(2,3,4,5,10,12,14,15)

$$F(x,y,z,t) = m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_{10} + m_{12} + m_{14} + m_{15}$$

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z.\bar{t} + \bar{x}.\bar{y}.z.t + \bar{x}.y.\bar{z}.\bar{t} + \bar{x}.y.\bar{z}.t + x.\bar{y}.z.\bar{t} + x.y.\bar{z}.\bar{t} + x.y.z.\bar{t} + x.y.z.t$$

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z.(\bar{t}+t) + \bar{x}.y.\bar{z}.(\bar{t}+t) + x.\bar{y}.z.\bar{t} + x.y.\bar{z}.\bar{t} + x.y.z.\bar{t} + x.y.z.t$$

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z.1 + \bar{x}.y.\bar{z}.1 + x.\bar{y}.z.\bar{t} + x.y.\bar{z}.\bar{t} + x.y.z.\bar{t} + x.y.z.t$$

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z.\bar{t} + x.y.\bar{z}.\bar{t} + x.y.z.\bar{t} + x.y.z.\bar{t} + x.y.z.\bar{t} + x.y.z.t$$

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + (x.\bar{y}.z.\bar{t} + x.y.z.\bar{t}) + (x.y.\bar{z}.\bar{t} + x.y.z.\bar{t}) + (x.y.z.\bar{t} + x.y.z.t)$$

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.z.\bar{t}.(\bar{y}+y) + x.y.\bar{t}.(\bar{z}+z) + x.y.z.(\bar{t}+t)$$

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.z.\bar{t}.1 + x.y.\bar{t}.1 + x.y.z.1$$

$$\boxed{F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.z.\bar{t} + x.y.\bar{t} + x.y.z}$$

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + x.z.\bar{t} + y.(\bar{x}.\bar{z} + x.\bar{t} + x.z)$$

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + x.z.\bar{t} + y.(\bar{x}.\bar{z} + x.(\bar{t}+z))$$

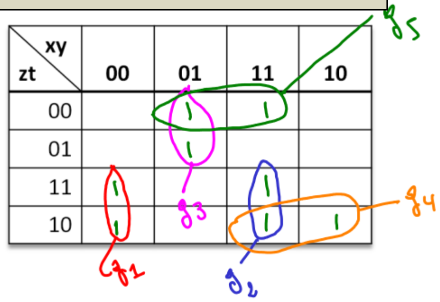
$$\boxed{F(x,y,z,t) = (\bar{x}.\bar{y} + x.\bar{t}).z + y.(\bar{x}.\bar{z} + x.(\bar{t}+z))}$$

Bilan de la formule obtenue pour notre fonction F :

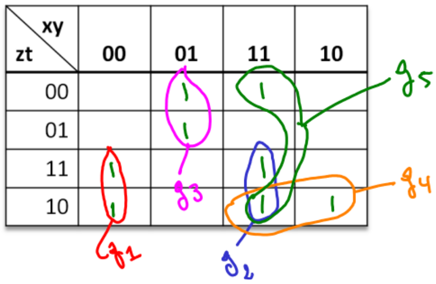
Portes logiques (2 entrées)	Nombre de portes utilisées
ET	6
OU	4
NON	6

C – Table de Karnaugh

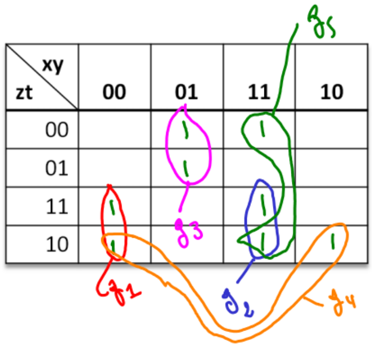
Possibilité 1



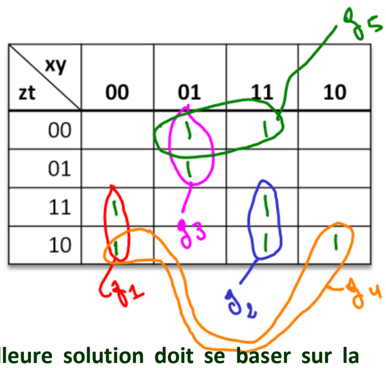
Possibilité 2



Possibilité 3



Possibilité 4



Le choix de la meilleure solution doit se baser sur la minimisation des opérateurs. Comme vous le voyez, nous avons 4 solutions possibles. Lesquelles sont les meilleures ?

Il faut privilégier les groupes ayant un minimum de négations. Ainsi :

- pour le groupe « g4 », il est préférable de choisir les possibilités 2 et 3.
- pour le groupe « g5 », il est préférable de choisir les possibilités 2 et 3.

Possibilité	Groupe « g4 »	Groupe « g5 »	Nombre de négations
1	$x.z.\bar{t}$	$y.\bar{z}.\bar{t}$	3
2	$x.z.\bar{t}$	$x.y.\bar{t}$	2
3	$\bar{y}.z.\bar{t}$	$x.y.\bar{t}$	3
4	$\bar{y}.z.\bar{t}$	$y.\bar{z}.\bar{t}$	4

D'après le tableau ci-dessus, on voit bien que la solution 2 nous donne le minimum de négations, c'est donc la meilleure solution !

En définitif, on va donc retenir la formule suivant pour

F = Σ(2,3,4,5,10,12,14,15)

Groupes	Groupe « g4 »
g1	$\bar{x}.\bar{y}.z$
g2	$x.y.z$
g3	$\bar{x}.y.\bar{z}$
g4	$x.z.\bar{t}$
g5	$x.y.\bar{t}$

Ce qui nous donne :

$$\boxed{F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.y.\bar{t} + x.z.\bar{t} + x.y.z}$$

On peut considérer ici que nous avons fini avec la méthode de Karnaugh.

Bilan de la formule obtenue pour notre fonction F :

Portes logiques (2 entrées)	Nombre de portes utilisées
ET	10
OU	4
NON	6

__Remarque__ : La méthode de Karnaugh permet, certes, de simplifier grandement les expressions des fonctions logiques, mais quelques fois, ce n'est pas suffisant. En effet, on peut encore simplifier par factorisation par exemple ou identification d'opérateurs comme le XOR, le NAD, le NOR ou le NXOR.

Voici quelques optimisations supplémentaires :

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.y.\bar{t} + x.z.\bar{t} + x.y.z$$
$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + x.z.\bar{t} + \bar{x}.y.\bar{z} + x.y.\bar{t} + x.y.z$$
$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + x.z.\bar{t} + y.(\bar{x}.\bar{z} + x.\bar{t} + x.z)$$
$$F(x,y,z,t) = \bar{x}.\bar{y}.z + x.z.\bar{t} + y.(\bar{x}.\bar{z} + x.(\bar{t} + z))$$

$$\boxed{F(x,y,z,t) = (\bar{x}.\bar{y} + x.\bar{t}).z + y.(\bar{x}.\bar{z} + x.(\bar{t} + z))}$$

Bilan de la formule obtenue pour notre fonction F :

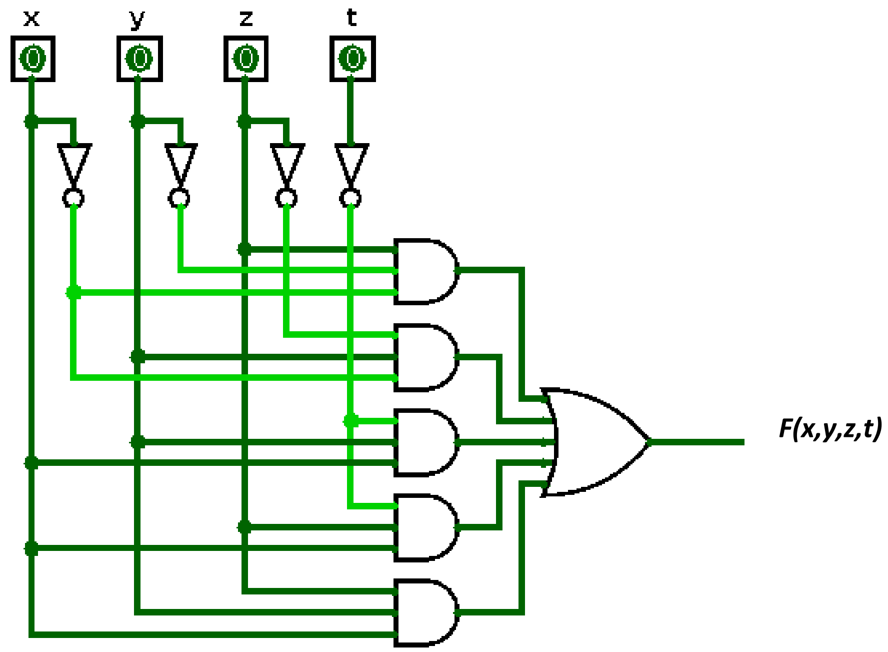
Portes logiques (2 entrées)	Nombre de portes utilisées
ET	6
OU	4
NON	6

D – Logigramme

Voici la formule obtenue avec la méthode de Karnaugh :

$$F(x,y,z,t) = \overline{x}.\overline{y}.z + \overline{x}.y.\overline{z} + x.y.\overline{t} + x.z.\overline{t} + x.y.z$$

Voici son logigramme (en utilisant des portes ET à 3 entrées et une porte OU à 5 entrées)



D – Nombre de formes simplifiées que nous donne la méthode de Karnaugh

<u>Réponse</u> : 4 formes possibles (voir les 4 possibilités de la réponse C)