Université A/Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Avril 2016

Corrigé de Rattrapage de Maths 1

Ex n°01 (04 points)

1) Pour $n=1$, $\frac{1}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow$ la propriété est vraie pour cette valeur. Supposons que cette propriété est vraie à l'ordre (n) c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$.

On a $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$

$= 2 - \frac{2(n+2) + n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$. Donc d'après la récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

2,5

2) Supposons que : $x \geq 2 \Rightarrow x^3 \geq 2^3 \Rightarrow x^3 \geq 8$,

donc $x^3 \neq 2$, d'où par la contraposée la propriété : $x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$ est vérifiée.

1,5

Exo n° 02 (08 points) :

1)

i) soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{1\}$ tels que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+5}{x_1-1} = \frac{2x_2+5}{x_2-1} \Rightarrow$$

$$(2x_1+5)(x_2-1) = (2x_2+5)(x_1-1) \Rightarrow 5x_2 - 2x_1 = 5x_1 - 2x_2$$

$\Rightarrow 7x_2 - 7x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$. Donc f est injective (1)

soit $y \in \mathbb{R}$, $\exists ?\, x \in \mathbb{R}-\{1\} \,/\, y = f(x)$.

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{2x+5}{x-1}.$$

$$\Rightarrow xy - y = 2x+5$$

$$\Rightarrow (y-2)x = y+5$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{y+5}{y-2}}$$

(1)

Pour $y = 2$, on ne peut pas trouver un element $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ tel que $\boxed{x = \frac{y+5}{y-2}}$, donc f n'est pas surjective.

ii) Pour que f soit bijective, il faut que f soit surjective, donc le domain d'arrivée est : $\mathbb{R}-\{2\}$. (1)

Dans ce cas $f^{-1} : \mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{1\}$

$$x \longmapsto \frac{x+5}{x-2}$$

(1)

2) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$: $a R b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, a-b = 2k$

i) . On a $\forall a \in \mathbb{Z}$: $a - a = 0 = 2k$ avec $(k=0) \in \mathbb{Z}$,
alors aRa, donc R est réflexive. 0,5

- Soient $a, b \in \mathbb{Z}$: $aRb \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, a-b = 2k$
$\Rightarrow -(a-b) = -2k \Rightarrow b-a = 2k'$, avec $(k' = -k) \in \mathbb{Z}$
donc R est symétrique. 1

- Soient $a, b, c \in \cancel{\mathbb{R}}$ tel que

$$\begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{Z} \,/\, a-b = 2k_1 & \rightarrow (1) \\ \exists k_2 \in \mathbb{Z} \,/\, b-c = 2k_2 & \text{—— } (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Leftrightarrow a-c = 2(k_1+k_2)$ donc
$a-c = 2k_3$ avec $k_3 = k_1+k_2 \in \mathbb{Z}$, donc
aRc, d'où R est transitive 1,5

Comme R est reflexive, symetrique et transitive,
alors R est une relation d'equivalence.

ii) $\dot{1} = \{b \in \mathbb{Z} \,/\, 1Rb\} = \{b \in \mathbb{Z} \,/\, \exists k \in \mathbb{Z} : 1-b = 2k\}$
$= \{b \in \mathbb{Z} \,/\, \exists k \in \mathbb{Z} : b = 2k+1\} = \{2k+1 \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

1

Exo n° 03 (08 points)

1)

- $$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(1+x)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$ 1

- $$\lim_{x \mapsto \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x \mapsto \pi} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x \mapsto \pi} \frac{(1-\cos x)\cancel{(1+\cos x)}}{\cancel{(1+\cos x)}}$$

$$= \lim_{x \mapsto \pi} (1-\cos x) = \boxed{2}$$ 1

- $$\lim_{x \mapsto 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} = \lim_{x \mapsto 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$ 1

) $$f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & \text{si } x \geq 1 \\ ax^3+bx+2, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

i) Continuité de f sur IR 0,5

a) Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Continuité de f en 1.

On a $f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$ et $\lim_{x \underset{>}{\mapsto} 1} f(x) =$

$\lim_{x \underset{>}{\to} 1} (x^2+x+1) = 3$.

$\lim_{x \underset{<}{\mapsto} 1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\mapsto} 1} (ax^2+bx+1) = a+b+2$

04 page

Donc pour f soit continue en 1 il faut que

$$f(1) = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ <}} f(x) \quad \text{c'est-à-dire}$$

2

$$a+b+2 = 3, \ (\text{i.e}) : \boxed{a+b=1}$$

ii a) Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

0,5

b) Dérivabilité de f en 1.

On impose la condition $a+b=1$ car sinon f n'est pas continue en 1, donc n'est pas dérivable en 1.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ >}} \frac{x^2+x+1-3}{x-1} = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ >}} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}} = 3$$

$$\lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ <}} \frac{ax^3+bx+2-3}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ <}} \frac{ax^3+(1-a)x-1}{x-1} = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ <}} \frac{ax(x^2-1)+x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \mapsto 1} \frac{(x-1)\left[ax(x+1)+1\right]}{x-1} = \boxed{2a+1}$$

Donc pour que f soit dérivable en 1, il faut et il suffit que $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+1=3 \end{cases} \Rightarrow (a=1, b=0)$

Alors en conclusion $\boxed{a=1 \text{ et } b=0}$

2

05 page