Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Janvier 2018

Examen de remplacement Maths 1. Durée 2 heures.

Exercice 1. (3.5 points)
Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3^{2n+2} - 2^{n+1} \text{ est divisible par 7.}$$

Indication : $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n}(3^2 - 2) + 2(3^{2n} - 2^n)$.

Exercice 2. (06 points)

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, \ y \in \mathbb{R}, \quad x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow (x^3 + 2)(y^2 + 1) = (y^3 + 2)(x^2 + 1).$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ?
(b) Donner la classe d'équivalence de 0.

2. On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, \ y \in \mathbb{N}^*, \quad x \,\mathcal{S}\, y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*; \ y = x^n.$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre ?

Exercice 3. (4.5 points)
On considère l'application $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$:

1. Calculer $f^{-1}(\{2\})$.
2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Si $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow X$ (où $X \subset \mathbb{R}$), déterminer X pour que f soit bijective ; puis donner la réciproque f^{-1} de f.

Exercice 4. (06 points)

I) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

(a) Montrer que f est définie et continue sur $[-4, 0[\cup]0, +\infty[$.
(b) Montrer que f est dérivable sur $]-4, 0[\cup]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.
(c) Montrer que f est prologeable par continuité en 0.
(d) Déterminer $\tilde{f}$ le prolongement de f en 0.

Bon Courage

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1

Janvier 2018

Corrigé de l'examen de remplacement de Maths1

Exercice 1. (3.5 points)

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons par $P(n)$ la propriété $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7k, k \in \mathbb{N}$. 1
Pour n=0, on a $3^{0+2} - 2^{0+1} = 7$, $\exists k = 1 \in \mathbb{N}$, donc $P(0)$ est vraie.
Supposons que $P(n)$ est vraie $\big(i.e., 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7k, k \in \mathbb{N}\big)$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie $\big(i.e., 3^{2(n+1)+2} - 2^{(n+1)+1} = 7k, k \in \mathbb{N}\big)$. 0,5
En utilisant l'indication à l'ordre $(n+1)$, on aura :

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+2} - 2^{(n+1)+1} &= 3^{(2n+1)}\big(3^2 - 2\big) + 2\big(3^{2(n+1)} - 2^{(n+1)}\big) \\ &= 3^{(2n+1)} \times 7 + 2\underline{\big(3^{2(n+1)} - 2^{(n+1)}\big)}\ \big(3^{2(n+1)} - 2^{(n+1)} \text{ hypothèse de récurrence}\big) \\ &= 3^{(2n+1)} \times 7 + 2 \times 7k, k \in \mathbb{N} \\ &= 7\big(3^{(2n+1)} + 2k\big), k \in \mathbb{N} \\ &= 7k', k' = 3^{(2n+1)} + 2k, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

2

d'où $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7, donc $P(n+1)$ est vraie. On a montré par récurrence que :$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

Exercice 2. (6 points)

I. Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x,\ \ y \in \mathbb{R}, \quad x\,\mathcal{R}\,y \Longleftrightarrow (x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1).$$

(a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(i) Réflexivité de $\mathcal{R}$: Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(x^3+2)(x^2+1) = (x^3+2)(x^2+1)$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}x$, d'où la réflexivité de $\mathcal{R}$. 0,5

(ii) Symétrie de $\mathcal{R}$: Soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $x\mathcal{R}y$, on a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longrightarrow (x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1) \\ &\Longrightarrow \exists (y^3+2)(x^2+1) = (x^3+2)(y^2+1) \\ &\Longrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

1

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$, d'où la symétrie de $\mathcal{R}$.

(iii) Transitivité de $\mathcal{R}$: Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ et \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)...(1) \\ et \\ (y^3+2)(z^2+1) = (z^3+2)(y^2+1)...(2) \end{array}\right.$$

En multipliant les égalités (1) et (2) membres à membres, on obtient

$$(x^3+2)(y^2+1)(y^3+2)(z^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)(z^3+2)(y^2+1)$$

et après simplification par $(y^2+1)(y^3+2)$ on obtient

$$(x^3+2)(z^2+1) = (x^2+1)(z^3+2)$$

1

c'est à dire que $x\mathcal{R}z$ Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$, d'où la transitivité de $\mathcal{R}$.

Finalemnt, de (i), (ii), (iii) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) La classe d'équivalence de 0.

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} :: (x^3+2)(0y^2+1) = (0^3+2)(x^2+1)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} :: x^3+2 = 2(x^2+1)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} :: x^3-2x^2 = 0\} \\
&= \{0, 2\}
\end{aligned}$$

1

II. On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, \ y \in \mathbb{N}^*, \quad x\,\mathcal{S}\,y \Longleftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}^*; \ y = x^n.$$

(a) Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation l'ordre.

(i) Reflixivité de $\mathcal{S}$: $\forall x\mathbb{N}^*$, on a $x = x^n$ pour $n = 1$ donc $x\mathcal{S}x$, d'où la réflixivité de $\mathcal{S}$.

0,5

(ii) Antisymétrie de $\mathcal{S}$: $\forall x, \ y \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ n \in \mathbb{N}^*; \ y = x^n \\ et \\ \exists\ m \in \mathbb{N}^*; \ x = y^m \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \exists\ n, m \in \mathbb{N}^*; \ x = (x^n)^m \\
&\Longrightarrow \exists\ n, m \in \mathbb{N}^*; \ \ln x = \ln(x^{n\times m}) \\
&\Longrightarrow \exists\ n, m \in \mathbb{N}^*; \ (n \times m - 1)\ln x = 0
\end{aligned}$$

1

Ceci n'est possible que si $x = 1$, mais alors $y = 1 = x$ ou si $n \times m = 1$, ce qui implique $n = m = 1$ et donc $x = y$, d'où l'antisymétrié de $\mathcal{S}$

(iii) Transitivité de $\mathcal{S}$: $\forall x, \ y, \ z \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ n \in \mathbb{N}^*; \ y = x^n \\ et \\ \exists\ m \in \mathbb{N}^*; \ z = y^m \end{array}\right.$$

1

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \exists\ n, m \in \mathbb{N}^*; \ z = (x^n)^m \text{ (avec } n \times m \in \mathbb{N}^*) \\
&\Longrightarrow \exists\ n \times m \in \mathbb{N}^*; \ z = x^{n\times m} \\
&\Longrightarrow x\mathcal{S}z.
\end{aligned}$$

De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

Exercice 3. (4.5 points)

On considère l'application $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$:

1. Calculons $f^{-1}(\{2\})$.

$$f^{-1}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / f(x) \in \{2\}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / f(x) = 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} - \{3\} / \frac{2x+5}{x-1} = 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} - \{3\} / 2x + 5 = 2(x-1)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} - \{3\} / 5 = -2\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

0,5

2. • Injectivité de f : soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$: $f(x_1) = f(x_2)$. On a

$$
\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow \frac{2x_1+5}{x_1-1} = \frac{2x_2+5}{x_2-1} \\
&\Longrightarrow (2x_1+5)(x_2-1) = (2x_2+5)(x_1-1) \\
&\Longrightarrow 5x_2 - 2x_1 = 5x_1 - 2x_2 \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

1

d'où l'injectivité de f

- Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent (d'aprés la question précédente). 0,5
- Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective. 0,5

3. Si $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow X$ (où $X \subset \mathbb{R}$). Déterminons X pour que f soit bijective :
Il est facile de vérifier que $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ est une bijection.
$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall y \in X = \mathbb{R} - \{2\}$ on a : 1

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &\Longleftrightarrow y = \frac{2x+5}{x-1} \\
&\Longleftrightarrow y(x-1) = (2x+5) \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{5+y}{y-2}
\end{aligned}
$$

0,5

donc

$$
\begin{aligned}
f^{-1} :\ X = \mathbb{R} - \{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\
y &\longmapsto f^{-1}(y) = \frac{5+y}{y-2}
\end{aligned}
$$

0,5

.

Exercice 4. (6 points)
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

(a) La fonction $\sqrt{x+4}$ est bien définie si et seulement si $x + 4 \geq 0$; i.e.$x \in [-4, +\infty[$. De plus elle est continue sur cet intervalle. La fonction $\frac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On déduit que $f(x)$ est définie et continue sur $[-4, +\infty[\cap \mathbb{R}^* = [-4, 0[\cup]0, +\infty[$. 1

(b) La fonction $\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc la fonction $\sqrt{x+4} - 2$ est dérivable sur $]-4, +\infty[$. Comme la fonction $\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on déduit que f est dérivable sur $]-4, +\infty[\cap \mathbb{R}^* =]-4, 0[\cup]0, +\infty[$. 1

Sur cet ensemble on a

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}} \times x - (\sqrt{x+4} - 2) \times 1}{x^2} = \frac{-x - 8 + 4\sqrt{x+4}}{2x^2\sqrt{x+4}}$$

1,5

(c) Par définition, la fonction f est prologeable par continuité en 0 si $\lim\limits_{x \longrightarrow 0}$ existe et est finie. La valeur de prologement de f en 0 est alors de cette limite. Pour tout $x \in [-4, 0[\cup]0, +\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} == \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2}$$

Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}$, on en déduit que f est prolongeable par continuité en 0.

1,5

(d)

$$\tilde{f} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x} & si \quad x \in [-4, 0[\cup]0, +\infty[\\ \frac{1}{4} & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1