Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Technologie

Juin 2014

Rattrapage de MATHS 2
durée 2 heures.

Exercice n° 1. (10 pts)
Soit la matrice suivante :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \lambda \\ \lambda & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A_λ^2 et déterminer les valeurs de λ pour que A_λ^2 soit inversible.
2. Posons $\lambda = 6$
a. Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que $A_6^2 = aA_6 + bI_3$ et donner l'expression de A_6^3 en fonction de a et b.
b. Déduire que A_6 est inversible et donner l'expression de A_6^{-1}.
c. Calculer par une autre méthode A_6^{-1}.
3. Résoudre suivant les valeurs de λ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 1x - 3y + \lambda z = 3 \\ \lambda x - 8y + 12z = 1 \\ 3x + -3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Exercice n° 2. (7 pts)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, une application définie par $f(x, y, z) = (x + 2y, 2x + 5y + z, 3x + y - 2z)$.
a. Montrer que f est une application linéaire.
b. Écrire la matrice M de f dans la base $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
c. Calculer M^{-1}, puis déduire l'application réciproque f^{-1} de f.
d. Déterminer la matrice M' de f^{-1} dans la base $B' = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$.

Exercice n° 3. (3 pts)
On donne la matrice suivante : $A = (a_{ij})$ telle que pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et $j \in \{1,2,3\}$, $a_{ij} = 2i - j$.
a. Écrire la matrice A.
b. Déterminer la matrice $B = A^2 + 2I_3$, puis donner ${}^tA$ et ${}^tB$.
c. Calculer ${}^t(A + B)$ et ${}^t(AB)$.

Bon Courage.

Exo n° 02 (7 pts)

$$f(x,y,z)=(x+2y,\ 2x+5y+z,\ 3x+y-2z)$$

Soit $X=(x_1,y_1,z_1)$ et $Y=(x_2,y_2,z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a) On a : $f(X+Y)=f(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)=$

$(x_1+x_2+2y_1+2y_2,\ 2x_1+2x_2+5y_1+5y_2+z_1+z_2,\ 3x_1+3x_2+y_1+y_2-2z_1-2z_2)$

1,5

$=(x_1+2y_1,\ 2x_1+5y_1+z_1,\ 3x_1+y_1-2z_1)+$

$(x_2+2y_2,\ 2x_2+5y_2+z_2,\ 3x_2+y_2-2z_2)=f(X)+f(Y)$

$-\ f(\lambda X)=f(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)=(\lambda x_1+2\lambda y_1,\ 2\lambda x_1+5\lambda y_1+\lambda z_1,$

$3\lambda x_1+\lambda y_1-2\lambda z_1)=\lambda(x_1+2y_1,\ 2x_1+5y_1+z_1,\ 3x_1+y_1-2z_1)=\lambda f(X)$

donc f est une application linéaire.

b) $M_f=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&1\\3&1&-2\end{pmatrix}$, $\det(M_f)=3$

0,5

c) $C_m=\begin{pmatrix}-11&7&-13\\4&-2&5\\2&-1&1\end{pmatrix}$, $M_f^{-1}=\dfrac{1}{\det(M_f)}\,{}^tC_m$

1,5

$=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-11&4&2\\7&-2&-1\\-13&5&1\end{bmatrix}$

$f^{-1}=M_f^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}(-11x+4y+2z,\ 7x-2y-z,\ -13x+5y+z)$

0,5

d) Déterminons M' la matrice associée à f^{-1} relativement à la base $B' = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$

$B' = \{a, b, c\}$

$f^{-1}(a) = f^{-1}(1,1,0) = \frac{1}{3}(-7, 5, 8)$

$f^{-1}(b) = f^{-1}(0,1,1) = \frac{1}{3}(6, -3, 6)$

$f^{-1}(c) = f^{-1}(1,0,1) = \frac{1}{3}(-9, 6, -12)$

* $f^{-1}(a) = \frac{1}{3}(-7, 5, 8) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = -\frac{7}{3} \\ \alpha + \beta = \frac{5}{3} \\ \beta + \gamma = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{5}{3} \\ \beta = \frac{10}{3} \\ \gamma = -\frac{2}{3} \end{cases}$

1

$f^{-1}(b) = (2, -1, 2) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta = -1 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{5}{2} \end{cases}$

1

$$f^{-1}(c) = (-3,\ 2,\ -4) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = -3 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \beta + \gamma = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

1

Donc $$M_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{10}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 03 : (03 pts)

$A = (a_{ij})$, $i \in \{1,2,3\}$ et $j \in \{1,2,3\}$

avec $a_{ij} = 2i - j$

a) La matrice A :

$a_{11} = 2\times1 - 1 = 1$ $a_{21} = 2\times2 - 1 = 3$ $a_{31} = 2\times3 - 1 = 5$

$a_{12} = 2\times1 - 2 = 0$ $a_{22} = 2\times2 - 2 = 2$ $a_{32} = 2\times3 - 2 = 4$

$a_{13} = 2\times1 - 3 = -1$ $a_{23} = 2\times2 - 3 = 1$ $a_{33} = 2\times3 - 3 = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

0,5

b) On détermine la matrice $B = A^2 + 2I_3$.

$$* \ A^2 = A\times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 14 & 8 & 8 \\ 32 & 20 & 18 \end{pmatrix}$$

0,5

$$B = A^2 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 14 & 8 & 8 \\ 32 & 20 & 18 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 14 & 8 & 8 \\ 32 & 20 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 14 & 10 & 8 \\ 32 & 20 & 20 \end{pmatrix}$$

0,5

$$^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 0{,}25 \quad , \quad ^tB = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 32 \\ 4 & 10 & 20 \\ 4 & 8 & 20 \end{pmatrix} \quad 0{,}25$$

c) on calcule $^t(A+B)$ et $^t(A \times B)$

* $^t(A+B)$:

$$^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 14 & 32 \\ 4 & 10 & 20 \\ 4 & 8 & 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 17 & 37 \\ 4 & 12 & 24 \\ 5 & 9 & 23 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$* \ ^t(A * B) = {}^tB \times {}^tA = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 32 \\ 4 & 10 & 20 \\ 4 & 8 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 40 & 84 & 197 \\ 24 & 52 & 120 \\ 24 & 48 & 112 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

Exercice 1 : $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \lambda \\ \lambda & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Calculons A_λ^2 :

$$A_\lambda^2 = A_\lambda \cdot A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \lambda \\ \lambda & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & \lambda \\ \lambda & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3\lambda+21 & 5\lambda-36 \\ -7\lambda+36 & -3\lambda+28 & \lambda^2-48 \\ -3\lambda+15 & 3 & 3\lambda-20 \end{pmatrix}$$

1

b) Déterminant les valeurs de λ pour que A_λ^2 soit inversible :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3\lambda+21 & 5\lambda-36 \\ -7\lambda+36 & -3\lambda+28 & \lambda^2-48 \\ -3\lambda+15 & 3 & 3\lambda-20 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -3\lambda+28 & \lambda^2-48 \\ 3 & 3\lambda-20 \end{vmatrix} - (3\lambda+21)\begin{vmatrix} -7\lambda+36 & \lambda^2-48 \\ -3\lambda+15 & 3\lambda-20 \end{vmatrix} + (5\lambda-36)\begin{vmatrix} -7\lambda+36 & -3\lambda+28 \\ -3\lambda+15 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\det A = 9\lambda^4 - 108\lambda^3 + 1500\lambda^2 - 7176\lambda + 10816}$$

1

A_λ^2 inversible ssi : $\det A_\lambda^2 \neq 0$

0

2) Posons $\lambda = 6$:

a) Montrons qu'il existe deux réels a, b tels que : $A_6^2 = aA_6 + bI_3$

On a :

$$A_6^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_6^2 = aA_6 + bI_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -3a & 6a \\ 6a & -8a & 12a \\ 3a & -3a & 4a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -3a & 6a \\ 6a & -8a+b & 12a \\ 3a & -3a & 4a+b \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -3a = 3 \wedge a+b = 1$ 0,8 +0,8

$\Rightarrow a = -1$ et $b = 2$

D'où $\boxed{A_6^2 = -A_6 + 2I_3}$

L'expression de A_6^3 en fonction de a et b

On a :

$$A_6^3 = A_6 \cdot A_6^2 = A_6(aA_6 + bI_3)$$

$$\boxed{A_6^3 = aA_6^2 + bA_6}$$

$$A_6^3 = -A_6^2 + 2A_6.$$

1

b) Déduire que A_6 est inversible :

$$A_6^2 = -A_6 + 2I_3 \Rightarrow A_6^2 + A_6 = 2I_3$$

$$\Rightarrow A_6(A_6 + I_3) = 2I_3$$

$$\Rightarrow A_6\left(\frac{A_6 + I_3}{2}\right) = I_3$$

1

$\Rightarrow A_6$ est inversible et $\boxed{A_6^{-1} = \frac{A_6 + I_3}{2}}$

2) Calculons A_6^{-1} par une autre méthode A_6^{-1} :

$$\det A_6 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -3 \\ 6 & -8 \\ 3 & -3 \end{matrix} = -32 - 108 - 108 + 144 + 36 + 72 = \boxed{4}$$

$$C_{A_6} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 6 \\ -6 & -14 & -6 \\ 12 & 24 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow A_6^{-1} = \frac{1}{4} {}^{t}C_{A_6}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}}$$

1

3) Resoudre système : $\det M_s = \begin{vmatrix} 1 & -3 & \lambda \\ \lambda & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{-3\lambda^2 + 36\lambda - 104}$

$\Delta = 48 > 0$

$\det M_s = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-36+\sqrt{48}}{-6}$, $\lambda_2 = \frac{36+\sqrt{48}}{6}$

<u>1er cas</u> : $\lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_1, \lambda_2\}$ on a $\det M_s \neq 0$

le système (S) est de Cramer admet une solutions unique :

$$x = \frac{\Delta_x}{\det M_s} = \frac{13\lambda - 48}{-3\lambda^2 + 36\lambda - 104}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\det M_s} = \frac{2\lambda^2 - 15\lambda + 88}{-3\lambda^2 + 36\lambda - 104}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\det M_s} = \frac{-3\lambda + 50}{-3\lambda^2 + 36\lambda - 104}$$

1,5

2ème Cas : si $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$

On extraire un sous système de Cramer

$$(S') : \begin{cases} -8y + 12z = 1 - \lambda x \\ -3y + 4z = 2 - 3x \end{cases}$$

$\det M_{S'} = \begin{vmatrix} -8 & 12 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ Donc (S') admet une solutions unique (y, z)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda x & 12 \\ 2-3x & 4 \end{vmatrix}}{4} = \frac{(-4\lambda + 36)x - 20}{4} = \boxed{(-\lambda + 8)x - 5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -8 & 1-\lambda x \\ -3 & 2-3x \end{vmatrix}}{4} = \boxed{\frac{(24 - 3\lambda)x - 13}{4}}$$

on remplace dans la 1ère equations des système (S) on obtient :

$$(36\lambda - 104 - 3\lambda^2)x = 13\lambda - 48 \ldots\ldots (E)$$

si : $\lambda = \lambda_1 = \frac{36 - \sqrt{48}}{6}$; $(E) \Rightarrow \underbrace{0}_{0} . x = 13\left(\frac{36 - \sqrt{48}}{6}\right) - 48 \neq 0$

Contradiction Donc le système (S) n'admet pas solutions.

si : $\lambda = \lambda_2 = \frac{36 + \sqrt{48}}{6}$: $(E) \Rightarrow \underbrace{0}_{0} . x = 13\left(\frac{36 + \sqrt{48}}{\cancel{8}6}\right) - 48 \neq 0$

Contradiction.

Donc le système (S) n'admet pas solutions.

118