Département :MI 1ème année Durée : 2h00 09 Juin 2011	**EMD de structure machine**

Nom & Prénom : ....

Groupe :..

/20

CHAPITRE I – LES SYSTÈMES DE NUMÉRATION (sur 8 points)

Q1 – *Représentation des nombres signés* (***1,5 points***) *:* En supposant que le nombre « 10111011 » est en complément à deux sur *8 bits* quelle est sa valeur :

0,5 En décimal : **$(10111011)_{C2}$ = -$(01000101)_2$ = -$(69)_{10}$** ....

0,5 En complément à 1 : **$(1\ 111011)_{C2}$ = -$(01000101)_2$ ⇒ C1(01000101)= $(1\ 0111010)_{C1}$** ....

0,5 En S+VA : **$(10111011)_{C2}$ = -$(01000101)_2$ ⇒** SVA(**01000101**) = (**1 1000101**)$_{SVA}$............................

Q2 – *Calcul avec les entiers signés* (***2 points***) : En se servant d'une représentation sur ***5 bits*** (bit de signe compris), faire la somme [(-15) + (-8)] en utilisant la représentation en complément à deux.

0,5 $(15)_{10}$ = **$(01111\ )_2$** ⇒ $(-15)_{10}$ = ? (**10001**)$_{C2}$

0,5 $(8)_{10}$ = ? (**01000**)$_2$ ⇒ $(-8)_{10}$ = ? (**11000**)$_{C2}$

Faites le calcul ci-dessous :

En décimal		Représentation en C2				
		b4	b3	b2	b1	b0
$(-15)_{10}$		**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
$(-8)_{10}$		**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
=$(-23)_{10}$	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

0,5

0,5

Que déduisez-vous du résultat ? :

Addition de deux nombres négatifs donnant un résultat positif, on déduit qu'il y a débordement de capacité

Q3 – *Conversion* (***1 point***) *: $(100,3)_6$ = (?)$_5$*

Étapes	*Donnez ici uniquement le résultat (la partie décimale sur 2 chiffres)*
$(100)_6$ = (?)$_5$	*$(100)_6$=1x6^2 = 36 = 1.5²+2x5+1 =* ***$(121)_5$*** 0,5
$(0,3)_6$ = (?)$_5$	$(0,3)_6$ =3/6=0,5 = **$(0,22)_5$** 0,5
$(100,3)_6$ = (?)$_5$	***$(121,22)_5$***

Q4 – *Nombres signés* ***(0,5 point) :*** Donnez un inconvénient de la représentation en C1 :

0,5 **Une addition générant une retenue nécessite d'additionner cette retenue au résultat**

Ou Une double représentation du zéro

Q5 – *Conversion* (***1 point***) *: $(200,2)_4$ = (?)$_8$*

Étapes	Donnez ici uniquement le résultat
$(200)_4$ = (?)$_8$	*$(200)_4$ =$(10\ 00\ 00)_2$ = $(100\ 000)_2$ =* ***$(40)_8$*** 0,5
$(0,2)_4$ = (?)$_8$	$(0,2)_4$ = $(0,10)_2$ = $(0,100)_2$ = **$(0,4)_8$** 0,5
$(200,2)_4$ = (?)$_8$	***$(40,4)_8$***

Q7 – <u>Étendue des valeurs</u> (1,5 points) : *Donnez l'intervalle des valeurs que l'on peut représenter sur 5 bits en se servant de la représentation en signe + valeur absolue, en C1 et en C2.*

Représentation	Étendue des valeurs représentées sur 5 bits
Signe + valeur absolue	$[-(2^{n-1}-1), +(2^{n-1}-1)] = [-(2^{5-1}-1), +(2^{5-1}-1)] = [-(2^4-1), +(2^4-1)] =$ **[-15, +15]**
Complément à 1 (C1)	$[-(2^{n-1}-1), +(2^{n-1}-1)] = [-(2^{5-1}-1), +(2^{5-1}-1)] = [-(2^4-1), +(2^4-1)] =$ **[-15, +15]**
Complément à 2 (C2)	$[-(2^{n-1}), +(2^{n-1}-1)] = [-(2^{5-1}), +(2^{5-1}-1)] = [-(2^4), +(2^4-1)] =$ **[-16, +15]**

0,5

0,5

0,5

Q8 – <u>Soustraction binaire</u> (0,5 points) :

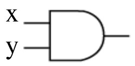
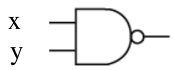
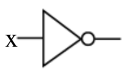
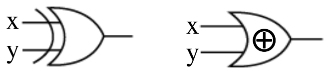
*En binaire pur (sur 5 bits), donnez le résultat de la soustraction suivante **$(13)_{10}$ – $(6)_{10}$***

En décimal	En binaire pur				
13	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
-6	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
		1	**1**		
.= 7	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

0,5

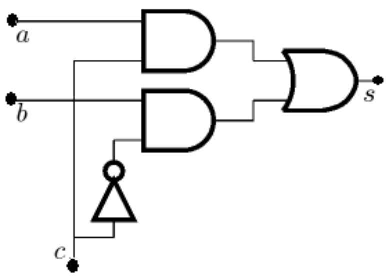
CHAPITRE III – CIRCUITS LOGIQUES COMBINATOIRES (sur 3 points)

Q9 – <u>Analyse de circuits</u> (1 point) : Donnez les équations des fonctions correspondantes aux portes logiques.

Portes logiques	Fonction des portes logiques	Portes logiques	Fonction des portes logiques
	**x.y**		$\overline{x.y}$
	**x+y**		$\overline{x+y}$
	$\overline{x}$		$x.\overline{y}+\overline{x}.y$

(Chaque erreur vaut -0,5 point)

Q10 – <u>Analyse de circuits</u> (1 point) :
Donnez l'équation de la fonction ***s*** représentée par le logigramme suivant :



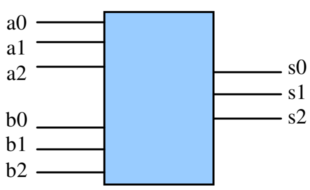
s = f(a, b, c) = $a.c+b.\overline{c}$

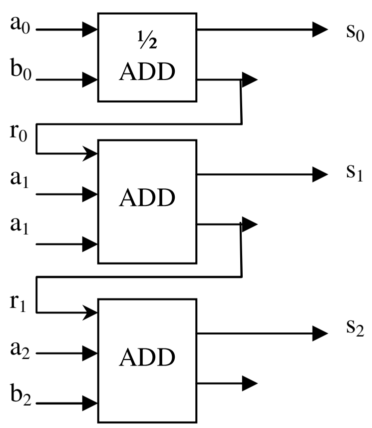
1

1

Q10 – <u>Additionneur 3 bits</u> (1 point) :

A base d'un demi-additionneur et d'additionneurs complets (avec prise en compte de retenue), donnez le schéma logique d'un additionneur 3 bits.





<u>Indication</u> :
Ne représentez pas les détails des additionneurs complets et du demi-additionneur

CHAPITRE II – ALGÈBRE DE BOOLE ET CIRCUITS LOGIQUES (sur 9 points)

Q11 – *<u>Axiomes et théorèmes</u>* ***(2 points) :*** Donnez les axiomes et 3 théorèmes de l'algèbre de Boole

Désignation de l'axiome ou du théorème		Axiomes et théorèmes relatifs à la « + »	Axiomes et théorèmes relatifs à la « + » retrouvé par dualité
Axiomes	Idempotence	**x + x = x**	**x . x = x**
	Commutativité	**x + y = y + x**	**x . y = y . x**
	Associativité	**x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z**	**x . y . z = x . (y . z) = (x . y) . z**
	Elément neutre	**x + 0 = x**	**x . 1 = x**
	Distributivité	**x + (y . z) = (x + y) . (x + z)**	**x . (y + z) = (x . y) + (x . z)**
	Complémentarité	$\overline{x} + x = 1$	$\overline{x}.x = 0$
Théorème	Inhibition	$x + (\overline{x}y) = x + y$	$x.(\overline{x} + y) = x.y$
	Absorption	**x + 1 = 1**	**x . 0 = 0**
		x + (x . y) = x	**x . (x + y) = x**
	Morgan	$\overline{(x+y)} = \overline{x}.\overline{y}$	$\overline{(x.y)} = \overline{x} + \overline{y}$

(***Chaque erreur vaut -0,5 point***)

Q12 – *<u>Mintermes</u>* ***(1 point) :*** Donnez les termes algébriques correspondant aux mintermes suivant sachant que nous avons 4 variable (x3, x2, x1 et x0)

Mintermes	Terme algébrique correspondant
m_0	$\boldsymbol{\overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}}$
m_2	$\boldsymbol{\overline{x_3}.\overline{x_2}.x_1.\overline{x_0}}$
m_4	$\boldsymbol{\overline{x_3}.x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}}$

Mintermes	Terme algébrique correspondant
m_{10}	$\boldsymbol{x_3.\overline{x_2}.x_1.\overline{x_0}}$
m_{12}	$\boldsymbol{x_3.x_2.\overline{x_1}.\overline{x_0}}$
m_{15}	$\boldsymbol{x_3.x_2.x_1.x_0}$

(***Chaque erreur vaut -0,5 point***)

Q13 – *<u>Table de vérité et forme canonique</u>* ***(1 point) :*** Trouver la table de vérité de *F(a,b,c)* = $a.b + \bar{c}$

A – Trouver la forme canonique disjonctive de la fonction *F(a,b,c)* :

$$F(a,b,c) = ab(c+\bar{c}) + \bar{c}$$
$$F(a,b,c) = abc + ab\bar{c} + (a+\bar{a})\bar{c}$$
$$F(a,b,c) = abc + ab\bar{c} + a\bar{c} + \bar{a}\bar{c}$$
$$F(a,b,c) = abc + ab\bar{c} + a\bar{c}(b+\bar{b}) + \bar{a}\bar{c}(b+\bar{b})$$
$$F(a,b,c) = abc + ab\bar{c} + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$
$$F(a,b,c) = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$
$$\boldsymbol{F(a,b,c) = m_7 + m_6 + m_4 + m_2 + m_0}$$

1

B – Donnez la table de vérité de la fonction *F(a,b,c)* :

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1

Q14 – *Opérateur Ou Exclusif* ***(2 points) :*** Démontrez si oui ou non l'opérateur *Ou exclusif* est associatif. Nous rappelons que : $x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y$

$(x \oplus y) \oplus z = ?$	$x \oplus (y \oplus z) = ?$
$(x \oplus y) \oplus z = (x\bar{y} + \bar{x}y) \oplus z$ $(x \oplus y) \oplus z = (x\bar{y} + \bar{x}y)\bar{z} + \overline{(x\bar{y} + \bar{x}y)}z$ $(x \oplus y) \oplus z = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + (\bar{x}\bar{y}.xy)\ z$ $(x \oplus y) \oplus z = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + yxz$ $(x \oplus y) \oplus z = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + yxz$	$x \oplus (y \oplus z) = x\left(\overline{y \oplus z}\right) + \bar{x}(y \oplus z)$ $x \oplus (x \oplus z) = x(\bar{y}\bar{z} + yz) + \bar{x}(y\bar{z} + \bar{y}z)$ $x \oplus (x \oplus z) = x\bar{y}\bar{z} + xyz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$ $x \oplus (x \oplus z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + yxz$
$(x \oplus y) \oplus z = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$	$x \oplus (y \oplus z) = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$

1

On déduit que l'opérateur OU exclusif est associatif

Notez bien que l'on peut faire la même démonstration en se servant des tables de vérité

1

Q15 – *Théorème de Morgangénéralisé* ***(2 points) :*** Démontrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{\prod_{i=0}^{n-1}(x_i)} = \sum_{i=0}^{n-1}(\overline{x_i})$

Où x_i (i allant de 0 à $n-1$) sont des variables logiques et $\overline{\prod_{i=0}^{n-1}(x_i)}$ est la négation du produit logique de ces variable et $\sum_0^{n-1}(\overline{x_i})$ est la somme logique des négations de ces variables.

La loi $\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{\prod_{i=0}^{n-1}(x_i)} = \sum_{i=0}^{n-1}(\overline{x_i})$ est vérifiée pour n=2

En effet :

$\overline{\prod_{i=0}^{2-1}(x_i)} = \sum_0^{2-1}(\overline{x_i})$ Ce qui donne : $\overline{\prod_{i=0}^{1}(x_i)} = \sum_{i=0}^{1}(\overline{x_i}) \Leftrightarrow \overline{x.y} = \bar{x} + \bar{y}$

Ce qui n'est rien d'autre que la loi de Morgan

1

On suppose que la loi est vraie pour n $\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{\prod_0^{n-1}(x_i)} = \sum_0^{n-1}(\overline{x_i})$

Vérifions si elle reste vraie pour $n+1$ *c'est-à-dire est-ce que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{\prod_0^{n}(x_i)} = \sum_0^{n}(\overline{x_i})$ *?*

$$\overline{\prod_{i=0}^{n}(x_i)} = \overline{x_n\,.\left(\prod_{i=0}^{n-1}(x_i)\right)} = \overline{x_n} + \overline{\left(\prod_{i=0}^{n-1}(x_i)\right)} = \overline{x_n} + \sum_{i=0}^{n-1}(\overline{x_i}) = \sum_{i=0}^{n}(\overline{x_i})$$

D'où $\overline{\prod_{i=0}^{n}(x_i)} = \sum_{i=0}^{n}(\overline{x_i})$

1