ZOUGHAB. N

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Année universitaire 2017-2018
Juin 2018

Examen de MATHS 2
Durée : 2 heures

Exercice n° 1. *(4pts.)* Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$.
3. En déduire I_1 et I_2 et par suite la valeur de $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) e^{-x} dx$.

Exercice n° 2. *(5pts.)* Soit $x \in]1, +\infty[$ et considérons l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{\ln x}. \tag{1}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (1).
2. Résoudre l'équation non homogène (1).
3. Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $y(2) = 1$.

Exercice n° 3. *(5pts.)* Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' + y = (6x + 2) e^x. \tag{2}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène correspondante.
2. Déterminer les constantes α et β pour que $y_p(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2) e^x$ soit une solution particulière de (2).
3. Déterminer la solution générale de (2).
4. Trouver la solution de l'équation (2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice n° 4. *(6pts.)* Soit la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A = I_3 - M$ et $B = I_3 + M + M^2$. Rappelons que $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.
3. En déduire que B est inversible et donner son inverse.
4. Résoudre le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ -5x - 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = -1, \end{cases}$$

   (a) en utilisant la méthode de la matrice inverse ;
   (b) en utilisant la méthode de Cramer.

Bon courage

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie, Département de Technologie

Année universitaire 2017-2018
Juin 2018

Corrigé de l'examen de MATHS 2

Exercice n° 1. Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculons I_0 : On a

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x}\big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

0.5

2. Montrons que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$: Posons

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^{n+1} & \Longrightarrow & f'(x) = (n+1)x^n \\ g'(x) = e^{-x} & \Longrightarrow & g(x) = -e^{-x}. \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{lll} I_{n+1} & = & -x^{n+1}e^{-x}\big|_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x} dx \\ & = & \frac{-1}{e} + (n+1)I_n. \end{array}$$

1.5

3. Déduction de I_1 et I_2 et par suite déduction de la valeur de $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)e^{-x} dx$: On a

$$\begin{array}{lll} I_1 & = & \frac{-1}{e} + (0+1)I_0 \\ & = & \frac{-1}{e} + (1 - \frac{1}{e}) \\ & = & 1 - \frac{2}{e}, \end{array}$$

0.5

$$\begin{array}{lll} I_2 & = & \frac{-1}{e} + (1+1)I_1 \\ & = & \frac{-1}{e} + 2(1 - \frac{2}{e}) \\ & = & 2 - \frac{5}{e} \end{array}$$

0.5

et

$$\begin{array}{lll} \int_0^1 (x^2 - 3x + 1)e^{-x} dx & = & I_2 - 3I_1 + I_0 \\ & = & 2 - \frac{5}{e} - 3 + \frac{6}{e} + 1 - \frac{1}{e} \\ & = & 0. \end{array}$$

1

Exercice n° 2. Soit $x \in]1, +\infty[$ et considérons l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{\ln x}. \qquad (1)$$

1. Résolution de l'équation homogène associée à (1) : L'équation homogène associée est

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = 0 \ldots\ldots \ (E_0)$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{array}{lllll} \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x \ln x} & \Longrightarrow & \frac{dy}{y} & = & -\frac{dx}{x \ln x} \\ & \Longrightarrow & \ln|y| & = & -\ln|\ln x| + K_1, \ K_1 \in \mathbb{R} \\ & \Longrightarrow & y & = & \frac{C_1}{\ln x}, C_1 \in \mathbb{R}^*. \end{array}$$

$y = 0$ est une solution évidente de (E_0) . Finalement, la solution générale de (E_0) est

$$y(x) = \frac{C}{\ln x}, \ C \in \mathbb{R}.$$

2

2. Résolution de l'équation non homogène (1) : On fait varier la constante C et la solution générale de (1) sera $y(x) = \frac{C(x)}{\ln x}$.

On a $y' = \frac{C'(x)\ln x - \frac{1}{x}C(x)}{\ln^2 x} = \frac{C'(x)}{\ln x} - \frac{C(x)}{x\ln^2 x}$. Par suite

$$\begin{array}{rll} y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{\ln x} & \Longrightarrow \frac{C'(x)}{\ln x} - \frac{C(x)}{x\ln^2 x} + \frac{1}{x\ln x}.\frac{C(x)}{\ln x} & = \frac{1}{\ln x} \\ & \Longrightarrow C'(x) & = 1 \\ & \Longrightarrow C(x) & = x + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Donc la solution générale de (1) est

$$y(x) = \frac{x+K}{\ln x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2

3. Trouvons la solution de l'équation (1) vérifiant $y(2) = 1$: On a

$$\begin{array}{rll} y(2) = 1 & \Longrightarrow \frac{2+K}{\ln 2} & = 1 \\ & \Longrightarrow K & = \ln 2 - 2. \end{array}$$

Finalement, la solution est

$$y(x) = \frac{x + \ln 2 - 2}{\ln x}.$$

1

Exercice n° 3. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' + y = (6x+2)e^x. \tag{2}$$

1. Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (2) : L'équation homogène associée à (2) est

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad ....(E_0)$$

L'équation caractéristique de (E_0) est

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad .... (C)$$

(C) admet la racine réelle double $r = 1$. Donc la solution générale de (E_0) est

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x)e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2

2. Détermination des constantes α et β pour que $y_p(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2)e^x$ soit une solution particulière de (2) : On a

$$y_p'(x) = [\alpha x^3 + (3\alpha+\beta)x^2 + 2\beta x]e^x \text{ et } y_p''(x) = [\alpha x^3 + (6\alpha+\beta)x^2 + (6\alpha+4\beta)x + 2\beta]e^x.$$

Donc on aura

$$\begin{array}{rl} y_p'' - 2y_p' + y_p = (6x+2)e^x & \Leftrightarrow [\alpha x^3 + (6\alpha+\beta)x^2 + (6\alpha+4\beta)x + 2\beta]e^x \\ & \quad -2[\alpha x^3 + (3\alpha+\beta)x^2 + 2\beta x]e^x + (\alpha x^3 + \beta x^2)e^x = (6x+2)e^x \\ & \Leftrightarrow (6\alpha x + 2\beta)e^x = (6x+2)e^x \\ & \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha = 6 \\ 2\beta = 2 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1. \end{cases} \end{array}$$

1.5

Donc

$$y_p(x) = (x^3 + x^2)e^x.$$

3. Détermination de la solution générale de (2) : La solution générale de (2) est

$$\begin{array}{rl} y_g(x) & = y_0(x) + y_p(x) \\ & = (C_1 + C_2 x + x^2 + x^3)e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

0.5

4. Cherchons la solution de (2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. On a

$$y'(x) = [C_1 + C_2 + (C_2 + 2)x + 4x^2 + x^3]e^x.$$

Par suite,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_1 + C_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

1

Finalement, la solution est

$$y(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^x.$$

Exercice n° 4. Soit la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculons $A = I_3 - M$ et $B = I_3 + M + M^2$. On a

$$A = I_3 - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

0.5

Calculons M^2 : On a

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0.5

Donc

$$B = I_3 + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0.5

2. Calculons $A \times B$ et $B \times A$: On a

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.25

et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.25

3. Déduction que B est inversible et donner son inverse : On a

$$A \times B = B \times A = I_3,$$

donc B est inversible et son inverse

0.5

$$B^{-1} = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

0.5

4. Résolution du système linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases} 4x+2y+z=1 \\ -5x-2y-z=2 \\ 2x+y+z=-1, \end{cases}$$

(a) en utilisant la méthode de la matrice inverse : On a

$$(S) \Longleftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1

(b) en utilisant la méthode de Cramer : On a

$$(S) \Longleftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

0.5

On a

$$\det B = 4\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-2+1)-2(-5+2)+(-5+4) = 1.$$

$\det B \neq 0$, donc (S) est un système de Cramer et admet une unique solution donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -3,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 8,$$

1.5

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{4\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -3.$$