Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Février 2016

Examen de remplacement de Maths1
Durée : 02 heures

Exercice 1. (6 points)

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que $\frac{n+1}{n+2} < 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par contraposition que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 4, alors n est pair.

Exercice 2. (4 points)

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R} - \{\tfrac{-3}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 2 - \frac{8-x}{4x+6}$$

1. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
2. Quelle restriction doit-on faire sur l'espace d'arrivée pour que f devienne une bijection ? Dans ce cas donner l'application réciproque de f.

Exercice 3. (4 points)

1. Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :
$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \quad (x,y)\ \mathcal{R}\ (x',y') \Longleftrightarrow xy' = yx'$.

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b. Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 2)$.

Exercice 4. (6 points)

1. Calculer les limites suivantes :

   a. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \right)$

   b. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right)$

   c. $\lim_{x \to 0} \left(x^3 \sin \frac{1}{x} \right)$.

2. Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b, & \text{si } x < 2, \\ a, & \text{si } x = 2, \\ bx^2 + 2x + 5, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Soit continue sur $\mathbb{R}$.

Bon Courage

Université A/Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST.

Béjaia le 08/02/2016

Corrigé de l'examen de remplacement de Maths 1.

Exo n°01 (06 points).

1) Pour $n=0$ on a $3^{2(0)+1}+2^{0+2}=3+4=7$ est divisible par 7.

Supposons que la propriété est vraie pour n et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre $\boxed{n+1}$.

on a $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}=3^{2n+1+2}+2^{n+2+1}$

$=9.3^{2n+1}+2.2^{n+2}=(7+2).3^{2n+1}+2.2^{n+2}$

$=2\left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)+7.3^{2n+1}=2.7k+7.3^{2n+1}$

$=7\left(2k+3^{2n+1}\right)=7k'$ avec $k'=2k+3^{2n+1}$

donc $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$ est divisible par 7

et par récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$ on a :

$3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7.

2

2) Supposons que $\frac{n+1}{n+2}\geq 1 \Rightarrow n+1\geq n+2 \Rightarrow \boxed{1\geq 2}$ contradiction, alors $\boxed{\frac{n+1}{n+2}<1}$.

2

3) supposons que n est impair, donc $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$
$\Rightarrow n^2 - 1 = 4(k^2+k) = 4 \cdot m$ avec $m = k^2 + k \in \mathbb{N}$.
donc n^2-1 est divisible par 4, par la contraposée la propriété 3 est vérifiée.

2

Exo n° 2 (4 points).

① l'injectivité de f :

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\} \mid f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

1

$\frac{8-x_1}{4x_1+6} = \frac{8-x_2}{4x_2+6} \Rightarrow 32x_2 + \cancel{48} - \cancel{4x_1 x_2} - 6x_1 =$
$32x_1 - \cancel{4x_1 x_2} + \cancel{48} - 6x_2 \Rightarrow 38x_1 = 38x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

donc $f(x)$ est injective

② la surjectivité de f :

Soit $y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \Rightarrow y = 2 - \frac{8-x}{4x+6} \Rightarrow y - 2 = -\frac{8-x}{4x+6} \Rightarrow 8 - x = (2-y)(4x+6)$.

1

$\Rightarrow 8 - x = 8x + 12 - 4xy - 6y$.

$\Rightarrow 8 - 9x + 4xy = 12 - 6y$.

$\Rightarrow 4xy - 9x = 4 - 6y \Rightarrow \boxed{x = \frac{4-6y}{4y-9}}$

Pour $y = \frac{9}{4}$ $\nexists x \in \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\} \mid f(x) = y$, alors f n'est pas surjective

pour que f soit surjective il faut que l'espace d'arrivée soit $\mathbb{R} - \{\frac{9}{4}\}$.

1

L'application réciproque de f est

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{\frac{9}{4}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

$$x \longmapsto f^{-1}(x) = \frac{4 - 6x}{4x - 9}$$

1

Exo n° 3 (04 points)

* $\forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ on a : $xy = yx$, alors $(x,y) R (x,y)$ donc R est reflexive.

0,5

* Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $(x,y) R (x',y') \Rightarrow xy' = yx' \Rightarrow y'x = x'y$
$\Rightarrow (x',y') R (x,y)$ donc R est symétrique

1

* Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\begin{cases} (x,y) R (x',y') \\ (x',y') R (x'',y'') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy' = yx' \\ x'y'' = y'x'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xy'\cdot y'' = yx'\cdot y'' \\ yx'y'' = yy'x'' \end{cases} \Rightarrow xy'y'' = yy'x''$$

1

comme $y' \neq 0$ alors $xy'' = yx''$
$\Rightarrow (x,y) R (x'',y'')$ donc R est transitive

Comme R est Reflexive, symétrique et transitive, alors elle est d'équivalence

$\dot{(1,2)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* / (1,2) R (x,y)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* / y = 2x\}$

1,5

<u>Exo n° 4</u> (06 points)-

a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}\right) =$

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{2}$

1

1

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x} = \frac{2}{3}$

c) On a $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

1

$\Rightarrow -x^3 \leq x^3 \cdot \sin\frac{1}{x} \leq +x^3$

d'après le théorème d'encadrement on a :

$\lim_{x\to 0} x^3 \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$.

2) les restrictions de f aux intervalles 0,5
]$-\infty, +2$[et]2 $+\infty$[sont des polynômes, donc continues sur ces des deux intervalles.
La fonction f sera continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en $\boxed{2}$.

(ie) $\lim\limits_{x \to 2^<} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^>} f(x) = f(2) = a$. 0,5

$\lim\limits_{x \to 2^<} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^<} (x^2 + x + b) = b + 6$ 1

$= \lim\limits_{x \to 2^>} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^>} (bx^2 + 2x + 5) = 4b + 9 = a$

$\Rightarrow b + 6 = 4b + 9 = a$ 1

$\Rightarrow \boxed{b = -1}$ et $\boxed{a = 5}$