Cours de Structure machine (1ère année MI) - Série de TD N°2

Exo1 - Déduire, en utilisant le principe de dualité, une formule à partir de la suivante : $\overline{(x+y)(x+\bar{x})} = x+y$

Réponse : $\overline{(x.y)+(x.\bar{x})} = x.y$

Exo2 - Démontrer, en utilisant la table de vérité, le théorème de Morgan appliqué à une fonction à 3 variables

Réponse : Voici les équations à démontrer $\overline{(x+y+z)} = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$

Pour ce faire, vous avez deux méthodes : la méthode algébrique qui nécessite la connexion du théorème de Shannon et la méthode par les tables de vérité qui consiste à montrer que l'expression de gauche et l'expression de droite correspondent à des colonnes identiques.

m_i	x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$	$\overline{(x+y+z)}$	$x+y+z$
m_0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
m_1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
m_2	0	1	0	1	0	1	0	0	1
m_3	0	1	1	1	0	0	0	0	1
m_4	1	0	0	0	1	1	0	0	1
m_5	1	0	1	0	1	0	0	0	1
m_6	1	1	0	0	0	1	0	0	1
m_7	1	1	1	0	0	0	0	0	1

Egalité parfaite des 2 colonnes!

La loi de Morgan comporte une seconde formule que voici : $\overline{(x.y.z)} = \bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$, elle peut être déduite directement de la première loi $\overline{(x+y+z)} = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$ par dualité.

Exo3 - Trouver l'équation de la fonction définie par la table de vérité suivante : $F(x,y,z)=\sum_{i=0}^{7} v_i m_i$ avec m_i : les mintermes et v_i les valeurs de vérité de F correspondant à chaque terme m_i.

m_i	x	y	z	F(x,y,z)
m_0	0	0	0	1
m_1	0	0	1	0
m_2	0	1	0	1
m_3	0	1	1	1
m_4	1	0	0	1
m_5	1	0	1	0
m_6	1	1	0	1
m_7	1	1	1	0

$F(x,y,z)=\sum_{i=0}^{7} v_i m_i$

Ce qui donne :

$F(x,y,z)=v_0m_0+v_1m_1+v_2m_2+v_3m_3+v_4m_4+v_5m_5+v_6m_6+v_7m_7$
$F(x,y,z)=1.m_0+0.m_1+1.m_2+1.m_3+1.m_4+0.m_5+1.m_6+0.m_7$
$F(x,y,z)=m_0+m_2+m_3+m_4+m_6$

$$m_0=\bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \quad m_2=\bar{x}.y.\bar{z} \quad m_3=\bar{x}.y.z \quad m_4=x.\bar{y}.\bar{z} \quad m_6=x.y.\bar{z}$$

$$\boldsymbol{F(x,y,z)=\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}+\bar{x}.y.\bar{z}+\bar{x}.y.z+x.\bar{y}.\bar{z}+x.y.\bar{z}}$$

Exo4 - Donner la table de vérité des fonctions suivantes : $F_1(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + x.y$ et $F_2(x,y) = \bar{y} + x.y$

$F_1(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + x.y = \bar{x}.\bar{y}.z + x.y(z.\bar{z})$
$F_1(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + x.y.z + x.y.\bar{z}$
$F_1(x,y,z) = m_1 + m_7 + m_6$

m_i	x	y	z	$F_1(x,y,z)$
m_0	0	0	0	0
m_1	0	0	1	1
m_2	0	1	0	0
m_3	0	1	1	0
m_4	1	0	0	0
m_5	1	0	1	0
m_6	1	1	0	1
m_7	1	1	1	1

$F_2(x,y) = \bar{y} + x.y = (x + \bar{x}).\bar{y} + x.y$
$F_2(x,y) = .x.\bar{y} + \bar{x}.\bar{y} + x.y$
$F_2(x,y) = m_2 + m_0 + m_3$
$F_2(x,y) = m_0 + m_2 + m_3$

m_i	x	y	$F_2(x,y)$
m_0	0	0	1
m_1	0	1	0
m_2	1	0	1
m_3	1	1	1

Exo5 - Dire si les fonctions suivantes sont dans leur forme canonique :

$F_1(x, y) = \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y$ *Réponse : OUI*

$F_2(x,y,z) = \bar{y} + x$ *Réponse : NON*

Exo6 - Montrer que l'opérateur NAND constitue un système logique complet minimisé.

Un opérateur ou un groupe d'opérateurs constitue un système logique complet « SLC » dès qu'il devient possible d'exprimer les trois opérateurs de base à l'aide de ce groupe.

L'opérateur NAND est le NON ET, il est défini comme suit : $x \uparrow y = \overline{x.y}$

On doit donc vérifier si l »opérateur ET, OU et NON peuvent être exprimé à base du NAND.

1 – Vérifions pour le NON : $\bar{x} = \overline{x.x} = x \uparrow x$
2 – Vérifions pour le OU : $x + y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{\bar{x}.\bar{y}} = \overline{(x \uparrow x).(y \uparrow y)} = \big((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)\big)$
3 – Vérifions pour le OU : $x.y = \overline{\overline{x.y}} = \overline{(x \uparrow y)} = \overline{(x \uparrow y).(x \uparrow y)} = ((x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y))$

En plus d'être un système logique complet, l'opérateur NAND constitue un système minimalisé car il n'est composé que d'un seul opérateur

Exo7 - Déterminer le complément de l'expression : $A + \overline{AB}C$

$$\left(\overline{A + \overline{AB}C}\right) = \left(\bar{A}.\left(\overline{\overline{AB}C}\right)\right) = \left(\bar{A}.\left(\overline{\overline{AB}} + \bar{C}\right)\right) = \left(\bar{A}.(A.B + \bar{C})\right) = \left(\bar{A}.A.B + (\bar{A}.\bar{C})\right) = \bar{A}.\bar{C}$$

Exo8 - Simplifier au maximum les expressions logiques suivantes :

(a): $\bar{x}y + xy + x\bar{y}$
(b): $(x + y)(x + \bar{y})(\bar{x}.y)$
(c): $x(x + y)$
(d): $\overline{x + xyz} + (x + xyz)t$

(a): $\bar{x}y + xy + x\bar{y} = (\bar{x} + x).y + x\bar{y} = (1).y + x\bar{y} = y + x\bar{y} = y + \bar{y}.x = y + x$
(b): $(x + y)(x + \bar{y})(\bar{x}.y) = (x + y)\big(x.(\bar{x}.y) + \bar{y}.(\bar{x}.y)\big) = (x + y)(x.\bar{x}.y + \bar{y}.\bar{x}.y)$
$= (x + y)(0.y + \bar{y}.y.\bar{x}) = (x + y)(0.y + 0.\bar{x}) = (x + y).(0) = 0$
(c): $x(x + y) = x.x + x.y = x + x.y = (x.1 + x.y) = x.(1 + y) = x.1 = x$
(d): $\overline{x + xyz} + (x + xyz)t$ *Posons* $A = \overline{x + xyz}$
$\overline{x + xyz} + (x + xyz)t = A + \bar{A}t = A + t = \overline{x + xyz} + t = \bar{x}.\overline{xyz} + t$
$= \bar{x}.(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) + t = \bar{x}.\bar{x} + \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.\bar{z} + t = \bar{x}.\bar{x} + \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.\bar{z} + t = \bar{x}.(1 + \bar{y}) + \bar{x}.\bar{z} + t$
$= \bar{x}.(1) + \bar{x}.\bar{z} + t = \bar{x} + \bar{x}.\bar{z} + t = \bar{x}.(1 + \bar{z}) + t = \boldsymbol{\bar{x}} + \boldsymbol{t}$

Exo9 - Soit la fonction $f(x,y,z) = xyz + \bar{x}y$

Exprimer *f(x,y,z)* en ne se servant que de l'opérateur NAND.

Indication : Utilisez le symbole $\uparrow$ pour représenter l'opérateur NAND.

Exemple : $(\overline{x + x}) = (x \uparrow y)$.

$f(x,y,z) = xyz + \bar{x}y = \overline{\overline{xyz + \bar{x}y}} = \left(\overline{(\overline{xyz}).(\overline{\bar{x}y})}\right) = (\overline{xyz}) \uparrow (\overline{\bar{x}y}) = (\overline{x.y} + \bar{z}) \uparrow (\bar{x} \uparrow y)$

$= \left(\overline{\overline{(x \uparrow y) + \bar{z}}}\right) \uparrow \left((x \uparrow x) \uparrow y\right) = \overline{\left((x \uparrow y).z\right)} \uparrow \left((x \uparrow x) \uparrow y\right) = \left(\left((x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)\right) \uparrow z\right) \uparrow \left((x \uparrow x) \uparrow y\right)$

Exo10 - Soit la fonction suivante : $f(x,y,z) = \overline{x.y.z} + yz$

- A – Exprimer cette fonction sous une forme canonique disjonctive
- B – Etablir sa table de vérité
- C – Simplifier la fonction *F* par la méthode de Karnaugh

$f(x,y,z) = \overline{x.y.z} + yz = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + yz = \bar{x}(y+\bar{y}) + \bar{y}(x+\bar{x}) + \bar{z}(x+\bar{x}) + yz(x+\bar{x})$

$= \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} + x\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + xyz + \bar{x}yz = \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} + x\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}$

$= \bar{x}y(z+\bar{z}) + \bar{x}\bar{y}(z+\bar{z}) + x\bar{z}(y+\bar{y}) + \bar{x}\bar{z}(y+\bar{y}) + xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}(z+\bar{z})$

$= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{z}y + x\bar{z}\,\bar{y} + \bar{x}\bar{z}y + \bar{x}\bar{z}\,\bar{y} + xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$

$= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}z$

$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz + x\bar{y}z$

$= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$

$f(x,y,z)=1$

Exo11 - Soit la fonction $f(x,y,z) = \overline{xz + \bar{x}y}$

- A – Donner la forme canonique disjonctive de *f(x,y,z)*
- B – Déduire la forme canonique conjonctive de *f(x,y,z)*

Forme canonique disjonctive : somme de mintermes

$f(x,y,z) = \overline{xz + \bar{x}y} = (\overline{x.z}).(\overline{\bar{x}.y}) = (\bar{x}+\bar{z}).(x+\bar{y}) = (\bar{x}+\bar{z}).x + (\bar{x}+\bar{z}).\bar{y}$

$= (\bar{x}.x + \bar{z}.x) + (\bar{x}.\bar{y} + \bar{z}.\bar{y}) = (0 + \bar{z}.x) + (\bar{x}.\bar{y} + \bar{z}.\bar{y}) = x.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y} + \bar{y}.\bar{z}$

$= x.\bar{z}.(y+\bar{y}) + \bar{x}.\bar{y}.(z+\bar{z}) + \bar{y}.\bar{z}.(x+\bar{x}) = x.\bar{z}.y + x.\bar{z}.\bar{y} + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{y}.\bar{z}.x + \bar{y}.\bar{z}.\bar{x}$

$= x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + x.y.\bar{z}$

$f(x,y,z) = m_0 + m_1 + m_4 + m_6$

Forme canonique conjonctive : Produit de maxtermes

$f(x,y,z) = M_2 + M_3 + M_5 + M_7 = (x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$

Notez bien qu'une erreur existe dans le cours. Je vous recommande de ne pas traiter la forme canonique conjonctive. On se contentera de la forme canonique disjonctive !

Exo12 – Compléter la table de Karnaugh suivante et donner la fonction simplifiée qui en découle

	x							
	0				1			
tu ↓ / yz→	00	01	11	10	10	11	01	00
00		1					1	
01			1				1	
11			1					
10	1							1

G1 G2 G3 G4

$G_1 = \bar{y}z\bar{t}\bar{u}$
$G_2 = \bar{y}\bar{z}t\bar{u}$
$G_3 = \bar{x}yzu$
$G_4 = xyz\bar{t}$

$$f(x,y,z,t,u) = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x,y,z,t,u) = \bar{y}z\bar{t}\bar{u} + \bar{y}\bar{z}t\bar{u} + \bar{x}yzu + xyz\bar{t}}}$$