Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Année universitaire 2017/2018
03/02/2018
Durée : 02 heures

EXAMEN DE TRMPLACEMENT DE PHYSIQUE 1

Exercice 1(2 pts) :

1. Déterminer une base orthonormée directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur (1, 2,2).
2. Pour quelle valeur de α les vecteurs (1, 0, α) ; (α, 1, 0) et (0, α ,1) sont-ils coplanaires ?

Exercice 2(3 pts)

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel$M$d'abscisse curviligne $s(t)$.Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $R\ (O,\vec{i},\vec{j},)$ est $\vec{V}\ (M/R)$ de module V. On définit une base locale (base de Frenet) $(\vec{e_t},\vec{e}_n)$ telle que$\vec{V}(M/R) = V\vec{e_t}$.

1. Que désignent les vecteurs $\vec{e_t} et \vec{e}_n$?
2. Quelle relation existe-t-il entre $s(t)$ et V ?
3. Montrer que le vecteur accélération du point M est donné par :$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{e_t} + \frac{V^2}{R_c}\vec{e}_n$
   $R_c$étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.
4. Exprimer R_c en fonction de $\vec{V}\ (M/R)$et $\vec{\gamma}(M/R)$.

Exercice 3 :(7 pts)

Dans un repère cartésien orthonormé (Oxyz),la position d'un point M est déterminée par les équations paramétriques :$x = e^{-t}\cos t\,;\quad y = e^{-t}\sin t\,;\quad z = e^{-t}$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire du point M.
2. Déterminer à l'instant t les expressions des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules.
3. Déterminer les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire à un instant t.
4. Déterminer l'expression du vecteurunitaire tangent à la trajectoire $\vec{e_t}$.
5. Déterminer l'expression du vecteur unitaire normal à la trajectoire $\vec{e_n}$.
6. Déterminer les coordonnées polaires $r$et θ.
7. Ecrire la trajectoire en coordonnées polaires.

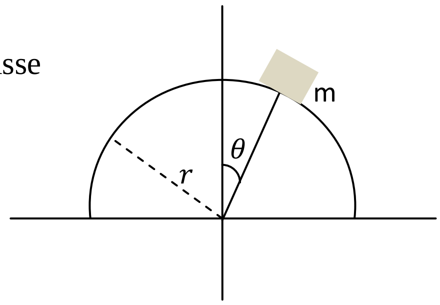
Exercice 4 : 8 pts

Une masse assimilable à un point matériel est posée sur une piste circulaire de rayon r situéedans un plan vertical. La position de la masse est repérée par l'angle θ.

L'accélération de la pesanteur est g. Les coefficients de frottement statique et cinétique sont respectivement $\mu_s$et μ_c.

I. En présence de frottement entre la piste et la masse :

1- Déterminer l'angle maximal θ_0 pour lequel la masse ne glisse pas sur la piste.



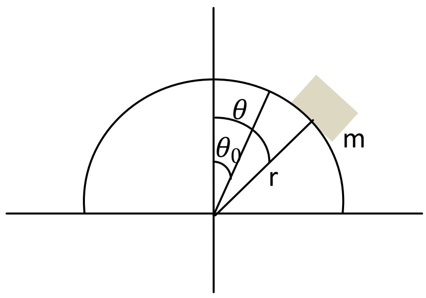
Pour θ> $\theta_0$la masse se met à glisser sans vitesse initiale.

2- Ecrire l'équation différentielle du mouvement.

II. On néglige maintenant les frottements :

1- En appliquant le PFD, montrer que le module de la vitesse est donné par $v = \sqrt{2gr(cos\theta_0 - cos\theta)}$.

2- Déterminer en fonction de θ , θ_0, $g et r$ l'expression de la force de contact R.



3- L'énergie mécanique est-elle conservée ?. Justifier votre réponse

4- Enoncer le théorème de l'énergie cinétique.

EXAMEN DE TRMPLACEMENT DE PHYSIQUE 1

Corrigé

Exercice 1.

a) Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ cette base. $\vec{u}$ est le vecteur unitaire porté par le vecteur$(1,2,2)$, soit $\vec{u}\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ **0.25**

On cherche ensuite un vecteur perpendiculaire à $(1,2,2)$. Le vecteur, par exemple, (0,-1,1) est perpendiculaire à$(1,2,2)$. Soit $\vec{v}$ le vecteur unitaire porté par le vecteur$(0,-1,1)$, soit $\vec{v}\ (0\,, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.0.5

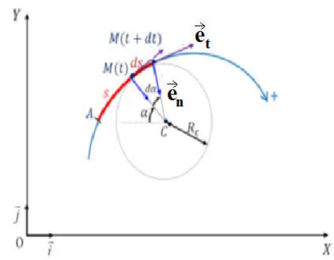
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$est une base directe $\Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\ , -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}\right)$.**0.5**

b) Les 3 vecteurs sont coplanaires $\Rightarrow$ ils ne peuvent pas formés un volume $\Longrightarrow$ le produit mixte est nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 + \alpha^3 = 0 \Longrightarrow \alpha = -1. \qquad \mathbf{0.75}$$

Exercice 2.

1. Les vecteurs $\vec{e_t}$ et $\vec{e_n}$:
   $\vec{e_t}$: Vecteur unitaire tangent à la trajectoire au point M et de même sens que le mouvement.0.25
   $\vec{e_n}$: Vecteur unitaire perpendiculaire à la trajectoire au point M et dirigé vers le centre de la courbure **0.25.**
2. $V\ = \frac{ds(t)}{dt}$ **0.5**
3. On a :$\vec{V}\ = V\vec{e_t} \Longrightarrow \vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{e_t}) = \frac{dV}{dt}\vec{e_t}\ + V\frac{d\vec{e_t}}{dt}$ **0.25**



Il reste à déterminer $\frac{d\vec{e_t}}{dt}$.

Le terme $\frac{d\vec{e_t}}{dt}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\vec{e_t}}{dt}\ = \frac{d\vec{e_t}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \mathbf{0.25}$$

Comme $ds = R_c\,.\,d\alpha$et $\frac{d\vec{e_t}}{d\alpha} = \vec{e_n}$ **0.25** **et** $\frac{ds}{dt} = V$ on aura :

$$\frac{d\vec{e_t}}{dt}\ = \frac{V}{R_C}\vec{e_n} \qquad \mathbf{0.25}$$

Par conséquent : $\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{e_t}\ + \frac{V^2}{R_C}\vec{e_n}$

4. On a : $\vec{V}(M/R) = V\vec{e_t}$ et $\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{e_t}\ + \frac{V^2}{R_C}\vec{e_n}$
   $\Rightarrow \vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M/R) = \frac{V^3}{R_C}\vec{e_b}$ **0.5**
   où$\vec{e_b} = \vec{e_t} \wedge \vec{e_n}$ = vecteur unitaire perpendiculaire à$\vec{e_t}$et $\vec{e_n}$ simultanément.
   Par conséquent : $\|\vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M/R)\| = \frac{\|\vec{V}\|^3}{R_C} \Longrightarrow R_C = \frac{\|\vec{V}\|^3}{\|\vec{V}(M/R)\wedge\vec{\gamma}(M/R)\|}$ **0.5**

Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Année universitaire 2017/2018
03/02/2018
Durée : 02 heures

EXAMEN DE TRMPLACEMENT DE PHYSIQUE 1

Exercice 3

1. Trajectoire : $x^2 + y^2 = z^2$ **1**
2. vecteur vitesse :

$$v_x = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$
$$v_y = -e^{-t}(\sin t - \cos t)$$
$$v_z = -e^{-t}$$

$v = \sqrt{3}e^{-t}$ **0.5**

$$a_x = 2e^{-t}\sin t$$
$$a_y = -2e^{-t}\cos t$$
$$a_z = e^{-t}$$

$a = \sqrt{5}e^{-t}$ **0.5**

3. accélération tangentielle

$a_t = -\sqrt{3}e^{-t}$ **0.25**

$a_N = \sqrt{2}e^{-t}$ **0.25**

$R_C = (3/\sqrt{2})e^{-t}$ **0.5**

4. $\vec{v} = v\vec{e_t}\vec{e_t} = \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{(\cos t + \sin t)\vec{e_x} + (\sin t - \cos t)\vec{e_y} + \vec{e_z}}{\sqrt{3}}$ 0.5

$\vec{e_t} = \frac{\vec{a} - a_t\vec{e_t}}{a_N} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)((sint - cost)\vec{e_x} - (sint + cost)\vec{e_y})$ **0.5**

5. Coordonnées polaires $\rho = e^{-t}$ **0.5**

$\theta = t$ **0.5**

6. Trajectoire $\rho = e^{-\theta}$ **1**

Exercice 4

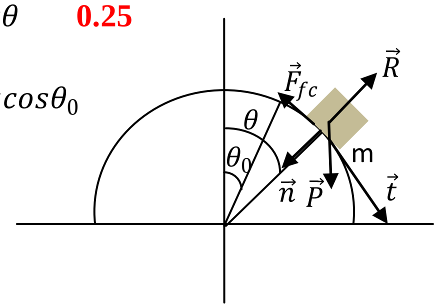
I- Présence de frottements

1-A l'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{fs} = \vec{0}$ **0.25**

Projection sur la tangente $\vec{t}$: $-F_{fs} + mgsin\theta = 0$ (1) **0.25**

Projection sur la normale$\vec{n}$: $mgcos\theta - R = 0 \Rightarrow R = mgcos\theta$ **0.25**

$$F_{fsmax} = \mu_s R = \mu_s mgcos\theta_0$$



En remplaçant dans (1),on trouve :$tg\theta_0 = \mu_s$ **0.25**

2-L'equation différentielle :

D'après le PFD :$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{fc} = m\vec{a}$ **0.25**

Projetons sur la tangente et la normale :

$P_t - F_{fc} = ma_t = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow mgsin\theta - F_{fc} = m\frac{dv}{dt}$ (2) **0.25**

EXAMEN DE TRMPLACEMENT DE PHYSIQUE 1

$\mathbf{0.25}$ $P_N - R = ma_n = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow R = mgcos\theta - m\frac{v^2}{r}$ $\mathbf{0.25}$ (3) $F_{fc} = \mu_c R = \mu_c\left(mgcos\theta - m\frac{v^2}{r}\right)$ $\mathbf{0.5}$ (4)

On remplace (4) dans l'équation (1) pour obtenir l'équation différentielle du mouvement : $mgsin\theta - \mu_c\left(mgcos\theta - m\frac{v^2}{r}\right) = m\frac{dv}{dt}\frac{dv}{dt} - \mu_c\frac{v^2}{r} = g(sin\theta - \mu_c cos\theta)$ **0.5**

II -Absence de frottements :

1 - Le PFD s'écrit :$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ **0.25**

Projection sur la tangente $\vec{t}$: $mgsin\theta = ma_t = m\frac{dv}{dt}$ $\mathbf{0.5}$ (5)

Donc$mgsin\theta = m\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow mgsin\theta = m\frac{dv}{d\theta}\frac{v}{r} \Rightarrow grsin\theta d\theta = vdv$ $\mathbf{0.75}$

En intégrant ,on trouve : $v^2 = -2grcos\theta + cste$ **0.5**

Quand $\theta = \theta_0, v = 0 \Rightarrow cste = 2grcos\theta_0$

Donc $v = \sqrt{2gr(cos\theta_0 - cos\theta)}$ **0.5**

2 - Déterminer en fonction de $\theta, \theta_0, getr$l'expression de la force de contact R.

Projection sur la normale $\vec{n}$: $mgcos\theta - R = ma_n = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow R = mgcos\theta - m\frac{v^2}{r}$ **0.5**

On y remplace v^2,on trouve :$R = mg(3cos\theta - 2cos\theta_0)$ **0.5**

3 -Oui l'énergie mécanique est conservée. Les forces de frottement (forces non conservatives) ont été négligées. **1**

4 -Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$ **0.5**