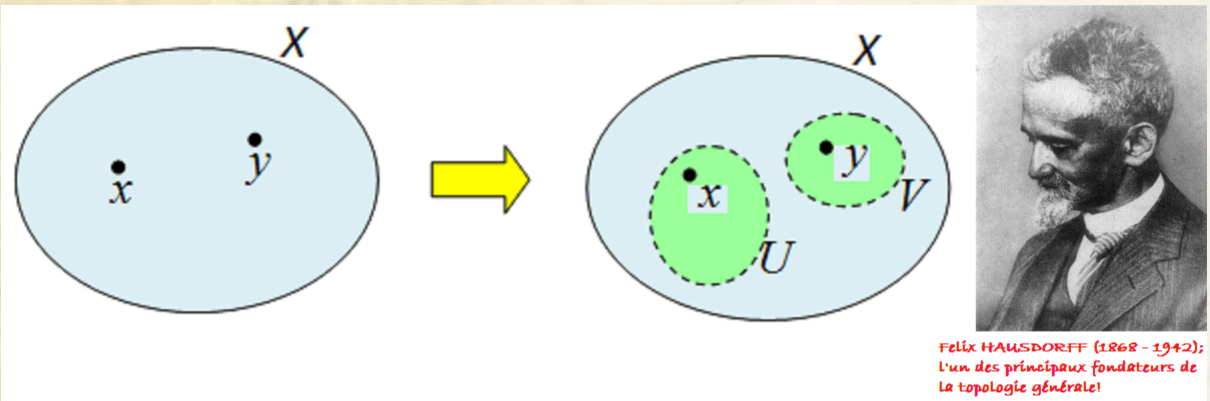
Polycopié de Topologie générale

مدخل إلى الطّبولوجيا العامة

Destiné aux étudiants de la :

2ème année Licence de Mathématiques



Felix HAUSDORFF (1868 - 1942); L'un des principaux fondateurs de la topologie générale!

FARHI Bakir

Université A. Mira de Béjaia - Algérie

Préface

Ce polycopié est issu du cours de *Topologie générale* de la 2$^{\text{ème}}$ année Licence de Mathématiques que j'ai le privilège de diriger depuis l'année universitaire 2016-2017 à l'Université A. Mira de Béjaia. Il est composé de 8 chapitres, chacun étant poursuivi d'une série d'exercices dont certains sont étoilés, signifiant qu'ils sont conçus pour être résolus en classe (c'est-à-dire aux travaux dirigés). Les exercices non étoilés sont -par contre- laissés aux soins de l'étudiant ; on ne les résout que s'il reste du temps après avoir fait tout ce qui est nécessaire. À la fin de ces chapitres, j'ai inclus également quelques sujets d'examen des années précédentes pour aider les étudiants à mieux se préparer aux épreuves de la fin du semestre. J'ai essayé de mon mieux d'alléger le contenu du polycopié en renvoyant au TD certaines démonstrations techniques. Par contre, aucun résultat n'est admis sans démonstration à l'exception du théorème de Tychonov (dans son cas général). Aussi, j'ai commencé mon cours en introduisant en même temps *les espaces métriques* et *les espaces topologiques* ; ce qui a pour objectif de transmettre au lecteur l'idée intuitive de la construction axiomatique des *espaces topologiques*. Cette idée est d'ailleurs avancée dans l'Introduction avant sa réalisation au cours. Ceci dit, le polycopié est en sa 1$^{\text{ère}}$ version et toute suggestion ou avis de la part des lecteurs (en particulier des étudiants) est la bienvenue ; cela m'aidera à perfectionner le polycopié progressivement au fils du temps. Je compte également sur les lecteurs pour m'informer de toute erreur (mathématique ou typographique) qu'ils prélèveront.

J'espère enfin que ce polycopié constituera un support utile pour nos étudiants et les aidera à améliorer leurs résultats aux examens, qui ont été jusque là à la limite de la médiocrité pour l'écrasante majorité d'entre eux. Ci-dessous sont décrits brièvement les contenus des chapitres :

Au 1$^{\text{er}}$ chapitre, nous présentons des généralités sur les espaces métriques et topologiques ; il s'agit bien d'un premier contact avec ces espaces. Cette présentation est illustrée par quelques exemples usuels et dotée de quelques toutes premières propriétés.

Au 2$^{\text{ème}}$ chapitre, nous étudions quelques notions de base de Topologie générale comme celles de *fermeture*, *intérieur*, *frontière*, *voisinage*, etc. La théorie élémentaire des ensembles (en principe acquise dès la première année) permet de marier toutes ces notions pour obtenir un bouquet de jolis résultats qui constituent en fait la base de toute la suite. Nous terminons ce chapitre par l'introduction des *espaces séparés* que les anglophones appellent *Hausdorff spaces*. Le grand intérêt de ces espaces sera précisé au chapitre d'après.

Au 3$^{\text{ème}}$ chapitre, nous rentrons dans le vif de la théorie en introduisant les notions de *limite* et de *continuité*. L'intérêt des *espaces topologiques séparés* s'éclaircira alors : dans ces espaces, la limite (d'une suite ou d'une fonction, lorsqu'elle existe) est unique. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous étudions la très importante notion d'*homéomorphisme*, avec un premier exemple non trivial selon lequel « tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ ». Nous étudions aussi les notions de *topologie induite* et de *topologie produit* qui correspondent respectivement à celles d'*un sous-espace topologique* et d'*un espace topologique produit*.

Au 4ème chapitre, nous rentrons dans le vif de la théorie des *espaces métriques* en commençant par expliciter leur lien avec *les espaces topologiques* (i.e., la topologie associée à une distance). Nous verrons en fait qu'un espace métrique est un espace topologique *séparé* mais que l'inverse n'a pas toujours lieu ; ce qui fait que la catégorie des espaces métriques est une sous-catégorie *propre* de la catégorie des espaces topologiques. Par suite, nous réétudions les notions de *limite* et de *continuité* (déjà vues au chapitre d'avant sur les espaces topologiques) dans le cas "particulier" des espaces métriques. Nous verrons à ce moment là que ces notions s'obtiennent plus intuitivement sur un espace métrique que sur un espace topologique général. Nous enchaînons avec des notions qui sont propres aux espaces métriques (i.e., qui n'ont pas lieu sur un espace topologique général), dont celles de *continuité uniforme*, *application lipschitzienne* et *isométrie*. Nous élargissons aussi la notion de « distance entre deux points d'un espace métrique » en définissant la « distance entre deux parties d'un espace métrique », comme nous définissons par ailleurs la notion de *diamètre* d'une partie d'un espace métrique. Nous verrons ensuite quelques *formulations séquentielles* (i.e., utilisant des suites) qui caractérisent des propriétés d'une partie d'un espace métrique ou d'une application entre deux espaces métriques. Nous terminons le chapitre en question par l'introduction des notions de *distance induite* et *distance produit*, qui correspondent respectivement à celles d'*un sous-espace métrique* et d'*un espace métrique produit*, ainsi que les notions de *distances équivalentes* et *distances topologiquement équivalentes*.

Au 5ème chapitre, nous abordons *les espaces complets* qui sont quelque part les plus utiles de tous les espaces métriques. Ces espaces extrêmement importants et riches en applications réapparaîtront ultérieurement, un peu partout, dans le cursus d'un étudiant en Mathématiques ; pour cette raison, celui-ci doit maîtriser parfaitement le contenu de ce chapitre. Trois théorèmes fondamentaux sont présentés : *le théorème des fermés emboîtés de Cantor*, *le théorème du point fixe de Picard* et *le théorème de Baire*.

Au 6ème chapitre, nous abordons *les espaces compacts*. La définition générale de ces espaces très importants est abstraite ; elle se sert de la propriété dite *de Borel-Lebesgue* qui, intuitivement, est difficile à cerner. Cependant, c'est elle la clef de démonstration d'un grand nombre de théorèmes fondamentaux sur la compacité. Lorsqu'on se restreint aux espaces métriques, d'autres caractérisations plus cernables de la compacité sont possibles ; parmi celles-ci, on donne la caractérisation de *Bolzano-Weierstrass* (un espace métrique E est compact ssi toute suite de E possède une sous-suite convergente) et la caractérisation utilisant la notion d'*espace métrique totalement borné* (un espace métrique E est compact si et seulement s'il est complet et totalement borné). Il est très important de souligner que la compacité est une propriété *intrinsèque* (i.e., une partie compacte d'un espace topologique X reste compacte par rapport à n'importe quel autre sous-espace topologique de X qui la contient, et vice versa). Nous verrons par suite quelques théorèmes fondamentaux liant la compacité à la continuité. Parmi ceux là, le théorème selon lequel « la compacité se conserve par une application continue » et les deux *théorèmes de Heine*, déjà vus en 1ère année dans le cas particulier correspondant à $\mathbb{R}$. On termine le chapitre en question par *le théorème de Tychonov* selon lequel « tout produit d'espaces topologiques compacts est compact ». Cet important théorème, dont la démonstration fait appel à des arguments très raffinés de la théorie des ensembles, sera démontré uniquement dans son cas "facile" où le produit en question est fini. Quant aux espaces localement compacts, nous nous contentons de donner juste leur définition !

Au 7ème chapitre, nous abordons *les espaces connexes*. Intuitivement, une partie connexe d'un espace topologique est une partie d'un seul tenant (i.e., faite d'un seul morceau) ; ainsi, dans $\mathbb{R}$ par exemple, les parties connexes sont simplement *ses intervalles*. Tout comme la compacité, la connexité est -elle aussi- une propriété *intrinsèque* (i.e., non *relative*). La liaison entre la connexité et la continuité est aussi un des sujets importants de ce chapitre. D'une part, tout comme la compacité, nous montrons que la connexité se conserve aussi par continuité, et d'autre part, nous généralisons *le théorème des valeurs intermédiaires* (vu en terminale et en 1ère année dans son cas particulier correspondant à $\mathbb{R}$). Nous enchaînons ensuite par l'importante notion de *composante connexe* d'un espace topologique, puis nous montrons qu'un produit fini d'espaces connexes est connexe. Nous terminons avec la notion de *connexité par arc* qui est un peu plus forte que la connexité (bien que dans les cas usuels, elle lui est équivalente).

Au 8ème et dernier chapitre, nous abordons *les espaces vectoriels normés* (**e.v.n** en abrégé) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ces espaces, qui constituent une sous-catégorie spéciale de la catégorie des espaces métriques, on dispose plus fortement d'une *norme* à la place d'une *distance*. Lorsque la complétude affecte ces espaces, ils deviennent encore plus riches en applications ; on les appelle *les espaces de Banach*. Le cas des **e.v.n** de dimensions finies est totalement éclairci : on peut dire grosso-modo qu'on a affaire à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Pour ces derniers, tout devient simple : toutes les normes sont équivalentes ; une partie compacte n'est autre qu'une partie fermée et bornée ; tous sont des espaces de Banach, etc. C'est par contre en dimension infinie que les choses deviennent plus compliquées ; le cas des *espaces fonctionnels* (i.e., **e.v.n** où les vecteurs sont des fonctions) est particulièrement important et le module d'*Analyse fonctionnelle* (qu'on enseigne en 3ème année) est lui est entièrement consacré ! Le plus important dans ce chapitre est l'étude des *applications linéaires continues* d'un **e.v.n** dans un autre **e.v.n**. Nous verrons que ces applications linéaires continues constituent à leur tour un **e.v.n** très remarquable et très riche en applications. Nous terminons le chapitre en question par l'important *théorème de F. Riesz* selon lequel « un **e.v.n** est de dimension finie ssi on a équivalence entre une partie compacte et une partie fermée et bornée de cet espace ».

Nous clôturons ce polycopié avec quelques sujets d'examen et d'interrogation des années précédentes, suivis d'une bibliographie-sitographie comportant d'importantes références de Topologie générale dans les trois langues : le français, l'arabe et l'anglais.

Bakir FARHI
Béjaia, le 11 septembre 2017

Notations

ssi	Abrégé de l'expression « si et seulement si ».
$:=$	Egalité par définition qu'on représente aussi parfois par le signe $\overset{\text{déf}}{=}$.
$\mathrm{sgn}(f)$	Le signe d'une expression f.
$\square$	Symbole indiquant la fin d'une démonstration.
TD	Abrégé de l'expression « Travaux Dirigés ».
* Exercice	Lorsqu'un exercice est précédé d'une étoile, cela veut dire qu'il sera traité au TD.
τ	Notation standard d'une topologie.
τ_{us}	La topologie usuelle de $\mathbb{R}$.
τ_{gros}	La topologie grossière d'un ensemble non vide donné.
τ_{dis}	La topologie discrète d'un ensemble non vide donné.
τ_{cof}	La topologie cofinie d'un ensemble non vide X. Si X est fini, on a $\tau_{\mathrm{cof}} = \tau_{\mathrm{dis}}$; pour cette raison, on ne parle (généralement) de la topologie cofinie que lorsque l'ensemble en question est infini.
$\mathscr{V}(x)$	L'ensemble de tous les voisinages d'un point x d'un espace topologique donné.
$\mathscr{V}(A)$	L'ensemble de tous les voisinages d'une partie A d'un espace topologique donné.
$\mathscr{B}(x)$	Une base de voisinages (appelée aussi « un système fondamental de voisinages ») d'un point x d'un espace topologique donné.
$\mathscr{B}$	Une base d'un espace topologique donné.
$\overline{A}$	L'adhérence d'une partie A d'un espace topologique donné.
$\overset{\circ}{A}$	L'intérieur d'une partie A d'un espace topologique donné.
$\mathrm{Fr}(A)$	La frontière d'une partie A d'un espace topologique donné.
τ_A	La topologie induite sur A de la topologie de X (lorsque A est une partie d'un espace topologique X).
$\pi_i : X \to X_i$	La $i^{\text{ème}}$ projection canonique d'un espace topologique produit $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).
d	Notation standard d'une distance.
d_{us}	La distance usuelle de $\mathbb{R}$.
E^F	L'ensemble de toutes les applications de F dans E (où E et F sont des ensembles non vides).
$\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Lorsqu'il est muni des deux lois de composition $+$ (addition usuelle des applications) et $\cdot$ (multiplication d'un réel par une application), qui sont respectivement interne et externe, il devient un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
$\mathscr{C}^n([a,b],\mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$). C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$).

$\mathscr{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$). C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$).
d_1	C'est une distance définie sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ entre autres. — Sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par : $$d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - y_i \rvert \qquad \big(\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n\big).$$ — Sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par : $$d_1(f,g) := \int_a^b \lvert f(x) - g(x) \rvert \, dx \qquad \big(\forall f,g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})\big).$$
d_2	Elle désigne la distance euclidienne (sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ entre autres). — Sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par : $$d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - y_i \rvert^2} \qquad \big(\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n\big).$$ — Sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par : $$d_2(f,g) := \sqrt{\int_a^b \lvert f(x) - g(x) \rvert^2 \, dx} \qquad \big(\forall f,g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})\big).$$
d_p	Elle désigne la distance de Hölder d'exposant p (sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ entre autres), où $p \in \mathbb{N}^*$. — Sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par : $$d_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \left(\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - y_i \rvert^p\right)^{1/p} \qquad \big(\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n\big).$$ — Sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par : $$d_p(f,g) := \left(\int_a^b \lvert f(x) - g(x) \rvert^p \, dx\right)^{1/p} \qquad \big(\forall f,g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})\big).$$

d_∞	C'est une distance définie sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ entre autres. — Sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par : $$d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lvert x_i - y_i\rvert \qquad \big(\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n\big).$$ — Sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par : $$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in[a,b]} \lvert f(x) - g(x)\rvert \qquad \big(\forall f,g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})\big).$$ Sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, cette distance d_∞ est connue sous le nom de « la distance de la convergence uniforme ». On peut montrer que l'on a : $d_\infty = \lim_{p\to+\infty} d_p$ (que se soit sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$).
$B(a,r)$	La boule ouverte de centre a et de rayon r (où a est un point d'un espace métrique donné et $r \geqslant 0$).
$\overline{B}(a,r)$	La boule fermée de centre a et de rayon r (où a est un point d'un espace métrique donné et $r \geqslant 0$).
$S(a,r)$	La sphère de centre a et de rayon r (où a est un point d'un espace métrique donné et $r \geqslant 0$).
τ_d	La topologie associée à la distance d d'un espace métrique donné.
d_X	La distance considérée sur un ensemble X. Cette notation est utilisée lorsqu'on dispose de plusieurs espaces métriques X, Y, Z, etc. Les distances respectives de ces derniers sont alors (généralement) désignées par d_X, d_Y, d_Z, etc.
$d(x,A)$	La distance d'un point x par rapport à une partie A d'un espace métrique donné.
$d(A,B)$	La distance entre deux parties A et B d'un espace métrique donné.
$\delta(A)$	Le diamètre d'une partie A d'un espace métrique donné.
d_A	La distance induite sur A de la distance de X (lorsque A est une partie d'un espace métrique X).
$\mathrm{cl}(x)$	C'est une notation utilisée exclusivement au chapitre 7. Elle désigne la composante connexe d'un point x d'un espace topologique donné. On montre que $\mathrm{cl}(x)$ est la plus grande partie connexe, de l'espace topologique en question, qui contient x.
e.v.n	Abrégé de l'expression « espace vectoriel normé ».
0_E	Le vecteur nul d'un espace vectoriel E.
$\dim E$	La dimension d'un espace vectoriel E.
$\operatorname{Ker} f$	Le noyau d'une application linéaire f d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel.
$\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n)$	Le sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel donné, engendré par des vecteurs $x_1,\dots,x_n$ de cet espace (où n est un entier strictement positif).
$\lVert\cdot\rVert$	Notation standard d'une norme sur un espace vectoriel donné, lequel est défini sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\\|\cdot\\|_1$	C'est une importante norme qu'on peut définir sur plusieurs $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dont $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ et $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. — Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$), elle est définie par : $$\\|\mathbf{x}\\|_1 := \sum_{i=1}^n \lvert x_i\rvert \qquad \big(\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n\big).$$ — Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$), elle est définie par : $$\\|f\\|_1 := \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx \qquad \big(\forall f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})\big).$$
$\\|\cdot\\|_2$	C'est la très importante « norme euclidienne » qu'on peut définir sur plusieurs $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dont $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ et $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. — Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$), elle est définie par : $$\\|\mathbf{x}\\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n \lvert x_i\rvert^2} \qquad \big(\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n\big).$$ — Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$), elle est définie par : $$\\|f\\|_2 := \sqrt{\int_a^b \lvert f(x)\rvert^2\,dx} \qquad \big(\forall f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})\big).$$
$\\|\cdot\\|_p$	C'est l'importante « norme de Hölder » d'exposant p (où $p\in\mathbb{N}^*$) qu'on peut définir sur plusieurs $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dont $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ et $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. — Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$), elle est définie par : $$\\|\mathbf{x}\\|_p := \left(\sum_{i=1}^n \lvert x_i\rvert^p\right)^{1/p} \qquad \big(\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n\big).$$ — Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$), elle est définie par : $$\\|f\\|_p := \left(\int_a^b \lvert f(x)\rvert^p\,dx\right)^{1/p} \qquad \big(\forall f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})\big).$$

$\|\cdot\|_\infty$	C'est une importante norme qu'on peut définir sur plusieurs $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dont $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ et $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. — Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par : $$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\| \qquad \big(\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\big).$$ — Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par : $$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} \|f(x)\| \qquad \big(\forall f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})\big).$$ Sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, cette norme $\|\cdot\|_\infty$ est connue sous le nom de « la norme de la convergence uniforme ». On peut montrer que l'on a : $\|\cdot\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|\cdot\|_p$ (que se soit sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$).
$\|\cdot\|_E$	La norme considérée sur un $\mathbb{K}$-**e.v.n** E (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Cette notation est utilisée lorsqu'on dispose de plusieurs $\mathbb{K}$-**e.v.n** E, F, G, etc. Les normes respectives de ces derniers sont alors (généralement) désignées par $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_G$, etc.
$\mathscr{L}(E,F)$	L'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, où E et F sont des espaces vectoriels définis sur un même corps commutatif $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\mathscr{L}_c(E,F)$	L'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, où E et F sont des espaces vectoriels définis sur un même corps commutatif $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ce $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E,F)$ est muni d'une importante norme (voir ci-dessous) ; c'est donc, à son tour, un $\mathbb{K}$-**e.v.n**.
$\vert\vert\vert\cdot\vert\vert\vert$	Notation standard de la norme de $\mathscr{L}_c(E,F)$ (où E et F sont des espaces vectoriels normés définis sur un même corps commutatif $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), définie par : $$\vert\vert\vert f \vert\vert\vert := \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \qquad (\forall f \in \mathscr{L}_c(E,F)).$$ Cette importante norme de $\mathscr{L}_c(E,F)$ est appelée « la norme subordonnée » aux normes $\|\cdot\|_E$ de E et $\|\cdot\|_F$ de F.

Table des matières

Introduction

La Topologie générale a pour but de généraliser les notions de *limite*, *convergence*, *continuité* et bien d'autres qui s'apparentent à l'analyse réelle. Au lieu de se donner un espace de nombres (comme $\mathbb{R}$) ou de couples de nombres (comme $\mathbb{R}^2$), on se donne un espace (i.e., un ensemble) plus général X et on définit dedans les notions précédemment citées. Bien évidemment, ceci n'est possible que lorsqu'on munit X d'une certaine structure. Le *challenge* est alors de chercher la structure minimale qui rend tenables ces notions tout en préservant le maximum possible de grands théorèmes classiques d'analyse. L'idée très intuitive avancée par M. Fréchet en 1906 consiste à munir X d'une *distance* (i.e., d'une application $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie certaines propriétés). On parle dans ce cas d'*espace métrique*. Dans les espaces métriques, la définition des notions de limite et de continuité sont évidentes :

1. Une suite $(x_n)_n$ d'éléments d'un espace métrique (X, d) *converge* vers un élément $x \in X$ si $d(x_n, x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Etant donnés X et Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application, on dit que f est *continue* en un point $x \in X$ si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X, convergeant vers x, la suite $(f(x_n))_n$ d'éléments de Y converge vers $f(x)$.

Les parties d'un espace métrique n'ont pas toutes la même importance ; certaines parties F, dites *fermées*, satisfont la remarquable propriété selon laquelle « toute suite d'éléments de F, qui converge dans X, a pour limite un élément de F ». Par exemple, dans $\mathbb{R}$, un intervalle fermé $[a, b]$ est une partie fermée alors que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ne l'est pas.

Bien que les espaces métriques répondent pas mal à l'objectif initialement envisagé, ils restent insuffisants car on a remarqué qu'il existe des espaces importants (comme par exemples les produits cartésiens d'un nombre infini non dénombrable d'espaces métriques) qui ne sont pas *métrisables* (i.e., qu'on ne peut pas munir d'une distance qui rend continues certaines applications élémentaires[1]). Il s'est avéré donc nécessaire d'étendre la notion d'espace métrique pour inclure ces derniers. C'est précisément l'étude des *voisinages* d'un point dans le plan (initiée par Hilbert) qui inspira à F. Hausdorff en 1914 une extension des espaces métriques aux espaces plus généraux, dits *topologiques*. Il semble que la théorie de Hausdorff satisfait pleinement les besoins de l'Analyse et même plus ; c'est pour cela qu'il est inutile d'en chercher davantage d'extensions !

Actuellement, les espaces topologiques interviennent de façon cruciale dans plusieurs branches de mathématiques dont *le calcul différentiel*, *le calcul intégral*, *l'analyse complexe*, *l'analyse numérique*, *l'analyse fonctionnelle*, *la géométrie différentielle* et *la topologie algébrique*.

Bakir FARHI
Béjaia, le 9 septembre 2016

1. Pour le cas d'un produit cartésien (infini non dénombrable) d'espaces métriques, les applications élémentaires dont il s'agit sont les projections canoniques.

Chapitre 1

Généralités sur les espaces métriques et topologiques

1.1 Espaces métriques

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1. *Soit X un ensemble non vide. Une application $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$ est appelée* **distance** *sur X si elle satisfait les propriétés suivantes :*

(i) $\forall x \in X : d(x,x) = 0.$

(ii) $\forall x, y \in X : d(x,y) = d(y,x).$

(iii) $\forall x, y, z \in X : d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$

(iv) $\forall x, y \in X : d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y.$

Quelques remarques :

1. La propriété (ii) d'une distance d s'exprime littérairement en disant que d est **symétrique**.
2. L'inégalité de la propriété (iii) s'appelle **l'inégalité triangulaire**.
3. Si d satisfait les trois premières propriétés (i), (ii) et (iii) mais pas forcément la quatrième, on dira que d est une **semi-distance** sur X.
4. La propriété (iv) s'appelle **l'axiome de séparation** (le sens de cette appellation sera précisé plus loin).

Définition 1.2. *Un* ***espace métrique*** *est un couple (X, d), constitué d'un ensemble non vide X et d'une distance d sur X. Lorsque d est seulement une semi-distance, le couple (X, d) est appelé* ***espace semi-métrique****.*

Exemples :

1. L'application $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d(x,y) := |x - y| \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

constitue une distance sur $\mathbb{R}$; on l'appelle **la distance usuelle** de $\mathbb{R}$ et on la désigne souvent (dans ce polycopié) par d_{us}.

2. L'application $d : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| \qquad (\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})$$

constitue une distance sur $\mathbb{C}$; on l'appelle **la distance usuelle** de $\mathbb{C}$ et on la désigne souvent (dans ce polycopié) par d_{us}.

3. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}, \qquad \forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

constitue une distance sur $\mathbb{R}^n$; on l'appelle **la distance euclidienne** de $\mathbb{R}^n$.

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}, \qquad \forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

constitue une distance sur $\mathbb{R}^n$; on l'appelle **la distance de Hölder d'exposant** p de $\mathbb{R}^n$. On note aussi par d_∞ la limite de d_p lorsque p tend vers l'infini. On peut montrer qu'on a :

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\left(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\right), \qquad \forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

et que d_∞ constitue une distance sur $\mathbb{R}^n$.

Remarquer que dans $\mathbb{R}$, toutes les distances d_p ($p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$) coïncident et donnent la distance usuelle de $\mathbb{R}$.

N.B : Le fait que d_1 et d_∞ constituent des distances sur $\mathbb{R}^n$ sont faciles à montrer (voir l'exercice 1.1) alors que les faits que les d_p (pour $p \geqslant 2$) sont des distances sur $\mathbb{R}^n$ sont beaucoup moins faciles (voir l'exercice 1.2 pour le cas $p = 2$).

4. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, On définit les distances d_p ($p \in \mathbb{N}^*$) et d_∞ sur $\mathbb{C}^n$ comme au point ci-dessus, en remplaçant juste les valeurs absolues par les modules. On appelle d_2 **la distance euclidienne** de $\mathbb{C}^n$ et d_p ($p \in \mathbb{N}^*$) **la distance de Hölder d'exposant** p de $\mathbb{C}^n$.

5. Etant donnés a et b deux nombres réels tels que $a < b$, posons $E := \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors chacune des applications d_1, d_2 et d_∞ qui vont suivre, de E^2 dans $\mathbb{R}^+$, constitue une distance sur E :

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$
$$d_2(f,g) := \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2\, dx} \qquad (\forall f, g \in E).$$
$$d_\infty(f,g) := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

La distance d_∞ est appelée **la distance de la convergence uniforme**.

6. Soit X un ensemble non vide et soit $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :
$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases} \qquad (\forall x, y \in X).$$
On montre alors (voir l'exercice 1.3) que d constitue une distance sur X ; on l'appelle **la distance discrète** de X.

1.1.2 Quelques parties importantes d'un espace métrique

Définition 1.3. *Soit (X,d) un espace métrique et soient a un élément de X et r un réel strictement positif.*

1. *On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r, que l'on note $B(a,r)$, la partie de X définie par :*
$$B(a,r) := \{x \in X : d(a,x) < r\}.$$
2. *On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r, que l'on note $\overline{B}(a,r)$, la partie de X définie par :*
$$\overline{B}(a,r) := \{x \in X : d(a,x) \leqslant r\}.$$
3. *On appelle **sphère** de centre a et de rayon r, que l'on note $S(a,r)$, la partie de X définie par :*
$$S(a,r) := \{x \in X : d(a,x) = r\}.$$

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}$, muni de sa distance usuelle, une boule ouverte de centre a ($a \in \mathbb{R}$) et de rayon r ($r > 0$) est l'intervalle ouvert $]a-r, a+r[$ et une boule fermée de centre a et de rayon r est l'intervalle fermé $[a-r, a+r]$. Puisque tout intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$) peut s'écrire sous la forme $]a-r, a+r[$ (il suffit de prendre $a = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $r = \frac{\beta-\alpha}{2}$), on en déduit que :

   Les boules ouvertes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ouverts bornés.

   On montre de la même manière que :

Les boules fermées de $\mathbb{R}$ sont les intervalles fermés bornés.

2. Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa distance euclidienne, une boule ouverte de centre a ($a \in \mathbb{R}^2$) et de rayon r ($r > 0$) est le disque ouvert de centre a et de rayon r et une boule fermée de centre a ($a \in \mathbb{R}^2$) et de rayon r ($r > 0$) est le disque fermé de centre a et de rayon r.

3. Soit X un ensemble non vide muni de sa distance discrète. Alors pour tout $a \in X$ et tout $r > 0$, on a :

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r \leqslant 1 \\ X & \text{si } r > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \overline{B}(a,r) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r < 1 \\ X & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases}.$$

Les boules (ouvertes ou fermées) de X sont donc les singletons de X et X lui même.

1.2 Espaces topologiques

Définition 1.4. *Soient X un ensemble non vide et τ une famille de sous-ensembles de X. On dit que τ est une **topologie** sur X si elle satisfait les axiomes suivants :*

(i) $\varnothing \in \tau$ *et* $X \in \tau$.

(ii) $\forall U, V \in \tau : \quad U \cap V \in \tau$.

(iii) $\forall (U_i)_{i \in I}$ *une famille (finie ou infinie) d'éléments de τ (donc de sous-ensembles de X), on a :* $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Appellations et remarques :

1. Les axiomes (i), (ii) et (iii) de la définition précédente s'appellent **les axiomes de Hausdorff** en hommage au mathématicien allemand Felix Hausdorff (1868-1942) qui a écrit le premier livre de topologie générale en 1914.

2. Un couple (X, τ) constitué d'un ensemble non vide X et d'une topologie τ sur X s'appelle **espace topologique**. S'il n y a pas d'ambiguïté sur la topologie τ définie sur X, on écrit X au lieu de (X, τ).

3. Etant donné (X, τ) un espace topologique, on appelle **ouvert** de X toute partie de X appartenant à τ. On appelle **fermé** de X le complémentaire d'un ouvert de X.

4. La propriété (ii) d'une topologie s'étend facilement par récurrence comme ceci :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau : \quad \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau.$$

Autrement dit : « Toute intersection **finie** d'ouverts de X est un ouvert de X ».

5. La propriété (ii) d'une topologie, étendue comme expliqué au point ci-dessus, s'exprime littérairement en disant que : **τ est stable par intersection finie**. De même, la propriété (iii) d'une topologie s'exprime littérairement en disant que : **τ est stable par réunion**.

Exemples :

1. **La topologie usuelle de $\mathbb{R}$:** Soit τ la famille des parties de $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire comme réunion (finie ou infinie) d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$. Alors τ constitue une topologie sur $\mathbb{R}$. En effet, on a :

   (i) $\varnothing \in \tau$ (car $\varnothing$ est une réunion vide d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$) et $\mathbb{R} \in \tau$ $\Big($car $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]-n, n[$ est bien une réunion d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}\Big)$.

   (ii) Soient $U, V \in \tau$. On peut écrire (par définition même de τ) : $U = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$ et $V = \bigcup_{j \in J}]c_j, d_j[$ $\big($avec les a_i, b_i, c_j, d_j $(i \in I, j \in J)$ sont des réels tels que $a_i < b_i$ pour tout $i \in I$ et $c_j < d_j$ pour tout $j \in J\big)$. D'après la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, on a :

   $$U \cap V = \left(\bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[\right) \bigcap \left(\bigcup_{j \in J}]c_j, d_j[\right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \left(]a_i, b_i[\cap]c_i, d_i[\right).$$

   Mais puisque l'intersection de deux intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ est ou bien vide ou bien égale à un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ alors cette dernière écriture de $U \cap V$ montre bien que $U \cap V \in \tau$.

   (iii) Soit $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments de τ. Comme (par définition même de τ) chaque ensemble U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ est une réunion d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ alors leur réunion $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ est une réunion de réunions d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$; c'est bien donc une réunion d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$. D'où : $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$.

   La famille τ vérifie bien les trois axiomes de Hausdorff ; elle constitue donc une topologie sur $\mathbb{R}$. Cette topologie τ s'appelle **la topologie usuelle** de $\mathbb{R}$.

2. **La topologie discrète d'un ensemble :** Soit X un ensemble non vide. Il est bien claire que $\tau = \mathscr{P}(X)$ constitue une topologie sur X. Cette topologie s'appelle **la topologie discrète** de X.

3. **La topologie grossière d'un ensemble :** Soit X un ensemble non vide. Il est bien claire que $\tau = \{\varnothing, X\}$ constitue une topologie sur X. Cette topologie s'appelle **la topologie grossière** de X.

Les propriétés des fermés d'un espace topologique :

Proposition 1.5. *Soient (X, τ) un espace topologique et $\mathscr{F}$ la famille de tous les fermés de X. Alors, on a :*

(i) $\varnothing \in \mathscr{F}$ *et* $X \in \mathscr{F}$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}$: $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n \in \mathscr{F}$.

(iii) $\forall (F_i)_{i \in I}$ *une famille (finie ou infinie) d'éléments de $\mathscr{F}$ (i.e., de fermés de X), on a :* $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathscr{F}$.

Démonstration.

(i) On a : $\complement_X \varnothing = X \in \tau$, ce qui montre que $\varnothing \in \mathscr{F}$. De même, on a : $\complement_X X = \varnothing \in \tau$, ce qui montre que $X \in \mathscr{F}$.

(ii) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}$. D'après les lois de De Morgan, on a :

$$\complement_X (F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n) = (\complement_X F_1) \cap (\complement_X F_2) \cap \cdots \cap (\complement_X F_n).$$

Comme $F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}$ alors $\complement_X F_1, \dots, \complement_X F_n \in \tau$. Et puisque τ est stable par intersection finie, il s'ensuit que $(\complement_X F_1) \cap (\complement_X F_2) \cap \cdots \cap (\complement_X F_n) \in \tau$, c'est-à-dire $\complement_X (F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n) \in \tau$. Ce qui entraîne que $(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n) \in \mathscr{F}$, comme il fallait le prouver.

(iii) Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille d'élément de $\mathscr{F}$ (c'est-à-dire une famille de fermés de X). D'après les lois de De Morgan, on a :

$$\complement_X \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\complement_X F_i).$$

Comme les ensembles $\complement_X F_i$ ($i \in I$) sont tous des ouverts de X (car les F_i sont tous des fermés de X) alors leur réunion $\bigcup_{i \in I} (\complement_X F_i)$ est un ouvert de X ; d'où $\complement_X \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\complement_X F_i) \in \tau$. Ce qui entraîne que $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathscr{F}$, comme il fallait le prouver.

La proposition est démontrée. □

Remarques :

1. L'axiome (ii) de la proposition s'exprime littérairement en disant que : $\mathscr{F}$ **est stable par réunion finie**. De même, l'axiome (iii) de la proposition s'exprime littérairement en disant que : $\mathscr{F}$ **est stable par intersection**.
2. En utilisant les formules de De Morgan, on peut montrer la réciproque de la proposition précédente. Plus précisément, on montre que si X est un ensemble non vide et $\mathscr{F}$ une famille de parties de X satisfaisant les propriétés (i), (ii) et (iii) de la proposition en question, alors $\mathscr{F}$ est la famille de tous les fermés de X relativement à une certaine topologie de X. Ainsi, un espace topologique X peut être caractérisé par la famille de tous ses fermés ; c'est-à-dire par une famille $\mathscr{F}$ de parties de X qui satisfait les propriétés (i), (ii) et (iii) de la proposition.

Comparaison entre deux topologies d'un même espace

Définition 1.6. *Soient X un ensemble non vide et τ_1 et τ_2 deux topologies sur X. On dit que τ_1 est **plus fine** que τ_2 si $\tau_1 \supset \tau_2$; autrement dit, si tout ouvert de X par rapport à τ_2 est aussi un ouvert de X par rapport à τ_1.*
*Inversement, on dit que τ_1 est **moins fine** que τ_2 si $\tau_1 \subset \tau_2$.*

Exemples : Etant donné X un ensemble non vide, la topologie discrète est la plus fine de toutes les topologies de X et la topologie grossière est la moins fine de toutes les topologies de X.

Exercices

⋆ **Exercice 1.1.** Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on considère d_1 et d_∞ les applications de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par :

$$\begin{aligned} d_1\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ d_\infty\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \end{aligned} \qquad (\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

1. Montrer que d_1 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{R}^n$.
2. On prend $n = 2$. Représenter graphiquement les boules ouvertes et les boules fermées de $\mathbb{R}^2$ relativement à chacune de ces deux distances.

Exercice 1.2 (La distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$).
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d_2\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \qquad (\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

1. Montrer que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2\right)$$
(c'est l'identité de Lagrange).
2. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$
(c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
3. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, on a :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$
(c'est l'inégalité de Minkowski).
4. Montrer que d_2 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

⋆ **Exercice 1.3** (La distance discrète d'un ensemble).
Soient E un ensemble non vide et $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

— Montrer que d est une distance sur E.

⋆ **Exercice 1.4.** Soit (E, d) un espace métrique. Montrer qu'on a pour tous $x, y, z \in E$:

$$d(x, z) \geqslant |d(x, y) - d(y, z)| .$$

⋆ **Exercice 1.5.** Soit (E, d) un espace métrique et soient d', d'' et $d^\star$ les applications de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ données par :

$$\begin{aligned} d' &:= \min(1, d) \\ d'' &:= \frac{d}{1+d} \\ d^\star &:= \arctan d. \end{aligned}$$

— Montrer que d', d'' et $d^\star$ sont des distances sur E.

⋆ **Exercice 1.6.** Soit (E, d) un espace métrique.

— Montrer que pour tous $x, y \in E$, avec $x \neq y$, il existe deux réels strictement positifs r et s tels que :

$$B(x, r) \cap B(y, s) = \varnothing.$$

Exercice 1.7 (Produit fini d'espaces métriques).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, d_1), (E_2, d_2), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. On pose $E := E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$ et on considère $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x_i, y_i) \qquad (\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E).$$

— Montrer que d est une distance sur E.

Exercice 1.8 (Produit dénombrable d'espaces métriques).

Soit $\{(E_i, d_i)\}_{i \geqslant 1}$ une famille (dénombrable) d'espaces métriques. On pose $E := \prod_{i=1}^{+\infty} E_i$ et on considère $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d\big((x_i)_{i \geqslant 1}, (y_i)_{i \geqslant 1}\big) := \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(x_i, y_i)}{2^i} \qquad (\forall (x_i)_{i \geqslant 1}, (y_i)_{i \geqslant 1} \in E).$$

— Montrer que d est une distance sur E.

☞ Vous pouvez vous en servir des résultats de l'exercice 1.5.

✠ ✠ ✠

Chapitre 2

Etude de quelques notions de base en topologie générale

Pour tout ce qui suit, on fixe un espace topologique (X, τ). On a vu au cous précédent que les *ouverts* de X sont simplement les éléments de τ et que les *fermés* de X sont leurs complémentaires (dans X). Dans ce cours, nous allons étudier d'autres notions également basiques en topologie générale comme celles de *voisinage*, de *fermeture*, d'*intérieur*, de *frontière*, etc.

2.1 Voisinage d'un point ou d'une partie

Définition et notation 2.1. *On appelle* ***voisinage*** *d'un point x de X, toute partie V de X qui contient un ouvert, lequel contient x.*
Plus généralement, on appelle ***voisinage*** *d'une partie A de X, toute partie V de X qui contient un ouvert, lequel contient A.*
On note par $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble de tous les voisinages d'un point x de X. De même, on note par $\mathscr{V}(A)$ l'ensemble de tous les voisinages d'une partie A de X.
En utilisant le symbolisme mathématique, on a donc pour tout $x \in X$ et tout $A \subset X$:

$$V \in \mathscr{V}(x) \stackrel{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \exists O \in \tau : \quad x \in O \subset V$$
$$V \in \mathscr{V}(A) \stackrel{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \exists O \in \tau : \quad A \subset O \subset V.$$

La notion de voisinage nous fournit une caractérisation très importante des ouverts d'un espace topologique. On a le théorème suivant :

Théorème 2.2 (fondamental). *Une partie U de X est un ouvert ssi elle est voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration. Soit U une partie de X.

($\Rightarrow$) Supposons que U est un ouvert de X et montrons que U est voisinage de chacun de ses points. Pour tout $x \in U$, il suffit de prendre $O = U$ (qui est un ouvert par hypothèse) pour avoir

$x \in O \subset U$. Ce qui montre que U est voisinage de x. D'où U est voisinage de chacun de ses points, comme il fallait le prouver.

($\Leftarrow$) Supposons que U est voisinage de chacun de ses points et montrons que U est un ouvert de X. Pour tout $x \in U$, comme (par hypothèse) U est un voisinage de x, il existe un ouvert O_x de X qui vérifie :

$$x \in O_x \subset U.$$

Soit $O := \cup_{x \in U} O_x$. Comme O contient tous les points de U (puisque $\forall x \in U$, $x \in O_x \subset U$) alors O contient U (i.e., $U \subset O$). D'autre part, comme $O_x \subset U$ ($\forall x \in U$), alors $O = \cup_{x \in U} O_x \subset U$. Il y a donc une double inclusion entre U et O, ce qui montre que $U = O$. Mais comme O est une réunion d'ouverts de X alors O est un ouvert de X ; c'est-à-dire que U est un ouvert de X, comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. □

Remarque. Etant donné $x \in X$, si V est un voisinage de x alors toute partie de X contenant V est également un voisinage de x. On pourra donc *filtrer* l'ensemble des voisinages de x afin d'obtenir une petite quantité de voisinages ; les autres voisinages de x seront les parties de X contenant ces derniers. Ceci nous amène à poser la définition suivante :

Définition 2.3. *On appelle* ***système fondamental de voisinages*** *(ou* ***base de voisinages****) d'un élément x de X, toute famille $\mathscr{B}(x)$ de voisinages de x telle que :*

$$\forall V \in \mathscr{V}(x), \exists W \in \mathscr{B}(x) : \; W \subset V.$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}$, muni de sa topologie usuelle, les intervalles $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ constituent un système fondamental de voisinages de x ($x \in \mathbb{R}$, donné). Il en est de même des intervalles $]x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n}[$ $(n \in \mathbb{N})$.
Cet exemple montre qu'en général, il n'y a pas unicité de système fondamental de voisinages d'un élément (ou d'une partie) d'un espace topologique.

On peut également *filtrer* les ouverts de X pour ne garder que ceux qui sont *fondamentaux*. On introduit pour cela la notion de *base d'une topologie* qu'on définit comme suit :

Définition 2.4. *On appelle* ***base*** *pour la topologie τ de X, toute famille $\mathscr{B}$ d'ouverts de X tel que tout ouvert de X puisse s'écrire comme une réunion d'ouverts qui appartiennent tous à $\mathscr{B}$. Autrement dit, $\mathscr{B}$ est une base pour τ si :*

$$\forall O \in \tau, \exists (U_i)_{i \in I}, \text{ avec } U_i \in \mathscr{B} \; (\forall i \in I), \text{ tel que : } O = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Exemple. La famille $]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}[$ $(r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*)$ constitue une base pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (pour le montrer, utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi que l'axiome d'Archimède). Remarquer que cette base est dénombrable ; on dira que l'espace topologique $\mathbb{R}$ est *à base dénombrable*.

Remarque. De même pour les bases de voisinages, il n'y a pas en général unicité de base pour une topologie.

2.2 Fermeture et adhérence

Définition 2.5. *Soit A une partie de X. On appelle* **fermeture** *de A, le plus petit*[1] *fermé de X contenant A.*

En réalité, cette définition doit être justifiée en montrant l'existence du plus petit fermé de X contenant une partie donnée A de X. Ceci est en fait très simple, il suffit de considérer $\mathscr{F}$ l'ensemble de tous les fermés de X contenant A ($\mathscr{F} \neq \emptyset$ car $X \in \mathscr{F}$) et définir $\mathrm{fer}(A) := \cap_{F \in \mathscr{F}} F$. Puisque $\mathrm{fer}(A)$ est un fermé de X (car c'est une intersection de fermés de X) et qu'il est inclus dans chacun des fermés de X contenant A (car c'est une intersection de ces derniers) alors il est le plus petit fermé de X contenant A. On vient en même temps d'établir la proposition suivante :

Proposition 2.6. *La fermeture d'une partie A de X est l'intersection de tous les fermés de X contenant A.* □

Remarque. La construction faite pour montrer l'existence de la fermeture d'une partie A de X est un cas particulier d'une construction plus générale sur ce qu'on appelle **la famille de Moore** d'un ensemble. La famille de Moore d'un ensemble E est une famille $\mathscr{M}$ de parties de E qui est stable par intersection. Par une construction identique à la précédente, on montre que pour toute partie A de E, il existe un plus petit $M \in \mathscr{M}$ contenant A. On retrouve ainsi d'une même manière les notions d'*un sous-groupe engendré par une partie d'un groupe*, d'*un sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel*, etc.

Nous allons maintenant caractériser ponctuellement la fermeture d'une partie d'un espace topologique.

Définition 2.7. *Soient A une partie de X et x un point de X. On dit que x est un point* **adhérent** *à A si tout voisinage de x rencontre A ; c'est-à-dire si :*

$$\forall V \in \mathscr{V}(x) : \ V \cap A \neq \emptyset.$$

Définition 2.8. *Soit A une partie de X. On définit* **l'adhérence** *de A, que l'on note $\overline{A}$, l'ensemble de tous les points adhérents à A.*

Remarque. Il est immédiat, de la définition même de l'adhérence, que pour toute partie A de X, on a : $A \subset \overline{A}$. Nous verrons plus loin que l'égalité entre une partie de X et son adhérence caractérise les fermés de X.

Nous allons voir maintenant que l'adhérence d'une partie de X n'est rien d'autre que sa fermeture !

Théorème 2.9. *L'adhérence de toute partie de X coïncide avec sa fermeture.*

1. Le terme « plus petit » est utilisé au sens de l'inclusion.

Démonstration. Soit A une partie de X. Il s'agit de montrer que l'on a : $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ un fermé de } X \\ F \supset A}} F$. Pour tout $x \in X$, on a :

$$\begin{aligned} x \notin \overline{A} &\Longleftrightarrow \exists V \in \mathscr{V}(x) \text{ tel que } V \cap A = \varnothing \\ &\Longleftrightarrow \exists O \in \tau \text{ tel que } x \in O \text{ et } O \cap A = \varnothing \\ &\Longleftrightarrow \exists O \in \tau \text{ tel que } x \in O \text{ et } A \subset \complement_X O \\ &\Longleftrightarrow \exists F \text{ un fermé de } X \text{ tel que } x \notin F \text{ et } F \supset A \\ & \text{ (en posant } F = \complement_X O) \\ &\Longleftrightarrow \exists F \text{ un fermé de } X, \text{ avec } F \supset A, \text{ tel que } x \notin F \\ &\Longleftrightarrow x \notin \bigcap_{\substack{F \text{ un fermé de } X \\ F \supset A}} F. \end{aligned}$$

D'où l'équivalence :

$$x \notin \overline{A} \Longleftrightarrow x \notin \bigcap_{\substack{F \text{ un fermé de } X \\ F \supset A}} F$$

qui montre l'égalité requise : $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ un fermé de } X \\ F \supset A}} F$. Le théorème est démontré. □

Corollaire 2.10. *Une partie A de X est fermée ssi $A = \overline{A}$.*

Démonstration. Soit A une partie de X.

$(\Rightarrow)$: Supposons que A est fermée. Alors, le plus petit fermé de X contenant A est, de toute évidence, A lui même ; c'est-à-dire qu'on a $\overline{A} = A$, comme il fallait le prouver.

$(\Leftarrow)$: Supposons qu'on a $\overline{A} = A$. Comme $\overline{A}$ est fermé alors A $(= \overline{A})$ est fermé, comme il fallait le prouver. Le corollaire est démontré. □

La proposition suivante nous donne quelques propriétés de l'adhérence d'une partie d'un espace topologique.

Proposition 2.11. *Soient A et B deux parties de X. Alors, on a :*

1. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Démonstration. Voir l'exercice 2.6. □

Nous définissons maintenant les notions du *point d'accumulation* et du *point isolé* qui sont également importantes et riches en application.

Définition 2.12. *Soient A une partie de X et x un point de X. On dit que x est **un point d'accumulation** de A si pour tout voisinage V de x, l'ensemble $(V \backslash \{x\})$ rencontre A ; c'est-à-dire si :*

$$\forall V \in \mathscr{V}(x) : \ (V \backslash \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Remarques :

1. Un point d'accumulation d'une partie d'un espace topologique est clairement un point adhérent à cette partie. Cependant, l'inverse est (généralement) faux.
2. L'ensemble de tous les points d'accumulation d'une partie A d'un espace topologique s'appelle *l'ensemble dérivé* de A et se note A'. Cette notion a été introduite par le mathématicien allemand Georg CANTOR (1845 - 1918) qui l'a étudié pour la première fois sur l'ensemble des nombres réels.

Définition 2.13. *Soit A une partie de X. On appelle **point isolé** de A, tout point de A qui n'est pas d'accumulation.*

2.3 Intérieur, extérieur et frontière d'une partie

Définition 2.14. *Soit A une partie de X. On appelle **intérieur** de A, que l'on note $\overset{\circ}{A}$, le plus grand[2] ouvert de X qui est contenu dans A.*

En réalité, cette définition n'est légitime que si l'on prouve l'existence d'un plus grand ouvert contenu dans une partie donnée A de X. Mais ce fait est très simple à établir ; il suffit de considérer la réunion de tous les ouverts contenus dans X. On a alors :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{O \in \tau \\ O \subset A}} O \tag{2.1}$$

Le théorème suivant caractérise point par point l'intérieur d'une partie d'un espace topologique.

Théorème 2.15. *Soit A une partie de X. Un point x de X est à l'intérieur de A (c'est-à-dire appartient à $\overset{\circ}{A}$) ssi A est un voisinage de x.*

Démonstration. Soit $x \in X$.

($\Rightarrow$) **:** Supposons que $x \in \overset{\circ}{A}$. Comme (par définition même) $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et que $\overset{\circ}{A} \subset A$ alors A est un voisinage de x.

($\Leftarrow$) **:** Supposons que A est un voisinage de x. Donc $\exists O \in \tau$ tel que $x \in O \subset A$. Ce qui entraîne (en vertu de (2.1)) que $O \subset \overset{\circ}{A}$. D'où, en particulier, $x \in \overset{\circ}{A}$.

Le théorème est démontré. □

Corollaire 2.16. *Une partie A de X est un ouvert ssi $\overset{\circ}{A} = A$.*

2. Le terme « plus grand » est utilisé au sens de l'inclusion.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux théorèmes 2.2 et 2.15. □

Nous enchaînons maintenant avec la définition de l'extérieur d'une partie d'un espace topologique. Noter que cette notion est vraiment peu utilisée et, pour cette raison, nous avons jugé inutile de lui attribuer une notation particulière !

Définition 2.17. *Soit A une partie de X. On appelle **extérieur** de A, la partie de X égale à $\overset{\circ}{\widehat{\complement_X A}}$ (c'est donc le plus grand ouvert de X qui est contenu dans $\complement_X A$).*

La proposition suivante nous donne quelques propriétés concernant l'intérieur et l'extérieur d'une partie d'un espace topologique.

Proposition 2.18. *Soient A, A_1, A_2 et A_i $(i \in I)$ des parties de X. On a :*

(i) $A_1 \subset A_2 \;\Rightarrow\; \overset{\circ}{A_1} \subset \overset{\circ}{A_2}$.

(ii) $\overset{\circ}{\widehat{A_1 \cap A_2}} = \overset{\circ}{A_1} \cap \overset{\circ}{A_2}$.

(iii) $\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{i \in I} A_i}} \supset \bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}$.

(iv) $\complement_X \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement_X A}}$ *et* $\complement_X \overset{\circ}{A} = \overline{\complement_X A}$.

Démonstration. Voir les exercices 2.7 et 2.8. □

Nous poursuivons avec la définition de la frontière d'une partie d'un espace topologique.

Définition 2.19. *Soit A une partie de X. On appelle **frontière** de A, que l'on note $\mathrm{Fr}(A)$, l'ensemble $\overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$.*

Il existe une autre formule pour définir la frontière d'une partie d'un espace topologique ; elle est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.20. *Pour toute partie A de X, on a :*

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A}.$$

Démonstration. Voir le point (iii) de l'exercice 2.8. □

On déduit immédiatement de cette dernière proposition le théorème suivant qui fournit une caractérisation, point par point, de la frontière d'une partie d'un espace topologique.

Théorème 2.21. *Soit A une partie de X. Un point $x \in X$ appartient à la frontière de A ssi tout voisinage de x rencontre à la fois A et son complémentaire ; c'est-à-dire ssi :*

$$\forall V \in \mathscr{V}(x) : \; V \cap A \neq \varnothing \;\; \text{et} \;\; V \cap \complement_X A \neq \varnothing. \qquad \square$$

2.4 Parties denses et partout denses

Définition 2.22. *Soit A une partie de X.*

- *On dit que A est **dense** si $\overset{\circ}{\overline{A}} \neq \varnothing$.*
- *On dit que A est **partout dense** (ou **dense dans $\boldsymbol{X}$**) si $\overline{A} = X$.*

Exemple. Dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est partout dense (c'est la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, vue en première année).

2.5 Espaces séparés

Définition 2.23. *Un espace topologique (X, τ) est dit **séparé** (ou **de Hausdorff**) si la propriété suivante est satisfaite :*

$$\forall x, y \in X,\ \textit{avec } x \neq y,\ \exists V \in \mathscr{V}(x), \exists W \in \mathscr{V}(y) \textit{ tels que : } V \cap W = \varnothing.$$

Exemple : L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est un espace séparé. En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x \neq y$, en posant $a := \frac{|x-y|}{3}$, les deux intervalles ouverts $]x-a, x+a[$ et $]y-a, y+a[$ sont bien disjoints, le premier étant un voisinage de x et le second est un voisinage de y.

Plus généralement, on peut montrer que tout espace métrique est séparé (voir le chapitre 4).

Note. Dans son ouvrage fondateur de 1914, F. Hausdorff a montré la grande importance des espaces séparés en établissant des généralisations de plusieurs théorèmes de base d'analyse réelle sur ces derniers.

Exercices

⋆ **Exercice 2.1.** Soit $X = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à 4 éléments et soit τ la famille de $\mathscr{P}(X)$ suivante :

$$\tau \ := \ \Big\{\varnothing \ , \ X \ , \ \{a\} \ , \ \{b\} \ , \ \{a,b\} \ , \ \{a,c\} \ , \ \{b,d\} \ , \ \{a,b,c\} \ , \ \{a,b,d\}\Big\}.$$

1. Montrer que τ constitue une topologie sur X, puis donner les ouverts et les fermés de l'espace topologique (X, τ).
2. Déterminer les ensembles suivants :

$$\overset{\circ}{\widehat{\{b,c\}}} \ , \ \overline{\{b,c\}} \ , \ \overset{\circ}{\widehat{\{c,d\}}} \ , \ \overline{\{c,d\}} \ , \ \overset{\circ}{\widehat{\{b,c,d\}}} \ , \ \overline{\{b,c,d\}} \ \text{ et } \ \mathrm{Fr}(\{b,c,d\}).$$

⋆ **Exercice 2.2.** On pose $E :=]0, +\infty[$ et pour tout réel positif α, on pose $\theta_\alpha :=]\alpha, +\infty[\subset E$. On considère τ la famille de parties de E donnée par :

$$\tau \ := \ \big\{\varnothing\big\} \cup \big\{\theta_\alpha \ , \ \alpha \in \mathbb{R}^+\big\}.$$

1. Montrer que τ constitue une topologie sur E.
2. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).
3. Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$A =]0,1[\ \ ; \ \ A = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\ \ ; \ \ A = \mathbb{N}.$$

4. Montrer que (E, τ) n'est pas séparé.

Exercice 2.3 (Examen de rattrapage de l'année 2014-2015).

Soient $E :=]0, +\infty[$ et $\tau := \big\{E, \ \theta_\alpha :=]0, \alpha[\text{ (avec } \alpha \geqslant 0)\big\}$.

1. Montrer que τ constitue une topologie sur E.
2. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).
3. Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$A =]0,1[\ \ ; \ \ A = \left\{\frac{2}{3}\right\} \ \ ; \ \ A = \mathbb{N}^*.$$

⋆ **Exercice 2.4** (La topologie cofinie).

Soient X un ensemble non vide et τ la famille constituée de l'ensemble vide et de toutes les parties de X dont le complémentaire est fini.

1. Montrer que τ constitue une topologie sur X.
2. Que devient τ lorsque X est fini ?
3. Montrer que si X est infini alors il n'est pas séparé.

Exercice 2.5. Soit (E, τ) un espace topologique fini et séparé.

— Montrer que τ est forcément la topologie discrète de E.

N.B : On dira plus simplement que tout espace topologique fini et séparé est discret.

★ **Exercice 2.6.** Soient A et B deux parties d'un espace topologique (X, τ). Montrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} \;\subset\; \overline{A} \cap \overline{B}$.
3. $\overline{A \cup B} \;=\; \overline{A} \cup \overline{B}$.

★ **Exercice 2.7.** Soient A et B deux parties d'un espace topologique (X, τ). Montrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \;\Rightarrow\; \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
2. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
3. $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

★ **Exercice 2.8.** Soit A une partie d'un espace topologique (X, τ). Montrer les formules suivantes :

$$\text{(i) } \complement_X \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement_X A}} \quad ; \quad \text{(ii) } \complement_X \overset{\circ}{A} = \overline{\complement_X A} \quad ; \quad \text{(iii) } \mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A}.$$

★ **Exercice 2.9.** Soit (X, τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de X. Montrer que si A est un ouvert, alors on a :

$$A \cap \overline{B} \;\subset\; \overline{A \cap B}.$$

★ **Exercice 2.10.** Soit (X, τ) un espace topologique et soient U et V deux ouverts disjoints de X. Montrer qu'on a :

$$\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} \;=\; \varnothing.$$

★ **Exercice 2.11.** Soit (X, τ) un espace topologique. Pour tout $x \in X$, on désigne par F_x l'ensemble de tous les voisinages fermés de x. Montrer que X est séparé si et seulement si on a :

$$\forall x \in X : \bigcap_{V \in F_x} V = \{x\}.$$

★ **Exercice 2.12.** Soit (X, τ) un espace topologique et soit D une partie de X. Montrer que D est dense dans X si et seulement si tout ouvert non vide de X rencontre D.

Exercice 2.13. Soit (X, τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de X qui sont toutes les deux partout denses. On suppose de plus que A est un ouvert de X.

— Montrer que $A \cap B$ est partout dense.

☞ Vous pouvez utiliser le résultat de l'exercice 2.12.

Exercice 2.14. Soit (X, τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de X. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$ et $\mathrm{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$.
2. $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

Exercice 2.15. Soit (X, τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de X telles que $E = A \cup B$. Montrer qu'on a :

$$E = \overline{A} \cup \overset{\circ}{B}.$$

Exercice 2.16. Soit (X, τ) un espace topologique et soient D un sous-ensemble dense dans X et O un ouvert de X. Montrer qu'on a :

$$O \subset \overline{O \cap D}.$$

Exercice 2.17. Soit (X, τ) un espace topologique et soit A une partie de X. Montrer que A rencontre tout sous-ensemble dense dans X si et seulement si A est d'intérieur non vide.

Exercice 2.18.

Définition : Un espace topologique est dit *séparable* s'il existe une partie de X qui soit à la fois dénombrable et partout dense.

1. Justifier que $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle) est séparable.
2. Soit (X, τ) un espace topologique. Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B}$ pour τ qui soit dénombrable. Montrer que X est séparable.

✠ ✠ ✠

Chapitre 3

Les notions de limite et de continuité sur un espace topologique

3.1 Limite et valeur d'adhérence d'une suite

Dans toute cette section, (X, τ) désigne un espace topologique.

Définition 3.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et $\ell \in X$. On dit que $(u_n)_n$* ***converge vers*** ℓ *(et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$) si :*

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : \quad n > n_0 \Longrightarrow u_n \in V.$$

Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, on dit que ℓ est ***la limite*** *de $(u_n)_n$.*

Remarque : Une suite d'un espace topologique peut posséder plusieurs limites ! Par exemple, si τ est la topologie grossière sur X alors tout point de X est limite de toute suite d'éléments de X. Il serait donc naturel d'ajouter aux trois axiomes définissant une topologie un axiome supplémentaire qui permet d'avoir l'unicité de la limite d'une suite. Cet axiome n'est autre que l'axiome de séparation. On a le :

Théorème 3.2. *Dans un espace topologique séparé, la limite de toute suite (si elle existe) est unique.*

Démonstration. Procédons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique séparé (X, τ) qui possède deux limites différentes ℓ_1 et ℓ_2 ($\ell_1, \ell_2 \in X$). Comme $\ell_1 \neq \ell_2$ et X est séparé alors il existe $V \in \mathscr{V}(\ell_1)$ et $W \in \mathscr{V}(\ell_2)$ tels que $V \cap W = \varnothing$. D'autre part, comme ℓ_1 est une limite de $(u_n)_n$ alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n > n_1 \Longrightarrow u_n \in V.$$

De même, comme ℓ_2 est une limite de $(u_n)_n$ alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n > n_2 \Longrightarrow u_n \in W.$$

Il en résulte donc que pour $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n > \max(n_1, n_2)$, on a $u_n \in V$ et $u_n \in W$; c'est-à-dire $u_n \in V \cap W$. Ce qui est absurde puisque $V \cap W = \emptyset$. Le théorème est démontré. □

Nous définissons maintenant la notion de *valeur d'adhérence* d'une suite d'un espace topologique.

Définition 3.3. *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et $x \in X$. On dit que x est une* ***valeur d'adhérence*** *de $(u_n)_n$ si :*

$$\forall V \in \mathscr{V}(x), \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n > n_0 \text{ tel que : } x_n \in V.$$

Remarque : La limite d'une suite (si elle existe) est toujours une valeur d'adhérence pour cette suite mais l'inverse est (généralement) faux.

Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n := (-1)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), possède 1 et -1 comme valeurs d'adhérence.

3.2 Limite d'une fonction et fonctions continues

Dans toute cette section, (X, τ) et (Y, τ') désignent des espaces topologiques.

3.2.1 Définitions et premiers résultats

Définition 3.4. *Soit $f : X \to Y$ une application et soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. On dit que* $\boldsymbol{f(x)}$ ***tend vers $\boldsymbol{y_0}$ lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x_0}$*** *(et on écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$) si :*

$$\forall W \in \mathscr{V}(y_0), \exists V \in \mathscr{V}(x_0) \text{ tel que : } f(V) \subset W.$$

En utilisant les propriétés bien connues :

$$f^{-1}(f(A)) \supset A \text{ et } f(f^{-1}(B)) \subset B$$

(valables pour toute application $f : X \to Y$, tout $A \subset X$ et tout $B \subset Y$), on obtient la définition équivalente suivante :

Définition 3.5 (équivalente à la précédente).

Soit $f : X \to Y$ une application et soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. On dit que $\boldsymbol{f(x)}$ ***tend vers $\boldsymbol{y_0}$ lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x_0}$*** *(et on écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$) si :*

$$\forall W \in \mathscr{V}(y_0) : \ f^{-1}(W) \in \mathscr{V}(x_0).$$

Définition 3.6 (Continuité en un point).

Soit $f : X \to Y$ une application et soit $x_0 \in X$. On dit que f est ***continue*** *en x_0 si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 ; c'est-à-dire si :*

$$\forall W \in \mathscr{V}(f(x_0)), \exists V \in \mathscr{V}(x_0) \text{ tel que : } f(V) \subset W.$$

Ce qui équivaut à :

$$\forall W \in \mathscr{V}(f(x_0)) : f^{-1}(W) \in \mathscr{V}(x_0).$$

Définition 3.7 (Continuité globale).

Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est ***continue*** *sur X si elle est continue en tout point de X.*

Le théorème suivant est fondamental ; il fournit une caractérisation simple de la continuité globale.

Théorème 3.8 (fondamental).

Une application $f : X \to Y$ est continue sur X ssi l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X ; c'est-à-dire ssi :

$$\forall O \in \tau' : \ f^{-1}(O) \in \tau.$$

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ une application.

($\Rightarrow$) **:** Supposons que f est continue sur X et soit O un ouvert quelconque de Y. Il s'agit de montrer que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X ; ce qui équivaut à montrer que $f^{-1}(O)$ est voisinage de chacun de ses points (en vertu du théorème 2.2). Soit donc $x \in f^{-1}(O)$ et montrons que $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x. Comme O est un ouvert de Y et que $f(x) \in O$ (puisque $x \in f^{-1}(O)$) alors O est un voisinage de $f(x)$. Ce qui entraîne (puisque f est, en particulier, continue en x) que $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x, comme il fallait le prouver.

($\Leftarrow$) **:** Supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X et montrons que f est continue sur X. Soit donc x un point arbitraire de X et montrons que f est continue en x. Il s'agit de montrer que pour tout $W \in \mathscr{V}(f(x))$, on a $f^{-1}(W) \in \mathscr{V}(x)$. Soit donc $W \in \mathscr{V}(f(x))$ et montrons que $f^{-1}(W) \in \mathscr{V}(x)$. Le fait $W \in \mathscr{V}(f(x))$ équivaut à l'existence d'un ouvert O de Y tel que $f(x) \in O \subset W$. On a donc $x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(W)$. Ce qui entraîne (puisque $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X, en vertu de l'hypothèse faite sur f) que $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x, comme il fallait le prouver.

Le théorème est démontré. □

Corollaire 3.9. *Une application $f : X \to Y$ est continue sur X ssi l'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent et de la formule :

$$f^{-1}(\complement_Y B) \ = \ \complement_X f^{-1}(B) \quad (\forall B \subset Y).$$ □

Exemples : L'application identité d'un espace topologique est continue. Aussi, l'application constante d'un espace topologique vers un autre espace topologique est continue. La vérification est immédiate.

3.2.2 Composition d'applications continues

Dans cette sous-section, nous allons généraliser le résultat d'analyse réelle selon lequel la composition de deux applications continues est une application continue. On a le théorème suivant :

Théorème 3.10. *Soient (X, τ), (Y, τ') et (Z, τ'') trois espaces topologiques et x un élément de X. Soient aussi $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications telles que f est continue en x et g est continue en $f(x)$. Alors l'application composée $g \circ f : X \to Z$ est continue en x.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout $V \in \mathscr{V}((g \circ f)(x))$, on a $(g \circ f)^{-1}(V) \in \mathscr{V}(x)$. Soit $V \in \mathscr{V}((g \circ f)(x)) = \mathscr{V}(g(f(x)))$ et montrons que $(g \circ f)^{-1}(V) \in \mathscr{V}(x)$. D'après la continuité de g en $f(x)$, on a $g^{-1}(V) \in \mathscr{V}(f(x))$. Ce qui entraîne, en vertu de la continuité de f en x que $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathscr{V}(x)$; c'est-à-dire $(f \circ g)^{-1}(V) \in \mathscr{V}(x)$, comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. □

Le corollaire suivant est immédiat en vertu de la définition même de la continuité globale.

Corollaire 3.11. *Soient (X, τ), (Y, τ') et (Z, τ'') trois espaces topologiques et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues. Alors l'application composée $g \circ f : X \to Z$ est également continue.* □

3.2.3 Homéomorphismes d'espaces topologiques

Nous introduisons maintenant la notion d'*homéomorphisme*, qui est une notion capitale sur les espaces topologiques. C'est une notion équivalente à celle d'isomorphisme pour les groupes.

Définition 3.12. *Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est un* ***homéomorphisme*** *si f est bijective et chacune des deux applications f et f^{-1} est continue.*

Vocabulaire : Au lieu de dire que f et f^{-1} sont continues, on pourrait dire simplement que f est **bicontinue**.

Définition 3.13. *Deux espaces topologiques (X, τ) et (Y, τ') sont dits* ***homéomorphes*** *s'il existe un homéomorphisme de X dans Y.*

Remarque : La relation "homéomorphe à" est une relation d'équivalence sur la catégorie de tous les espaces topologiques. En quotientant sur cette relation, on obtient une classification des espaces topologiques. Cette classification ne tient compte que de la *nature topologique* des parties d'un espace topologique. C'est d'ailleurs le sens de la définition suivante :

Définition 3.14. *Une propriété concernant un espace topologique est appelée* ***propriété topologique*** *si elle se conserve par un homéomorphisme.*

Exemple : La propriété de *séparation* est une propriété topologique.

3.3 Topologie induite - Sous-espaces topologiques

Proposition 3.15. *Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X. Alors, la famille τ_A de parties de A, définie par :*

$$\tau_A := \{O \cap A, \text{ avec } O \in \tau\}$$

constitue une topologie sur A.

Démonstration. Il s'agit de montrer que les axiomes de Hausdorff sont vérifiés pour le couple (A, τ_A). On a :

• Puisque $\varnothing, X \in \tau$ (car τ est une topologie sur X) alors $\varnothing \cap A = \varnothing \in \tau_A$ et $X \cap A = A \in \tau_A$. Le premier axiome de Hausdorff pour (A, τ_A) est ainsi vérifié.

• Soient U_1 et U_2 deux parties de A, appartenant à τ_A, et montrons que $U_1 \cap U_2 \in \tau_A$. Par définition même de τ_A, les parties U_1 et U_2 de A sont de la forme : $U_1 = O_1 \cap A$ et $U_2 = O_2 \cap A$, avec $O_1, O_2 \in \tau$. D'où :

$$U_1 \cap U_2 = (O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A) = (O_1 \cap O_2) \cap A \in \tau_A$$

(car $O_1 \cap O_2 \in \tau$, étant donné que τ est une topologie sur X). Le deuxième axiome de Hausdorff pour (A, τ_A) est ainsi vérifié.

• Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille de parties de A, appartenant à τ_A, et montrons que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_A$. Par définition même de τ_A, chaque U_i $(i \in I)$ s'écrit sous la forme : $U_i = O_i \cap A$, avec $O_i \in \tau$. D'où :

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (O_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) \bigcap A \in \tau_A$$

(car $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$, étant donné que τ est une topologie sur X). Le troisième axiome de Hausdorff pour (A, τ_A) est ainsi vérifié.

En conclusion, τ_A constitue bien une topologie sur A. La proposition est démontrée. □

Définition 3.16. *Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X. La topologie τ_A de A, définie à la proposition 3.15, s'appelle* ***la topologie induite*** *sur A de la topologie de X. Le nouvel espace topologique (A, τ_A) s'appelle* ***un sous-espace topologique*** *de X.*

Remarque : La topologie induite sur une partie non vide A d'un espace topologique (X, τ) n'est pas une topologie ordinaire sur A ; elle est construite spécialement pour rendre l'injection canonique $A \hookrightarrow X$ continue. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 3.17. *Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X. Alors l'injection canonique $i : A \rightarrow X$ est continue pour les topologies τ_A de A et τ de X. De plus, la topologie induite τ_A sur A est la topologie la moins finie sur A qui rend i continue.*

Démonstration. Montrons la première partie de la proposition ; c'est-à-dire que i est continue. Cela revient à montrer que l'image réciproque par i de tout ouvert de X est un ouvert de A. Pour tout ouvert O de X, on a :

$$i^{-1}(O) \; = \; O \cap A,$$

qui est bien un ouvert de A (par définition même de τ_A). D'où i est continue.

Montrons la seconde partie de la proposition ; à savoir que τ_A est la topologie la moins fine sur A qui rend i continue. Soit μ une topologie sur A pour laquelle i est continue et montrons que τ_A est moins fine que μ ; c'est-à-dire que $\tau_A \subset \mu$. La continuité de $i : (A, \mu) \to (X, \tau)$ entraîne qu'on a pour tout ouvert O de X : $i^{-1}(O) \in \mu$; c'est-à-dire $O \cap A \in \mu$. D'où $\mu \supset \{O \cap A, O \in \tau\} = \tau_A$, comme il fallait le prouver.

Ceci achève la preuve de la proposition. □

La proposition suivante caractérise les fermés et les voisinages d'un point d'un sous-espace topologique d'un espace topologique donné.

Proposition 3.18. *Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X. Une partie P de A est fermée dans le sous-espace topologique (A, τ_A) de (X, τ) ssi P s'écrit sous la forme $P = F \cap A$, avec F est un fermé de X. De même, une partie V de A est un voisinage d'un point a de A relativement au sous-espace topologique (A, τ_A) de (X, τ) ssi V s'écrit sous la forme $V = W \cap A$, avec W est un voisinage de a relativement à l'espace topologique (X, τ).*

Démonstration. Soit P une partie de A. On a :

$$\begin{aligned} P \text{ est un fermé de } (A, \tau_A) &\iff \complement_A P \in \tau_A \\ &\iff \exists O \in \tau : \quad \complement_A P = O \cap A \\ &\iff \exists O \in \tau : \quad A = \complement_A (O \cap A). \end{aligned}$$

Comme $\complement_A(O \cap A) = A \backslash (O \cap A) = A \backslash O = A \cap (\complement_X O)$, il en résulte que :

$$\begin{aligned} P \text{ est un fermé de } (A, \tau_A) &\iff \exists O \in \tau : \quad P = (\complement_X O) \cap A \\ &\iff \exists F \text{ un fermé de } X \text{ tel que : } \; P = F \cap A \\ &\qquad (\text{en posant } F := \complement_X O), \end{aligned}$$

comme il fallait le prouver.

Montrons maintenant la seconde assertion du théorème. Soient a un point de A et V une partie de A.

$(\Rightarrow)$ **:** Supposons que V est un voisinage de a relativement à l'espace topologique (A, τ_A) et montrons que V s'écrit sous la forme $V = W \cap A$, avec W est un voisinage de a relativement à l'espace topologique (X, τ). Comme, par hypothèse, $V \in \mathscr{V}(a)|_{(A, \tau_A)}$, il existe $U \in \tau_A$ tel que $a \in U \subset V$.

Mais (par définition même de τ_A) U s'écrit : $U = O \cap A$, avec $O \in \tau$. On a donc $a \in O \cap A \subset V$. On a par suite :

$$V = (O \cap A) \cup \big(V \backslash (O \cap A)\big) = (O \cap A) \cup (V \backslash O) = \big(O \cup (V \backslash O)\big) \cap A.$$

En posant $W := O \cup (V \backslash O)$, qui est un voisinage de a relativement à l'espace topologique (X, τ) (car $a \in O \subset W$), on obtient $V = W \cap A$; ce qui est bien l'écriture requise pour V.

($\Leftarrow$) : Inversement, supposons que V s'écrit sous la forme $V = W \cap A$, avec W est un voisinage de a relativement à l'espace topologique (X, τ), et montrons que $V \in \mathscr{V}(a)|_{(A,\tau_A)}$. Comme $W \in \mathscr{V}(a)|_{(X,\tau)}$, il existe $O \in \tau$ tel que $a \in O \subset W$. On a par suite $a \in (O \cap A) \subset (W \cap A) = V$. Ce qui montre (puisque $O \cap A \in \tau_A$) que $V \in \mathscr{V}(a)|_{(A,\tau_A)}$, comme il fallait le prouver.

La proposition est démontrée. $\square$

Remarque : Etant donné (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X, on voit que les parties *particulières* du sous-espace topologique (A, τ_A) (ouverts, fermés, voisinages) s'obtiennent en coupant simplement par A les parties de l'espace topologique (X, τ), de *particularités analogues*. Autrement dit, on prend les *traces* sur A.

3.4 Un exemple important de sous-espaces homéomorphes de $\mathbb{R}$

La proposition suivante fournit un exemple de sous-espaces homéomorphes de $\mathbb{R}$ qui est, peut être, le plus élémentaire des exemples (non triviaux) d'espaces homéomorphes.

Proposition 3.19. *Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$.*

Démonstration. On compte trois types d'intervalles ouverts (non vides et propres) de $\mathbb{R}$: $]-\infty, a[$ ($a \in \mathbb{R}$), $]a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) et $]a, b[$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Nous allons montrer le résultat de la proposition pour chacun de ces types.

• **Pour le premier type :** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\infty, a[\\ x & \longmapsto & a - e^{-x} \end{array}$$

est clairement bijective et bicontinue ; donc constitue un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]-\infty, a[$. D'où $]-\infty, a[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ ($\forall a \in \mathbb{R}$).

• **Pour le deuxième type :** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]a, +\infty[\\ x & \longmapsto & e^{x} + a \end{array}$$

est clairement bijective et bicontinue ; donc constitue un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]a, +\infty[$. D'où $]a, +\infty[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ ($\forall a \in \mathbb{R}$).

• **Pour le troisième type :** Montrons d'abord que l'intervalle ouvert $]-1,1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$. Pour ce faire, considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$$

L'application f est bien définie puisqu'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left|\frac{x}{1+|x|}\right| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$; c'est-à-dire $\frac{x}{1+|x|} \in]-1,1[$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = y & \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |f(x)| = |y| \\ \text{et} \\ \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(y) \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{|x|}{1+|x|} = |y| \\ \text{et} \\ \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y) \end{array}\right. \qquad (\text{car } \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(x)) \\ & \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x| = \frac{|y|}{1-|y|} \\ \text{et} \\ \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y) \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow x = \frac{y}{1-|y|}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est bijective et que son application inverse est donnée par :

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}:]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{y}{1-|y|} \end{array}.$$

Enfin, f et f^{-1} sont clairement continues (en tant que composées d'applications continues). D'où f constitue un homéomorphisme et, par conséquent, l'intervalle $]-1,1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$, comme il fallait le prouver.

Maintenant, étant donné un quelconque intervalle ouvert de troisième type, c'est-à-dire un intervalle $]a,b[$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$), il est facile de montrer que celui-ci est homéomorphe à $]-1,1[$ (on peut prendre simplement, comme exemple d'homéomorphisme entre les deux, une application affine). Par transitivité de la relation "homéomorphe à", il en résulte que tout intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ ($a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$) est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Ceci complète la preuve de la proposition. □

Remarque anticipée : Montrer que deux espaces topologiques ne sont pas homéomorphes est (en général) un problème difficile ! Pour s'en convaincre, essayez par exemple de montrer qu'un ballon de football et un pneu ne sont pas homéomorphes dans l'espace $\mathbb{R}^3$ (où $\mathbb{R}^3$ est muni de sa topologie usuelle qu'on verra plus loin sur plusieurs points de vue). **La topologie algébrique** s'occupe en partie de ce problème.

3.5 Topologie produit - Espace produit

Un produit cartésien d'espaces topologiques peut être muni d'une topologie importante, appelée **la topologie produit**. Pour une raison de clarté, nous avons préféré de décrire et étudier préalablement cette topologie dans le cas d'un produit fini d'espaces topologiques, puis en donner la généralisation adéquate au cas d'un produit quelconque.

3.5.1 Le cas d'un produit fini d'espaces topologiques

Soit $n \geqslant 2$ un entier et soient $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$ des espaces topologiques. On pose $X := X_1 \times \cdots \times X_n$.

Définition 3.20.

- *On appelle* ***pavet*** *de X, toute partie de X pouvant s'écrire sous la forme $A_1 \times \cdots \times A_n$, avec A_i est une partie de X_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.*
- *On appelle* ***pavet ouvert*** *de X, toute partie de X pouvant s'écrire sous la forme $O_1 \times \cdots \times O_n$, avec O_i est un ouvert de X_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Proposition 3.21. *La famille τ de parties de X pouvant s'écrire comme réunion de pavets ouverts de X constitue une topologie sur X.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que les axiomes de Hausdorff sont vérifiés pour le couple (X, τ).

• Puisque $\varnothing = \varnothing \times \cdots \times \varnothing$ (produit cartésien de n ensembles vides) et que $\varnothing \in \tau_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ alors $\varnothing$ est un pavet ouvert de X ; d'où $\varnothing \in \tau$.
De même, puisque $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ et que $X_i \in \tau_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ alors X est un pavet ouvert de lui même ; d'où $X \in \tau$. Le premier axiome de Hausdorff pour (X, τ) est ainsi vérifié.

• Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X, appartenant à τ. Chaque U_i $(i \in I)$ est donc une réunion de pavets ouverts de X. Par conséquent, $\bigcup_{i \in I} U_i$ est une réunion de réunions de pavets ouverts de X ; c'est donc une réunion de pavets ouverts de X ; c'est-à-dire $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$. Le troisième axiome de Hausdorff pour (X, τ) est ainsi vérifié.

• Soient U et U' deux parties de X appartenant à τ. On peut donc écrire U et U' sous la forme :

$$U = \bigcup_{i \in I} \left(O_1^{(i)} \times \cdots \times O_n^{(i)}\right) \quad \text{et} \quad U' = \bigcup_{j \in J} \left(O_1'^{(j)} \times \cdots \times O_n'^{(j)}\right),$$

avec $O_k^{(i)}$ et $O_k'^{(j)}$ sont des ouverts de X_k (pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et tous $i \in I$, $j \in J$). Par suite, on a :

$$\begin{aligned} U \cap U' &= \bigcup_{i \in I} \left(O_1^{(i)} \times \cdots \times O_n^{(i)}\right) \cap \bigcup_{j \in J} \left(O_1'^{(j)} \times \cdots \times O_n'^{(j)}\right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \left(\left(O_1^{(i)} \times \cdots \times O_n^{(i)}\right) \cap \left(O_1'^{(j)} \times \cdots \times O_n'^{(j)}\right)\right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \left(\left(O_1^{(i)} \cap O_1'^{(j)}\right) \times \cdots \times \left(O_n^{(i)} \cap O_n'^{(j)}\right)\right), \end{aligned}$$

qui est bien une réunion de pavets ouvets de X puisque $O_k^{(i)} \cap O_k'^{(j)}$ constitue un ouvert de X_k pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et tous $i \in I, j \in J$. D'où $U \cap U' \in \tau$. Le deuxième axiome de Hausdorff pour (X, τ) est ainsi vérifié.

En conclusion, τ constitue bien une topologie sur X. La proposition est démontrée. □

Définition 3.22. *La topologie τ définie précédemment sur X s'appelle* ***la topologie produit*** *de X et l'espace topologique obtenu (X, τ) s'appelle* ***l'espace topologique produit*** *(des espaces $X_1, \dots, X_n$).*

Remarque : La topologie produit sur un produit cartésien X d'un nombre fini d'espaces topologiques $X_1, \dots, X_n$ est construite spécialement pour rendre les projections canoniques $\pi_i : X \to X_i$ toutes continues ($i \in \{1, \dots, n\}$). Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 3.23. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la projection canonique $\pi_i : X \to X_i$ est continue pour les topologies τ de X et τ_i de X_i.*
De plus, la topologie produit τ de X est la topologie la moins fine sur X qui rend les projections canoniques π_i $(i = 1, \dots, n)$ toutes continues.

Démonstration. Montrons la première assertion de la proposition. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et montrons que la projection canonique $\pi_i : X \to X_i$ est continue pour les topologies τ de X et τ_i de X_i. Cela revient à montrer (en vertu du théorème 3.8) que l'image réciproque par π_i de tout ouvert de X_i est un ouvert de X. Pour tout ouvert O_i de X_i, on a clairement :

$$\pi_i^{-1}(O_i) = \begin{cases} O_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n & \text{si } i = 1 \\ X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times O_n & \text{si } i = n \,, \\ X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times O_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n & \text{sinon} \end{cases}$$

qui est visiblement un pavet ouvert de X, donc un ouvert de X. Ce qui montre que π est continue.

Montrons maintenant la seconde assertion de la proposition. Il s'agit de montrer que pour toute autre topologie τ' de X pour laquelle les projections canoniques $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont continues, on a $\tau \subset \tau'$. Soit donc τ' une topologie sur X telle que les projections canoniques $\pi_i : (X, \tau') \to (X_i, \tau_i)$ soient toutes continues et montrons que $\tau \subset \tau'$. Cela revient à montrer que pour tout $O \in \tau$, on a $O \in \tau'$. Soit donc $O \in \tau$ et montrons que $O \in \tau'$. Par définition même de τ, l'ensemble O s'écrit :

$$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(O_1^{(\lambda)} \times \cdots \times O_n^{(\lambda)} \right),$$

avec $O_i^{(\lambda)}$ est un ouvert de X_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $\lambda \in \Lambda$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a :

$$\begin{aligned} O_1^{(\lambda)} \times \cdots \times O_n^{(\lambda)} &= \left(O_1^{(\lambda)} \times X_2 \times \cdots \times X_n \right) \cap \left(X_1 \times O_2^{(\lambda)} \times X_3 \times \cdots \times X_n \right) \cap \\ &\quad \cdots \cap \left(X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times O_n^{(\lambda)} \right) \\ &= \pi_1^{-1}\left(O_1^{(\lambda)} \right) \cap \pi_2^{-1}\left(O_2^{(\lambda)} \right) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}\left(O_n^{(\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Comme chaque π_i $(i = 1, \dots, n)$ est supposée continue par rapport aux topologies τ' de X et τ_i de X_i alors on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $\lambda \in \Lambda$: $\pi_i^{-1}(O_i^{(\lambda)}) \in \tau'$. Ce qui entraîne que $\pi_1^{-1}(O_1^{(\lambda)}) \cap \dots \cap \pi_n^{-1}(O_n^{(\lambda)}) \in \tau'$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; c'est-à-dire $O_1^{(\lambda)} \times \dots \times O_n^{(\lambda)} \in \tau'$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il en résulte enfin que $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(O_1^{(\lambda)} \times \dots \times O_n^{(\lambda)}\right) \in \tau'$, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve de la proposition. $\square$

3.5.2 Le cas général

Soient $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ une famille (finie ou infinie) d'espaces topologiques et $X := \prod_{i \in I} X_i$ leur produit cartésien. Pour étendre au cas général la construction précédente d'une topologie sur X, faite dans le cas particulier où I est fini, on pourrait penser naturellement à prendre comme topologie de X celle qui admet pour base les parties de X ayant la forme $\prod_{i \in I} O_i$ (avec $O_i \in \tau_i$, $\forall i \in I$) ; autrement dit, celle dont les ouverts sont des réunions de pavés ouverts. Cependant, cette topologie de X n'a que peu d'intérêt[1] ! La bonne topologie de X (appelée la topologie produit de X) est celle qui respecte la seconde assertion de la proposition 3.23 ; c'est-à-dire qu'elle est la topologie la moins fine sur X qui rend les projections canoniques $\pi_i : X \rightarrow X_i$ $(i \in I)$ toutes continues. En écrivant soigneusement ce que cela veut dire, on aboutit aisément à la définition plus directe de cette topologie, donnée par ce qui suit :

Proposition-Définition 3.24. *Soit τ la famille de parties de X pouvant s'écrire comme réunions d'ensembles du type $\prod_{i \in I} O_i$, où chaque O_i $(i \in I)$ est un ouvert de X_i et, à l'exception d'un nombre fini de $i \in I$, on a $O_i = X_i$. Alors τ constitue une topologie sur X.*
De plus, τ est la topologie la moins fine qui rend les projections canoniques $\pi_i : X \rightarrow X_i$ $(i \in I)$ toutes continues.
*Cette topologie τ de X s'appelle **la topologie produit** de X et l'espace topologique obtenu (X, τ) s'appelle **l'espace topologique produit** (des espaces X_i, $i \in I$).* $\square$

1. On peut montrer par exemple que pour cette topologie, un produit (infini) de compacts n'est pas toujours un compact ; de même, un produit (infini) de connexes n'est pas toujours un connexe (Les espaces compacts et les espaces connexes sont respectivement les sujets d'étude des chapitres 6 et 7). Ce sont là des défauts considérables que possède cette topologie en la comparant à la "bonne" topologie produit qui satisfait bien ces deux propriétés fondamentales.

Exercices

⋆ **Exercice 3.1.** Soit X un ensemble non vide muni de sa topologie discrète. Montrer qu'une suite d'éléments de X est convergente ssi elle est stationnaire (i.e., constante à partir d'un certain rang).

⋆ **Exercice 3.2.** Soient (X, τ) un espace topologique et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k := \{u_n, \text{ avec } n \geqslant k\}$.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ est égale à $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{A_k}$.
2. En déduire que cet ensemble est un fermé de X.

⋆ **Exercice 3.3.** Soient (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue ssi on a :

$$\forall A \in \mathscr{P}(X) : \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Exercice 3.4. Soient (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue ssi on a :

$$\forall B \in \mathscr{P}(Y) : \quad \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

⋆ **Exercice 3.5.** Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X. Montrer les deux équivalences suivantes :

$$A \text{ est un ouvert de } X \iff \text{Tout ouvert de } (A, \tau_A) \text{ est un ouvert de } (X, \tau)$$
$$A \text{ est un fermé de } X \iff \text{Tout fermé de } (A, \tau_A) \text{ est un fermé de } (X, \tau)$$

⋆ **Exercice 3.6.** Montrer que tout sous-espace topologique d'un espace topologique séparé est séparé.

⋆ **Exercice 3.7.** Soient (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) deux espaces topologiques et $X = X_1 \times X_2$ l'espace topologique produit. Montrer que X est séparé ssi X_1 et X_2 sont tous les deux séparés.

⋆ **Exercice 3.8.** Soient (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques. Montrer que les deux espaces produits $X \times Y$ et $Y \times X$ sont homéomorphes.

⋆ **Exercice 3.9.** Soit (E, τ) un espace topologique et soit $\Delta := \big\{(x, x),\ x \in E\big\}$. Montrer que E est séparé ssi Δ est un fermé dans l'espace produit $E \times E$.

⋆ **Exercice 3.10.** Soient (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques, avec Y séparé et soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que le graphe de f est un fermé dans l'espace produit $X \times Y$.

✠ ✠ ✠

Chapitre 4

Espaces métriques

4.1 Topologie associée à une distance

Proposition 4.1. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors la famille τ_d constituée de toutes les réunions de boules ouvertes de X est une topologie sur X.*

Pour démontrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2. *Soient (X, d) un espace métrique et soient a et b deux points de X. Soient aussi r et r' deux réels strictement positifs. Pour tout $x \in B(a, r) \cap B(b, r')$, on pose :*

$$r_x \ := \ \min\big(r - d(a, x), r' - d(b, x)\big) > 0.$$

Alors, on a :

$$B(a, r) \cap B(b, r') \ = \bigcup_{x \in B(a,r) \cap B(b,r')} B(x, r_x).$$

Preuve du lemme. Montrons la double inclusion entre les deux ensembles prétendus égaux.

• <u>« $\subset$ » :</u> On a clairement :

$$B(a, r) \cap B(b, r') \ = \bigcup_{x \in B(a,r) \cap B(b,r')} \{x\} \ \subset \bigcup_{x \in B(a,r) \cap B(b,r')} B(x, r_x)$$

(puisque $\{x\} \subset B(x, r_x)$, $\forall x \in B(a, r) \cap B(b, r')$). La première inclusion est ainsi démontrée.

• <u>« $\supset$ » :</u> Montrer la seconde inclusion revient à montrer qu'on a pour tout $x \in B(a, r) \cap B(b, r')$:

$$B(x, r_x) \ \subset \ B(a, r) \cap B(b, r') \tag{$*$}$$

Montrons $(*)$. Etant donné $x \in B(a, r) \cap B(b, r')$, on a pour tout $y \in B(x, r_x)$:

$$d(x, y) \ < \ r_x = \min\big(r - d(a, x) \ , \ r' - d(b, x)\big).$$

Ce qui équivaut à :

$$d(x, y) \ < \ r - d(a, x) \quad \text{et} \quad d(x, y) \ < \ r' - d(b, x).$$

Il s'ensuit (en se servant de l'inégalité triangulaire) que :

$$d(a,y) \leqslant d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + \big(r - d(a,x)\big) = r$$

et

$$d(b,y) \leqslant d(b,x) + d(x,y) < d(b,x) + \big(r' - d(b,x)\big) = r'.$$

D'où $d(a,y) < r$ et $d(b,y) < r'$. Ce qui montre que $y \in B(a,r) \cap B(b,r')$. Comme y étant quelconque dans $B(x,r_x)$, l'inclusion $(*)$ est ainsi démontrée ainsi que la seconde inclusion requise. Ce qui complète la preuve du lemme. □

Preuve de la proposition 4.1. Il s'agit de montrer que la famille τ_d de parties de X satisfait les trois axiomes de Hausdorff.

• L'ensemble vide peut être considéré comme une réunion vide de boules ouvertes de X ; d'où $\varnothing \in \tau_d$. Quant à l'ensemble X, il est la réunion de toutes les boules ouvertes de X ; d'où $X \in \tau_d$. Le premier axiome de Hausdorff est ainsi vérifié pour τ_d.

• Pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ de parties de X, appartenant à τ_d, l'ensemble $\bigcup_{i \in I} O_i$ est une réunion de réunions de boules ouvertes de X ; c'est donc une réunion de boules ouvertes de X. D'où $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau_d$. Le troisième axiome de Hausdorff est ainsi vérifié pour τ_d.

• Soient O et O' deux parties de X, appartenant à τ_d. On peut donc écrire : $O = \bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i)$ et $O' = \bigcup_{j \in J} B(b_j, r_j')$ (avec $a_i, b_j \in X$, $r_i > 0$, $r_j > 0$ pour tous $i \in I, j \in J$). D'où :

$$\begin{aligned} O \cap O' &= \left(\bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i)\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B(b_j, r_j')\right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \left(B(a_i, r_i) \cap B(b_j, r_j')\right). \end{aligned}$$

Comme, d'après le lemme 4.2, chacun des ensembles $B(a_i, r_i) \cap B(b_j, r_j')$ $(i \in I, j \in J)$ est une réunion de boules ouvertes de X alors $O \cap O'$ est une réunion de réunions de boules ouvertes de X ; c'est donc une réunion de boules ouvertes de X. D'où $O \cap O' \in \tau_d$. Le deuxième axiome de Hausdorff est ainsi vérifié pour τ_d.

En conclusion, τ_d constitue une topologie sur X. La proposition est démontrée. □

Définition 4.3. *Etant donné (X,d) un espace métrique, la topologie τ_d introduite à la proposition 4.1 s'appelle* ***la topologie associée à la distance*** *d. Une topologie associée à une distance s'appelle* ***une topologie métrique****.*

Exemple (le cas de $\mathbb{R}$) : Il est immédiat que la topologie associée à la distance usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Définition 4.4. *La topologie associée à la distance usuelle de $\mathbb{C}$ s'appelle* ***la topologie usuelle*** *de $\mathbb{C}$. Cette topologie est donc constituée de toutes les réunions de disques ouverts de $\mathbb{C}$.*

> **Avertissement.** Pour tout ce qui suit, on identifie un espace métrique (X, d) à l'espace topologique (X, τ_d). À travers cette identification, **un espace métrique sera vu comme un cas particulier d'espaces topologiques**.

La proposition suivante donne encore plus de précision.

Proposition 4.5. *Tout espace métrique (X, d) est un espace topologique séparé.*

Démonstration. Soient x et y deux points distincts de X. On a (d'après l'axiome de séparation [1]) $d(x, y) \neq 0$. Le réel $r := d(x, y)$ est donc strictement positif. Nous allons montrer que les deux boules ouvertes $B(x, \frac{r}{2})$ et $B(y, \frac{r}{2})$ sont disjointes. Pour ce faire, procédons par l'absurde en supposant qu'il existe $z \in X$ tel que $z \in B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2})$. On a donc : $d(z, x) < \frac{r}{2}$ et $d(z, y) < \frac{r}{2}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, il s'ensuit que :

$$r = d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

D'où $r < r$, ce qui est absurde. Ainsi, les deux boules ouvertes $B(x, \frac{r}{2})$ et $B(y, \frac{r}{2})$ sont effectivement disjointes. Enfin, puisque $B(x, \frac{r}{2}) \in \mathscr{V}(x)$ (car $x \in B(x, \frac{r}{2})$ et $B(x, \frac{r}{2}) \in \tau_d$) et $B(y, \frac{r}{2}) \in \mathscr{V}(y)$ (car $y \in B(y, \frac{r}{2})$ et $B(y, \frac{r}{2}) \in \tau_d$), on a montré l'existence d'un voisinage de x et d'un voisinage de y qui sont disjoints. Ce qui montre que l'espace (X, d) est séparé. La proposition est démontrée. $\square$

Remarque : On peut montrer plus généralement que même une semi-distance définit (de la même façon que précédemment) un espace topologique, mais que celui-ci n'est séparé que lorsque la semi-distance en question est une distance. C'est précisément le 4$^{\text{ème}}$ axiome d'une distance (c'est-à-dire l'implication $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$) qui fait que tout espace métrique est séparé ; d'où l'appellation « axiome de séparation » pour cet axiome. Bien évidemment, le lecteur est conseillé de vérifier avec soins toute ces affirmations.

Définition 4.6. *Un espace topologique (X, τ) est dit **métrisable** s'il existe une distance d sur X tel que τ soit la topologie associée à d (i.e., $\tau = \tau_d$).*

Remarque. En vertu de la proposition 4.5, un espace topologique qui n'est pas séparé est non métrisable.

Exemples :

1. Soit X un ensemble contenant au moins deux éléments, muni de sa topologie grossière τ_{gros}. Il est facile de montrer que (X, τ_{gros}) n'est pas séparé. D'où (X, τ_{gros}) n'est pas métrisable.
2. Soit X un ensemble infini, muni de sa topologie cofinie τ_{cof}. L'exercice 2.4 montre que (X, τ_{cof}) n'est pas séparé. D'où (X, τ_{cof}) n'est pas métrisable.

1. C'est précisément cet axiome qui fait que tout espace métrique est séparé.

4.2 Caractérisation des voisinages et des ouverts d'un espace métrique

Théorème 4.7 (fondamental). *Soit (X, d) un espace métrique et soient x un point de X et V une partie de X. Alors, on a :*

$$\begin{aligned} V \in \mathscr{V}(x) &\iff \exists \varepsilon > 0 : \quad B(x, \varepsilon) \subset V \\ V \in \tau_d &\iff \forall y \in V, \exists \varepsilon > 0 : \quad B(y, \varepsilon) \subset V. \end{aligned}$$

Démonstration.

• Montrons la première équivalence du théorème. L'implication réciproque de cette équivalence est triviale. Montrons son implication directe. Soit donc $V \in \mathscr{V}(x)$ et montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V$. L'hypothèse $V \in \mathscr{V}(x)$ équivaut à l'existence de $O \in \tau_d$ tel que $x \in O \subset V$. Par définition même de τ_d, on peut écrire O sous la forme $O = \bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i)$. Ainsi, le fait $x \in O \subset V$ entraîne qu'il existe $i \in I$ tel que $x \in B(a_i, r_i) \subset V$. Il suffit alors de prendre $\varepsilon = r_i - d(a_i, x) > 0$ pour avoir $B(x, \varepsilon) \subset V$. En effet, pour tout $y \in B(x, \varepsilon)$, on a (en utilisant l'inégalité triangulaire) :

$$d(a_i, y) \leqslant d(a_i, x) + d(x, y) < d(a_i, x) + \varepsilon = r_i.$$

D'où $d(a_i, y) < r_i$; ce qui montre que $y \in B(a_i, r_i)$. Mais puisque $B(a_i, r_i) \subset V$ alors $y \in V$. Ceci confirme l'inclusion requise $B(x, \varepsilon) \subset V$. L'implication directe de la première équivalence du théorème est ainsi démontrée ; l'équivalence en question également.

• La seconde équivalence du théorème n'est rien d'autre qu'une conséquence immédiate de sa première équivalence et du théorème 2.2 selon lequel « Une partie V d'un espace topologique est un ouvert ssi V est voisinage de chacun de ses points ». Ceci complète la preuve du théorème. □

Remarque importante : La seconde équivalence du théorème 4.7 est tellement pratique que plusieurs auteurs la prennent comme une définition de la topologie τ_d associée à une distance d d'un espace métrique. Dans la suite, nous l'utilisons abondamment pour démontrer d'importants résultats sur les espaces métriques. L'un de ces résultats est la proposition suivante qui nous informe de la nature topologique des boules fermées d'un espace métrique.

Proposition 4.8. *Toute boule fermée d'un espace métrique est un fermé.*

Démonstration. Voir l'exercice 4.2 pour une démonstration directe ou le corollaire 4.22 pour une démonstration judicieuse qui se sert d'une application continue. □

4.3 Limite et continuité dans un espace métrique

4.3.1 Limite et valeur d'adhérence d'une suite

Soit (X, d) un espace métrique et soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X et ℓ un élément de X.

Définition 4.9. *On dit que* $(u_n)_n$ ***converge*** *vers* ℓ, *et on écrit* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, *si* $\lim_{n\to+\infty} d(u_n, \ell) = 0$ *; c'est à dire si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : \; n > n_0 \Longrightarrow d(u_n, \ell) < \varepsilon.$$

Définition 4.10. *On dit que* ℓ *est* ***une valeur d'adhérence*** *de* $(u_n)_n$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n > n_0 \text{ tel que } d(u_n, \ell) < \varepsilon.$$

4.3.2 Limite d'une fonction

Définition 4.11. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$ *une application. Soient aussi* $x_0 \in X$ *et* $y_0 \in Y$. *On dit que* $f(x)$ ***tend vers*** y_0 *lorsque* x ***tend vers*** x_0, *et on écrit* $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in X : \; d_X(x, x_0) < \eta \Longrightarrow d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

4.3.3 Continuité et continuité uniforme

Définition 4.12. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$ *une application.*

- *On dit que* f *est* ***continue*** *en un point* x_0 *de* X *si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *; c'est à dire si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in X : \; d_X(x, x_0) < \eta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

- *On dit que* f *est* ***continue*** *sur* X *si elle est continue en tout point de* X.
- *On dit que* f *est* ***uniformément continue*** *sur* X *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, x' \in X : \; d_X(x, x') < \eta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

La proposition suivante est un exercice facile laissé au soin du lecteur !

Proposition 4.13. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$ *une application. Si* f *est uniformément continue sur* X *alors elle est continue sur* X. □

La proposition suivante est également un exercice facile laissé au soin du lecteur !

Proposition 4.14. *Soient* (X, d_X), (Y, d_Y) *et* (Z, d_Z) *trois espaces métriques et soient* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *deux applications. Si* f *est uniformément continue sur* X *et* g *est uniformément continue sur* Y *alors* $g \circ f$ *est uniformément continue sur* X. □

4.3.4 Fonctions lipschitziennes et fonctions contractantes

Définition 4.15. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques,* $f : X \to Y$ *une application et* k *un réel strictement positif.*

• *On dit que f est **lipschitzienne de rapport** k (ou simplement k-**lipschitzienne**) si :*

$$\forall x, x' \in X : \; d_Y(f(x), f(x')) \leqslant k \, d_X(x, x').$$

• *On dit que f est **bilipschitzienne** si elle est bijective et chacune des deux applications f et f^{-1} est lipschitzienne.*

• *On dit que f est **contractante** si elle est lipschitzienne de rapport inférieur strictement à 1.*

La proposition suivante est un exercice facile laissé au soin du lecteur !

Proposition 4.16. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Si f est lipschitzienne sur X alors elle est uniformément continue sur X.* □

La proposition suivante est également un exercice facile laissé au soin du lecteur !

Proposition 4.17. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques et soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications. Si f est lipschitzienne sur X et g est lipschitzienne sur Y alors $g \circ f$ est lipschitzienne sur X.* □

4.3.5 Isométries

Définition 4.18. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est une **isométrie** si :*

$$\forall x, x' \in X : \; d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x').$$

*En d'autre termes : une isométrie est une application qui **conserve les distances**.*

Quelques propriétés simples des isométries :

1. On montre aisément que toute isométrie est injective.
2. Il est immédiat que toute isomérie d'un espace métrique X dans un espace métrique Y est lipschitzienne de rapport 1 ; elle est donc uniformément continue sur X (en vertu de la proposition 4.16) et par conséquent continue sur X (en vertu de la proposition 4.13).
3. En vertu du point précédent, toute isométrie surjective (donc bijective d'après le premier point) d'un espace métrique X dans un espace métrique Y est bilipschitzienne et est donc uniformément continue ainsi que son inverse ; ce qui entraîne qu'elle constitue un homéomorphisme de X dans Y.
4. On montre aisément que la composée de deux isométries est une isométrie.

Exemples d'isométries :

1. Dans le plans affine $\mathbb{R}^2$, muni de sa distance euclidienne d_2, *les symétries centrales*, *les symétries axiales* et *les rotations* sont des isométries (de $(\mathbb{R}^2, d_2)$ dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$).

2. On montre immédiatement que l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathbb{C}, d_{\mathrm{us}}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, d_2) \\ & z & \longmapsto & (\Re z, \Im z) \end{array}$$

est une isométrie bijective. Ceci entraîne (d'après les propriétés précédentes des isométries) que les deux espaces métrique $(\mathbb{C}, d_{\mathrm{us}})$ et $(\mathbb{R}^2, d_2)$ sont homéomorphes.

Remarques importantes :

1. On montrera à l'exercice 4.3 que les notions de limite et de continuité, vues précédemment dans des espaces métriques coïncident avec leurs analogues dans les espaces topologiques associés (où l'espace topologique associé à un espace métrique (X, d) est (X, τ_d)).
2. La notion de continuité uniforme, vue précédemment dans des espaces métriques, n'est pas généralisable sur des espaces topologiques quelconques !

4.4 Distance entre deux ensembles et diamètre d'un ensemble

4.4.1 Distance d'un point par rapport à un sous-ensemble d'un espace métrique

Définition 4.19. *Soit (X, d) un espace métrique et soient A une partie non vide de X et x un élément de X. On définit **la distance de $\mathbf{x}$ par rapport à $\mathbf{A}$**, que l'on note $d(x, A)$, par :*

$$d(x, A) \;:=\; \inf_{a \in A} d(x, a) \qquad\qquad (\in \mathbb{R}^+).$$

N. B : L'infinimum qui définit la distance d'un point par rapport à un ensemble n'est pas toujours atteint.

4.4.2 Distance entre deux sous-ensembles d'un espace métrique

La notion de distance entre deux sous-ensembles d'un espace métrique généralise celle de la distance d'un point par rapport à un ensemble, vue précédemment.

Définition 4.20. *Soit (X, d) un espace métrique et soient A et B deux parties non vides de X. On définit **la distance entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$**, que l'on note $d(A, B)$, par :*

$$d(A, B) \;:=\; \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b) \qquad\qquad (\in \mathbb{R}^+).$$

N. B : L'infinimum qui définit la distance entre deux sous-ensembles d'un espace métrique n'est pas toujours atteint.

Proposition 4.21. *Soit (X, d) un espace métrique et soit a un point fixé de X. Alors l'application*
$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d(a, x) \end{array}$$
est lipschitzienne de rapport 1 (où $\mathbb{R}$ est muni de sa distance usuelle).

Démonstration. Etant donnés $x, y \in X$, on a :
$$\varphi_a(x) = d(a, x) \leqslant d(a, y) + d(y, x) = \varphi_a(y) + d(x, y).$$
D'où :
$$\varphi_a(x) - \varphi_a(y) \ \leqslant \ d(x, y) \tag{4.1}$$
En intervertant les rôles de x et y, on obtient :
$$\varphi_a(y) - \varphi_a(x) \ \leqslant \ d(y, x),$$
qui équivaut à :
$$\varphi_a(x) - \varphi_a(y) \ \geqslant \ -d(x, y) \tag{4.2}$$
Les deux inégalités (4.1) et (4.2) mises ensembles équivaillent à :
$$|\varphi_a(x) - \varphi_a(y)| \ \leqslant \ d(x, y).$$
Ce qui montre (puisque x et y étant quelconques dans X) que φ_a est lipschitzienne de rapport 1. La proposition est démontrée. □

Exercice (généralisation de la proposition 4.21) :
Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie non vide de X. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccl} \varphi_A : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}$$
est lipschitzienne de rapport 1 (où $\mathbb{R}$ est muni de sa distance usuelle).

Corollaire 4.22. *Toute boule fermée d'un espace métrique est un fermé.*

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique et soient $a \in X$ et $r > 0$. Montrons que la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ de X est un fermé de X. Pour ce faire, introduisons l'application
$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d(a, x) \end{array}$$
(où $\mathbb{R}$ est muni de sa distance usuelle). On a alors :
$$\begin{aligned} \overline{B}(a, r) &:= \{x \in X : \ d(a, x) \leqslant r\} \\ &= \{x \in X : \ \varphi_a(x) \in]-\infty, r]\} \\ &= \varphi_a^{-1}(]-\infty, r]). \end{aligned}$$
On voit ainsi que $\overline{B}(a, r)$ est l'image réciproque par φ_a de l'intervalle $]-\infty, r]$. Comme φ_a est lipschitzienne sur X (d'après la proposition 4.21), donc continue sur X, et que l'intervalle $]-\infty, r]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ alors $\varphi_a^{-1}(]-\infty, r]) = \overline{B}(a, r)$ est un fermé de X. Ce qui achève cette démonstration. □

4.4.3 Diamètre d'une partie d'un espace métrique

Définition 4.23. *Soient (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X. On définit le* ***diamètre*** *de A, que l'on note $\delta(A)$, par :*

$$\delta(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y) \qquad (\in [0, +\infty]).$$

N. B : Le supremum qui définit le diamètre d'une partie non vide d'un espace métrique peut être infini. De plus, s'il est fini, il n'est pas toujours atteint.

Définition 4.24. *Soient (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X. On dit que A est* ***bornée*** *si son diamètre est fini (i.e., $\delta(A) < +\infty$).*

Les trois propositions suivantes seront respectivement démontrées au exercices 4.5, 4.6 et 4.7.

Proposition 4.25. *Une partie d'un espace métrique est bornée ssi elle est contenue dans une boule ouverte (resp. fermée).* □

Proposition 4.26. *Toute réunion finie de parties bornées d'un espace métrique est bornée.* □

Proposition 4.27. *Soient A et B deux parties d'un espace métrique. Alors, on a :*

(i) $A \subset B \Longrightarrow \delta(A) \leqslant \delta(B)$.

(ii) $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$. □

Définition 4.28. *Soient Λ un ensemble non vide, (X, d) un espace métrique et $f : \Lambda \to X$ une application. On dit que f est* ***bornée*** *si son image $f(\Lambda)$ est une partie bornée de l'espace métrique X.*

4.5 Formulation séquentielle

Proposition 4.29. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors tout point x de X admet un système fondamental dénombrable de voisinages.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Montrons que la famille dénombrable de boules ouvertes $\left(B(x, \frac{1}{n})\right)_{n \geqslant 1}$ constitue un système fondamental de voisinages de x. Etant donné $V \in \mathscr{V}(x)$, d'après la caractérisation d'un voisinage d'un point d'un espace métrique, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V$. Mais comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{\varepsilon}$; c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Ceci entraîne que $B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, \varepsilon)$. Et comme $B(x, \varepsilon) \subset V$, il s'ensuit que $B(x, \frac{1}{n}) \subset V$. On vient donc de montrer que tout voisinage de x contient un voisinage du type $B(x, \frac{1}{n})$ $(n \geqslant 1)$. Ce qui montre que la famille $\left(B(x, \frac{1}{n})\right)_{n \geqslant 1}$ constitue un système fondamental de voisinage de x, comme prétendu. La proposition est démontrée. □

C'est cette dernière importante proposition qui va nous permettre dans la suite de formuler plusieurs concepts topologiques (dans des espaces métriques) de façon séquentielle ; c'est-à-dire en utilisant des suites. On commence par la suivante :

Proposition 4.30. *Soit (X, d) un espace métrique et soient A une partie non vide de X et a un point de X. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $a \in \overline{A}$.

(ii) *Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.*

(iii) $d(a, A) = 0$.

Démonstration. Nous allons montrer la série d'implications circulaire (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

• **(i) $\Rightarrow$ (ii) :** Supposons que $a \in \overline{A}$ et montrons qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. L'hypothèse $a \in \overline{A}$ entraîne qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B(a, \frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que $d(a_n, a) < \frac{1}{n}$. En fixant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un tel a_n, on obtient une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de A qui vérifie $d(a_n, a) < \frac{1}{n}$ ($\forall n \geqslant 1$). Cette suite converge bien vers a puisque $\lim_{n \to +\infty} d(a_n, a) = 0$ (compte tenu de l'inégalité $d(a_n, a) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$).

• **(ii) $\Rightarrow$ (iii) :** Supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a et montrons qu'on a $d(a, A) = 0$. L'hypothèse « $(a_n)_n$ converge vers a » équivaut à $\lim\limits_{n \to +\infty} d(a_n, a) = 0$. Ce qui entraîne que $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} d(a_n, a) = 0$. Mais puisque $\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subset A$, on a :

$$d(a, A) := \inf_{b \in A} d(b, a) \leqslant \inf_{n \in \mathbb{N}} d(a_n, a) = 0.$$

D'où l'on tire que $d(a, A) = 0$ (puisque $d(a, A) \geqslant 0$).

• **(iii) $\Rightarrow$ (i) :** Supposons que $d(a, A) = 0$ et montrons que $a \in \overline{A}$. Comme (par hypothèse) $\inf\limits_{b \in A} d(a, b) = d(a, A) = 0$, on a (d'après la caractérisation de la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A : \quad d(a, b) < \varepsilon.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A : \quad b \in B(a, \varepsilon).$$

Ce qui équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

Enfin, puisque tout voisinage de a contient une boule ouverte centrée en a, on a même :

$$\forall V \in \mathscr{V}(a) : \ V \cap A \neq \varnothing.$$

Ce qui montre bien que $a \in \overline{A}$. Ceci complète la preuve de la proposition. □

Corollaire 4.31 (caractérisation des fermés d'un espace métrique).
Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie de X. Alors A est un fermé de X ssi toute suite d'éléments de A qui converge dans X a pour limite un élément de A.

Démonstration. Si $A = \varnothing$, le résultat est trivial. Sinon, c'est une conséquence immédiate de l'équivalence $\big(A$ est fermé $\Leftrightarrow \overline{A} = A\big)$ et de l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) de la proposition 4.30. □

Dans les espaces métriques, la continuité d'une application est équivalente à sa continuité **séquentielle**. On a la suivante :

Proposition 4.32. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Soit aussi a un élément de X. Alors f est continue en a ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y converge vers $f(a)$.*

Démonstration.
($\Rightarrow$) : Supposons que f est continue en a et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X convergeant vers a. Nous allons montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (d'éléments de Y) converge vers $f(a)$. Etant donné $\varepsilon > 0$, comme f est supposée continue en a, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in X$:

$$d_X(x, a) < \eta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Par suite, étant donné un tel η, puisque $(x_n)_n$ converge vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n > n_0 \implies d_X(x_n, a) < \eta.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n > n_0 \implies d_X(x_n, a) < \eta \implies d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon.$$

En récapitulant, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : \quad n > n_0 \Longrightarrow d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.
($\Leftarrow$) : Montrons la contraposée. Supposons que f n'est pas continue en a et montrons qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X qui converge vers a telle que la suite $(f(x_n))_n$ (d'éléments de Y) ne converge pas vers $f(a)$. Comme (par hypothèse) f n'est pas continue en a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0, \exists x \in X \text{ tel que } d_X(x, a) < \eta \text{ et } d_Y(f(x), f(a)) \geqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\eta = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in X$ tel que $d_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$ et $d_Y(f(x_n), f(a)) \geqslant \varepsilon$. En fixant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un tel x_n, on obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de X telle que $(x_n)_n$ converge vers a $\big($puisque $\lim_{n\to+\infty} d_X(x_n, a) = 0$, en vertu de l'inégalité $d_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*\big)$ et la suite $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(a)$ $\big($puisque $d_Y(f(x_n), f(a)) \geqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*\big)$.
La proposition est démontrée. □

Remarques :

1. La première implication de la proposition 4.32 est vraie même quand X et Y sont des espaces topologiques quelconques. La seconde implication de la même proposition est aussi vraie lorsque X est métrique et Y est topologique séparé.

2. Lorsque X et Y sont des espaces topologiques et a est un élément de X, la propriété : « Pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X qui converge vers a, la suite $f(x_n)_n$ d'éléments de Y converge vers $f(a)$ » définit ce que l'on appelle *la continuité séquentielle* de f an a. Dans les espaces topologiques, la continuité d'une application (en un point) implique sa continuité séquentielle (au même point) mais l'inverse est généralement faux. Cependant, dans la cas particulier des espaces métriques, les notions de "continuité" et "continuité séquentielle" coïncident (c'est ce que montre la proposition 4.32).

Nous annonçons enfin la formulation séquentielle d'une valeur d'adhérence d'une suite.

Proposition 4.33. *Soit (X, d) un espace métrique et soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et ℓ un élément de X. Alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si et seulement s'il existe une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers ℓ.*

Démonstration.

$\underline{(\Rightarrow) :}$ Supposons que ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ et montrons qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers ℓ. Nous construisons récursivement une suite strictement croissante d'entiers positifs $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme suit : on prend $n_0 = 0$ et pour tout $k \geqslant 1$, en supposant que n_{k-1} est choisi, on prend pour n_k le plus petit entier qui soit strictement supérieur à n_{k-1} et qui vérifie $d(x_{n_k}, \ell) < \frac{1}{k}$ (l'existence de n_k est assurée par le fait que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$). La sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ vérifie alors $\lim_{k \to +\infty} d(x_{n_k}, \ell) = 0$; autrement dit $(x_{n_k})_k$ converge vers ℓ.

$\underline{(\Leftarrow) :}$ Supposons qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ qui converge vers ℓ et montrons que ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. Le fait que $(x_{n_k})_k$ converge vers ℓ s'interprète par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N} :\ k > k_0 \Longrightarrow d(x_{n_k}, \ell) < \varepsilon.$$

Mais puisque n_k tend vers l'infini avec k (car $(n_k)_k$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs), il s'ensuit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N \text{ tel que } d(x_n, \ell) < \varepsilon$$

(pour $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ donnés, il suffit de prendre $n = n_k$, avec $k > k_0(\varepsilon)$ et $n_k > N$). Ce qui montre que ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.

Ceci complète la preuve de la proposition. □

Remarque : La seconde implication de la proposition précédente est vraie même quand X est (seulement) un espace topologique.

4.6 Distance induite et sous-espace métrique

Définition 4.34. *Soit (X, d_X) un espace métrique et soit A une partie non vide de X. La restriction de d_X (en tant qu'application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$) à $A \times A$ constitue, de toute évidence, une distance* *sur A. Cette distance est notée* $\boldsymbol{d_A}$ *et est appelée* ***la distance induite sur $\boldsymbol{A}$ de la distance $\boldsymbol{d_X}$ de $\boldsymbol{X}$***. *On a donc :*

$$\begin{array}{rcl} d_A : \; A \times A & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (a,b) & \longmapsto & d_A(a,b) := d_X(a,b) \end{array}.$$

L'espace métrique (A, d_A) est appelé ***un sous-espace métrique de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d_X})$***.

N. B : On montre facilement que la topologie associée à une distance induite sur une partie A d'un espace métrique X est identique à la topologie induite sur A de la topologie de X (i.e., de la topologie associée à d_X).

4.7 Distance produit et espace produit

Définition 4.35. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(X_1, d^{(1)}), \dots, (X_n, d^{(d_n)})$ des espaces métriques. On peut définir sur le produit cartésien $X_1 \times \dots \times X_n$ plusieurs distances dont les suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} d_1 : \; (X_1 \times \dots \times X_n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d^{(i)}(x_i, y_i) \; ; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} d_2 : \; (X_1 \times \dots \times X_n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(d^{(i)}(x_i, y_i)\right)^2} \; ; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} d_\infty : \; (X_1 \times \dots \times X_n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} d^{(i)}(x_i, y_i). \end{array}$$

Pour d_1 et d_∞, la vérification des axiomes d'une distance est immédiate. Pour d_2, seule l'inégalité triangulaire pose quelques difficultés ; pour les surpasser, on renvoie le lecteur à l'exercice 1.2 qui lui servira comme source d'inspiration.

Ces distances d_1, d_2 et d_∞ sont appelées ***des distances produits*** *et les espaces métriques correspondant $(X_1 \times \dots \times X_n, d_1), (X_1 \times \dots \times X_n, d_2)$ et $(X_1 \times \dots \times X_n, d_\infty)$ sont appelés* ***des espaces métriques produits***.

Remarques :

1. On montre facilement que la topologie associée à une distance produit (issue des distances d'un nombre fini d'espaces métriques) est identique à la topologie produit (issue des topologies associées à ces distances) ; voir l'exercice 4.12 pour le cas de la distance produit d_∞. Ce fait s'exprime littérairement en annonçant que :

   Tout produit fini d'espaces métriques est métrisable.

2. Si (X_n, d_n) $(n \in \mathbb{N})$ sont des espaces métriques (donc topologiques) et $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est l'espace topologique produit, alors on peut montrer que l'application $d : X \to \mathbb{R}^+$, définie

par :

$$d\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \;:=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min\left(1, d_n(x_n, y_n)\right)}{2^n}$$

est une distance sur X et induit la topologie produit de X. D'où l'important résultat :

Tout produit dénombrable d'espaces métriques est métrisable.

3. Un produit infini non dénombrable d'espaces métriques n'est pas métrisable en général ! Par exemple, sur $X := \mathbb{R}^{[0,1]}$, la topologie produit de plusieurs copies de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, qui est définie autrement par la convergence simple des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, n'est pas métrisable.

4.8 Distances équivalentes et topologiquement équivalentes

Soit X un ensemble non vide et soient d et d' deux distances sur X.

Définition 4.36. *On dit que d et d' sont **équivalentes** s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que l'on ait :*

$$\alpha d \;\leqslant\; d' \;\leqslant\; \beta d.$$

Définition 4.37. *On dit que d et d' sont **topologiquement équivalentes** si elles définissent la même topologie ; c'est-à-dire si $\tau_d = \tau_{d'}$.*

La proposition suivante nous apporte un important point de vue sur l'équivalence et l'équivalence topologique de deux distances définies sur un même ensemble. L'important corollaire qui le suit tire profit de ce point de vue.

Proposition 4.38. *Soit X un ensemble non vide et soient d et d' deux distances sur X. Alors d et d' sont équivalentes si et seulement si l'application identité $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ est bilipschitzienne. Aussi, d et d' sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ est un homéomorphisme.*

Démonstration.

• Montrons la première partie de la proposition. L'application $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ est lipschitzienne équivaut à l'existence d'un $k > 0$ tel que :

$$d' \;\leqslant\; kd.$$

De même, son application inverse $\mathrm{id}_X^{-1} : (X, d') \to (X, d)$ est lipschitzienne équivaut à l'existence d'un $\ell > 0$ tel que :

$$d \;\leqslant\; \ell d'.$$

En adjoignant les deux choses, on obtient que l'application $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ est bilipschitzienne si et seulement s'il existe $k, \ell > 0$ tels que :

$$\frac{1}{\ell} d \leqslant d' \leqslant kd.$$

Ce qui équivaut (par définition même) au fait que d et d' sont équivalentes.

• Montrons maintenant la seconde partie de la proposition. L'application $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ est continue ssi l'image réciproque de tout ouvert de (X, d') est un ouvert de (X, d) ; ce qui revient simplement à dire (puisque id_X est l'identité) que $\tau_{d'} \subset \tau_d$. On montre de la même façon que l'application inverse de $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ (qui n'est rien d'autre que $\mathrm{id}_X : (X, d') \to (X, d)$) est continue ssi $\tau_d \subset \tau_{d'}$. En adjoignant les deux choses, on obtient que $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ est un homéomorphisme (i.e., bicontinue) ssi $\tau_d = \tau_{d'}$; c'est-à-dire ssi d et d' sont topologiquement équivalentes.

La proposition est démontrée. □

Corollaire 4.39. *Soit X un ensemble non vide et soient d et d' deux distances sur X. Si d et d' sont équivalentes alors elles sont aussi topologiquement équivalentes.*

Démonstration. Supposons que d et d' sont équivalentes ; ce qui revient à dire (en vertu de la proposition 4.38) que les applications $\mathrm{id} : (X, d) \to (X, d')$ et son inverse sont lipschitziennes. Ceci entraîne que ces mêmes applications sont uniformément continues et sont donc (à fortiori) continues ; autrement dit, l'application $\mathrm{id} : (X, d) \to (X, d')$ est un homéomorphisme. Il s'ensuit (en vertu de la proposition 4.38) que les distances d et d' sont topologiquement équivalentes. Le corollaire est démontré. □

Remarques :

1. Le corollaire 4.39 offre un moyen pratique pour montrer l'équivalence topologique de deux distances sur un même ensemble : pour montrer l'équivalence topologique de deux distances, définies sur un même ensemble, il suffit de montrer leur équivalence. Cependant, la réciproque du corollaire est généralement fausse ; autrement dit, il existe des distances topologiquement équivalentes qui ne sont pas équivalentes (voir les exercices 4.10 et 4.11).

2. Lorsque nous arriverons à l'étude des espaces vectoriels normés (au chapitre 8), nous verrons que les notions d'équivalence et d'équivalence topologique de deux distances (lorsqu'elles sont **associées à des normes**) ne font qu'une !

Exercices

⋆ **Exercice 4.1.** Soit X un ensemble non vide. Montrer que la topologie associée à la distance discrète de X est la topologie discrète de X.

⋆ **Exercice 4.2.** Montrer que toute boule fermée d'un espace métrique est un fermé.

⋆ **Exercice 4.3.** Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques. Soient aussi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et ℓ un élément de X. Soient enfin $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers ℓ dans l'espace métrique (X, d) ssi $(u_n)_n$ converge vers ℓ dans l'espace topologique (X, τ_d).
2. Montrer que f tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 en tant qu'application entre deux espaces métriques ssi f tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 en tant qu'application entre deux espaces topologiques (X, τ_d) et $(Y, \tau_{d'})$.
3. Montrer que f est continue en x_0 en tant qu'application entre deux espaces métriques ssi f est continue en x_0 en tant qu'application entre deux espaces topologiques (X, τ_d) et $(Y, \tau_{d'})$.
4. Montrer que f est continue sur X en tant qu'application entre deux espaces métriques ssi f est continue sur X en tant qu'application entre deux espaces topologiques (X, τ_d) et $(Y, \tau_{d'})$.

⋆ **Exercice 4.4.** Soit (X, d) un espace métrique et soient A et B deux parties non vides de X. Montrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \implies d(x, B) \leqslant d(x, A) \qquad (\forall x \in X)$.
2. $d(x, A) = d(x, \overline{A}) \qquad (\forall x \in X)$.
3. $[\forall x \in X : d(x, A) = d(x, B)] \iff \overline{A} = \overline{B}$.

⋆ **Exercice 4.5.** Montrer qu'une partie d'un espace métrique est bornée ssi elle est contenue dans une boule ouverte.

⋆ **Exercice 4.6.** Montrer que toute réunion finie de parties bornées d'un espace métrique est bornée.

⋆ **Exercice 4.7.** Soient A et B deux parties d'un espace métrique (X, d). Montrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \Longrightarrow \delta(A) \leqslant \delta(B)$.
2. $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

⋆ **Exercice 4.8.** Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X et x un élément de X.
— Montrer que x est un point d'accumulation de A si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A, tous distincts, qui converge vers x.

⋆ **Exercice 4.9.** Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les distances d_1, d_2 et d_∞ de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

⋆ **Exercice 4.10.** On munit $X :=]0,+\infty[$ des deux distances d et d' suivantes :

- d est la distance induite de la distance usuelle de $\mathbb{R}$.
- d' est définie par :

$$d'(x,y) \ := \ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \qquad\qquad (\forall x, y \in]0,+\infty[).$$

— Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes mais qu'elles ne sont pas équivalentes.

⋆ **Exercice 4.11.** Soit (X,d) un espace métrique et soit d' la distance de X définie par : $d' := \dfrac{d}{1+d}$.

1. Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes.
2. Supposons que $X = \mathbb{R}$ et que d est sa distance usuelle. Montrer que d' n'est pas équivalente à d.

Exercice 4.12. Soient $(X_1, d^{(1)}), \dots, (X_n, d^{(n)})$ des espaces métriques (où $n \in \mathbb{N}^*$) et soit $X := X_1 \times \cdots \times X_n$, muni de la distance d_∞ définie par :

$$\begin{array}{rccc} d_\infty : & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) & \longmapsto & \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} d^{(i)}(x_i,y_i) \end{array}.$$

— Montrer que la topologie de X associée à sa distance d_∞ est la même que la topologie produit sur X.

☞ Commencer par caractériser les boules ouverte de (X, d_∞).

✠ ✠ ✠

Chapitre 5

Espaces complets

5.1 Suites de Cauchy

Définition 5.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X est dite **de Cauchy** si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p > q > N \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

5.1.1 Quelques propriétés simples des suites de Cauchy

Proposition 5.2. *Toute suite de Cauchy d'un espace métrique est bornée.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique (X, d). Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, avec $p \geqslant q > N$: $d(x_p, x_q) < 1$. Ceci revient à dire que l'ensemble $\{x_n, n > N\}$ est borné (de diamètre $\leqslant 1$). Par ailleurs, l'ensemble $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ est également borné (puisqu'il est fini). Il en résulte donc que l'ensemble

$$\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\} \cup \{x_n, n > N\}$$

est aussi borné (en tant que réunion de deux ensembles bornés). Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. La proposition est démontrée. □

Proposition 5.3. Toute suite convergente d'un espace métrique est de Cauchy.

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Supposons que $(x_n)_n$ est convergente (vers un certain $\ell \in X$) et montrons qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a (d'après l'inégalité triangulaire) :

$$d(x_p, x_q) \leqslant d(x_p, \ell) + d(x_q, \ell).$$

Mais puisque $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N : d(x_n, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour un tel N, en prenant donc $p > q > N$, on obtient : $d(x_p, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_q, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ce qui entraîne (d'après l'inégalité triangulaire de ci-dessus) : $d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. En récapitulant, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p > q > N \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Ce qui montre que $(x_n)_n$ est de Cauchy. La proposition est démontrée. $\square$

Quelques remarques :

1. La réciproque de la proposition 5.3 n'est pas toujours vraie. Autrement dit, une suite de Cauchy d'un espace métrique quelconque n'est pas toujours convergente. Pour s'en convaincre, traitons deux exemples :
   (a) Dans $X =]0, +\infty[$, muni de la distance induite de la distance usuelle de $\mathbb{R}$, la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est de Cauchy dans X (puisque $\lim_{p,q \to +\infty} |x_p - x_q| = 0$) mais elle n'est pas convergente dans X (car sa limite dans $\mathbb{R}$ est égale à 0 et $0 \notin X$).
   (b) Dans $X = \mathbb{Q}$, muni de la distance induite de la distance usuelle de $\mathbb{R}$, la suite de terme général $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est de Cauchy (exercice) mais elle n'est pas convergente dans X (car sa limite dans $\mathbb{R}$ vaut e et $e \notin \mathbb{Q}$).
2. Si X est un ensemble non vide et d et d' deux distances topologiquement équivalentes de X, une suite d'éléments de X peut être de Cauchy dans (X, d) et ne pas l'être dans (X, d'). Pour s'en convaincre, voici un exemple : soit $X =]0, +\infty[$ et soient d la distance induite sur X de la distance usuelle de $\mathbb{R}$ (i.e., $d(x, y) := |x - y|$, $\forall x, y \in X$) et d' la distance de X définie par : $d'(x, y) := |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ $(\forall x, y \in X)$. On a déjà vu à l'exercice 4.10 que d et d' sont topologiquement équivalentes ; et pourtant la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est de Cauchy dans (X, d) mais elle n'est pas de Cauchy dans (X, d').
   Ainsi, la propriété d'« être de Cauchy » pour une suite n'est pas une propriété topologique (i.e., elle n'est pas conservée par l'application d'un homéomorphisme) ; elle n'est donc pas généralisable aux espaces topologiques quelconques.
3. On verra plus loin que si X est un ensemble non vide et d et d' deux distances équivalentes sur X alors toute suite de Cauchy dans (X, d) est également une suite de Cauchy dans (X, d').

Proposition 5.4. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application uniformément continue. Alors pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (X, d_X), la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (Y, d_Y).*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X, d_X) et montrons que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (Y, d_Y). Etant donné $\varepsilon > 0$, comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, x' \in X : \quad d_X(x, x') < \eta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \tag{$*$}$$

Fixons un tel η. Comme $(x_n)_n$ est de Cauchy (dans (X, d_X)), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, avec $p > q > N$, on a :

$$d_X(x_p, x_q) < \eta;$$

ce qui entraîne (en vertu de $(*)$) qu'on a :

$$d_Y(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon.$$

En récapitulant, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N}, \text{ avec } p > q > N, \text{ on a : } d_Y(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans (Y, d_Y). La proposition est démontrée. □

Corollaire 5.5. *Soit X un ensemble non vide et soient d et d' deux distances équivalentes sur X. Alors toute suite de Cauchy dans (X, d) est également une suite de Cauchy dans (X, d').*

Démonstration. Comme d et d' sont deux distance équivalentes de X, alors l'application identité $\mathrm{id} : (X, d) \to (X, d')$ est lipschitzienne (en vertu de la proposition 4.38) et est donc uniformément continue. Il s'ensuit (d'après la proposition 5.4) que l'image par id de toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ de (X, d) (qui n'est rien d'autre que la suite $(x_n)_n$ elle même) est une suite de Cauchy dans (X, d'). Autrement dit, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans (X, d'). Le corollaire est démontré. □

Proposition 5.6. *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy d'un espace métrique est -elle même- de Cauchy.*

Démonstration. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique (X, d) et $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_n$ (où $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs). Montrons que $(x_{n_k})_k$ est -elle même- de Cauchy. Etant donné $\varepsilon > 0$, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, avec $p > q > N$, on a : $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Etant donné un tel N, puisque $(n_k)_k$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs, on a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, avec $p > q > N$: $n_p > n_q \geqslant q > N$; d'où $d(x_{n_p}, x_{n_q}) < \varepsilon$ (d'après la propriété de Cauchy précédente vérifiée par $(x_n)_n$). En récapitulant, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N}, \text{ avec } p > q > N, \text{ on a : } d(x_{n_p}, x_{n_q}) < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ est de Cauchy. La proposition est démontrée. □

Proposition 5.7. *Si une suite de Cauchy d'un espace métrique possède une valeur d'adhérence alors elle converge vers cette valeur d'adhérence.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique (X, d). Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence ℓ ($\ell \in \mathbb{N}$) et montrons que $(x_n)_n$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, avec $p > q > N$: $d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons un tel N. Comme ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$, il existe $n_0 > N$ tel que $d(x_{n_0}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, en vertu de l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier positif $n > n_0$:

$$d(x_n, \ell) \leqslant d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En récapitulant, on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : \quad n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, \ell) < \varepsilon.$$

Ce qui montre bien que la suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ. La proposition est démontrée. □

5.2 Espaces métriques complets

Définition 5.8. Un espace métrique (X, d) est dit **complet** si toute suite de Cauchy de X est convergente.

L'important théorème suivant est déjà vu en première année (au module d'Analyse 1).

Théorème 5.9. *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *muni de sa distance usuelle est complet.*

La démonstration de ce théorème utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass dont l'énoncé est le suivant :

Le théorème de Bolzano-Weierstrass. *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration du théorème 5.9. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (muni de sa distance usuelle) et montrons qu'elle est convergente. L'hypothèse « $(x_n)_n$ est de Cauchy » entraîne (d'après la proposition 5.2) que $(x_n)_n$ est bornée. Ce qui entraîne (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass) qu'on peut extraire de $(x_n)_n$ une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. D'après la proposition 4.33, la limite ℓ de $(x_{n_k})_k$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$. Ce qui entraîne (d'après la proposition 5.7) que la suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ. Le théorème 5.9 est démontré. □

5.2.1 Quelques propriétés des espaces complets

Complétude d'un espace métrique produit

Proposition 5.10. *Soient* (X_1, d_1) *et* (X_2, d_2) *deux espaces métriques et soit* $X := X_1 \times X_2$, *muni d'une des distances produit définies au §4.7 (on munit par exemple* X *de la distance* $d = \max(d_1, d_2)$*). Alors l'espace métrique produit* (X, d) *est complet ssi chacun des deux espaces métriques* (X_1, d_1) *et* (X_2, d_2) *est complet.*

Démonstration.
• $(\Rightarrow)$ **:** Supposons que l'espace produit (X, d) est complet et montrons (en faisant d'une pierre deux coups) que chacun des deux espaces (X_1, d_1) et (X_2, d_2) l'est aussi. Soient alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy de (X_1, d_1) et (X_2, d_2) respectivement et montrons qu'elles sont toutes les deux convergentes. Par hypothèse, on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p > q > N \quad &\Longrightarrow \quad d_1(x_p, x_q) < \varepsilon \ \text{ et } \ d_2(y_p, y_q) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \max\left(d_1(x_p, x_q), d_2(y_p, y_q)\right) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad d\left((x_p, y_p), (x_q, y_q)\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X est de Cauchy dans (X, d). Et puisque (X, d) est supposé complet, on en déduit que $((x_n, y_n))_n$ est convergente dans (X, d). En désignant par $(\ell_1, \ell_2) \in X$ sa limite, on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n > n_0 \quad &\Longrightarrow \quad d\left((x_n, y_n), (\ell_1, \ell_2)\right) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \max\left(d_1(x_n, \ell_1), d_2(y_n, \ell_2)\right) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad d_1(x_n, \ell_1) < \varepsilon \ \text{ et } \ d_2(y_n, \ell_2) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ_1 (dans (X_1, d_1)) et la suite $(y_n)_n$ converge vers ℓ_2 (dans (X_2, d_2)). D'où la complétude de chacun des espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2).

• **$(\Leftarrow)$:** Supposons que les deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) sont complets et montrons que l'espace produit (X, d) l'est également. Soit donc $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (X, d) et montrons qu'elle est convergente. Par hypothèse, on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p > q > N \quad &\Longrightarrow \quad d\left((x_p, y_p), (x_q, y_q)\right) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \max\left(d_1(x_p, x_q), d_2(y_p, y_q)\right) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad d_1(x_p, x_q) < \varepsilon \ \text{ et } \ d_2(y_p, y_q) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que chacune des deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de (X_1, d_1) et (X_2, d_2) respectivement, est de Cauchy. Comme chacun des deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) est supposé complet, il s'ensuit que chacune de ces deux suites est convergente dans l'espace où elle est définie. En désignant par $\ell_1 \in X_1$ la limite de la suite $(x_n)_n$ et par $\ell_2 \in X_2$ la limite de la suite $(y_n)_n$, on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n > n_0 \quad &\Longrightarrow \quad d_1(x_n, \ell_1) < \varepsilon \ \text{ et } \ d_2(y_n, \ell_2) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \max\big(d_1(x_n, \ell_1), d_2(y_n, \ell_2)\big) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad d\big((x_n, y_n), (\ell_1, \ell_2)\big) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $((x_n, y_n))_n$ de (X, d) converge vers (ℓ_1, ℓ_2) $(\in X)$. L'espace métrique (X, d) est ainsi complet.

La proposition est démontrée. □

Remarque : Dans la proposition 5.10, au lieu de la distance $d = \max(d_1, d_2)$, on pourrait prendre une autre comme $(d_1 + d_2)$ ou $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$, ou plus généralement toute autre distance qui lui est équivalente.

La proposition 5.10 se généralise comme suit :

Proposition 5.11 (généralisation de la proposition 5.10)**.** *Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des espaces métriques et $X = X_1 \times \dots \times X_n$. On munit X de l'une des distances produit d définies au §4.7 (par exemple $d = \max(d_1, \dots, d_n)$). Alors l'espace métrique (X, d) est complet ssi chacun des espaces métriques $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ l'est.*

Démonstration. Soit on reprend la même démonstration de la proposition 5.10 en l'adaptant évidemment à n espaces (au lieu de deux), ou bien (encore plus simple) on procède par récurrence sur n en se servant de la proposition 5.10. □

Corollaire 5.12. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ muni de l'une des distances d_1, d_2 ou d_∞ (définies au §1.1.1, page 3) est complet.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.11 (prendre $X_1 = \cdots = X_n = \mathbb{R}$, tous munis de la même distance d_{us}, qui est la distance usuelle de $\mathbb{R}$). □

Corollaire 5.13. *L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de sa distance usuelle est complet.*

Démonstration. D'après le § 4.3.5, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathbb{C}, d_{\text{us}}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, d_2) \\ & z & \longmapsto & (\Re z, \Im z) \end{array}$$

constitue une isométrie bijective et est donc uniformément continue ainsi que son inverse. Étant donné $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathbb{C}, d_{\text{us}})$, la continuité uniforme de φ entraîne (d'après la proposition 5.4) que la suite $(\varphi(z_n))_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Par suite, comme ce dernier étant complet (d'après le corollaire 5.12) alors la suite $(\varphi(z_n))_n$ est convergente dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Enfin, la continuité de φ^{-1} entraîne (en vertu de la proposition 4.32) que la suite $(\varphi^{-1}(\varphi(z_n)))_n = (z_n)_n$ est également convergente dans $(\mathbb{C}, d_{\text{us}})$. Ceci conclut que toute suite de Cauchy de $(\mathbb{C}, d_{\text{us}})$ est convergente ; autrement dit, $(\mathbb{C}, d_{\text{us}})$ est complet. Le corollaire est démontré. □

Corollaire 5.14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{C}^n$ muni de l'une des distances d_1, d_2 ou d_∞ (définies au §1.1.1, page 3) est complet.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.11 (prendre $X_1 = \cdots = X_n = \mathbb{C}$, tous munis de la même distance d_{us}, qui est la distance usuelle de $\mathbb{C}$). □

Parties complètes d'un espace métrique

Définition 5.15. Soient (X, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. On dit que A est **complet** si le sous-espace métrique (A, d_A) de (X, d) est complet. Autrement dit, A est complet si toute suite d'éléments de A, qui est de Cauchy dans (X, d), converge vers un élément de A.

Proposition 5.16. *Tout sous-ensemble complet d'un espace métrique est un fermé.*

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Supposons que A est complet et montrons qu'il est fermé. Ceci revient à montrer (en vertu du corollaire 4.31) que toute suite d'éléments de A, qui converge dans X, a pour limite un élément de A. Soient alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge dans (X, d) vers un certain élément ℓ de X et montrons que $\ell \in A$. Comme $(x_n)_n$ est convergente dans (X, d) alors (en vertu de la proposition 5.3) elle est de Cauchy dans (X, d) ; donc aussi de Cauchy dans (A, d_A). Et puisque A est supposé complet, il en résulte que $(x_n)_n$ est convergente dans (A, d_A). Enfin, comme la limite de $(x_n)_n$ dans (A, d_A) est forcément la même que sa limite ℓ dans (X, d) $\big($car sinon $(x_n)_n$ aurait deux limites distinctes dans (X, d), ce qui n'est pas possible$\big)$, on en conclut que $\ell \in A$. La démonstration est achevée. □

Proposition 5.17. *Soient (X, d) un espace métrique complet et A un sous-ensemble de X. Alors A est complet ssi A est fermé.*

Démonstration.

- $\underline{(\Rightarrow)}$ **:** Si A est complet alors (d'après la proposition 5.16) A est fermé.
- $\underline{(\Leftarrow)}$ **:** Supposons que A est fermé et montrons qu'il est complet. Soit donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A, qui est de Cauchy dans (X, d), et montrons qu'elle converge vers un élément de A. Comme $(a_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace complet (X, d) alors elle est convergente dans (X, d) vers un certain $\ell \in X$. Mais puisque $(a_n)_n$ est une suite d'éléments de A alors $\ell \in \overline{A}$ (en vertu de la proposition 4.30). Enfin, puisque A est fermé, on a $\overline{A} = A$; d'où $\ell \in A$. Ainsi $(a_n)_n$ converge bien vers un élément de A. Ceci complète la preuve de la proposition. □

Proposition 5.18. *Soit (X, d) un espace métrique. On a les propriétés suivantes :*

(1) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles complets de X alors leur intersection $\cap_{i\in I} A_i$ est un sous-ensemble complet de X.

(2) Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) est une famille finie de sous-ensembles complets de X alors leur réunion $\cup_{i=1}^{n} A_i$ est un sous-ensemble complet de X.

Démonstration. Voir l'exercice 5.6. □

5.3 Quelques grands théorèmes classiques sur les espaces complets

Nous présentons dans cette section trois grands théorèmes classiques sur les espaces complet ; à savoir : *le théorème des fermés emboîtés de Cantor*, *le théorème du point fixe de Picard* et *le théorème de Baire*.

Théorème 5.19 (le théorème des fermés emboîtés de Cantor).
Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés emboîtés de X (i.e., $F_n \supset F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$) qui sont tous non vides et tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$. Alors l'intersection $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est réduite à un singleton.

Démonstration. Comme $\cap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ est contenue dans chaque F_n $(n \in \mathbb{N})$ alors on a $\delta(\cap_{k\in\mathbb{N}} F_k) \leqslant \delta(F_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Mais puisque $\lim_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$, il en résulte (en faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente) que $\delta(\cap_{k\in\mathbb{N}} F_k) \leqslant 0$; d'où $\delta(\cap_{k\in\mathbb{N}} F_k) = 0$. Ceci entraîne que l'ensemble $\cap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ contient au plus un élément. Pour conclure que cet ensemble est précisément un singleton, il suffit donc de montrer qu'il est non vide. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons[1] un élément x_n de F_n (ceci est possible car, par hypothèse, $F_n \neq \emptyset$). Nous allons montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi

1. C'est l'axiome du choix qui nous le permet.

obtenue est de Cauchy dans (X, d). Comme par hypothèse $\lim_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ alors, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N \implies \delta(F_n) < \varepsilon.$$

En fixant un tel N, puisque les fermés F_n $(n \in \mathbb{N})$ sont emboîtés, on a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$:

$$p > q \geqslant N \implies x_p, x_q \in F_N \implies d(x_p, x_q) \leqslant \delta(F_N) < \varepsilon.$$

En récapitulant, on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p > q \geqslant N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (X, d), comme prétendu. Mais puisque (X, d) est supposé complet, il s'ensuit que $(x_n)_n$ est convergente dans (X, d). En désignant par ℓ la limite de $(x_n)_n$, ce même ℓ est aussi la limite de toutes les sous-suites[2] $(x_n)_{n\geqslant k}$ $(k \in \mathbb{N})$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n)_{n\geqslant k}$ est une suite d'éléments de F_k (qui est un fermé) alors sa limite ℓ appartient à F_k. D'où $\ell \in \cap_{k\in\mathbb{N}} F_k$. L'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est donc non vide et on a précisément $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{\ell\}$, qui est bien un singleton. Le théorème est démontré. □

Exercice : Montrer que la réciproque du théorème de Cantor précédent est aussi vraie ; c'est-à-dire que tout espace métrique (X, d) vérifiant la propriété $(\star)$ suivante de Cantor est complet.

$(\star)$ Pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles fermés emboîtés de X telle que $\lim_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$, l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Solution : Voir l'exercice 5.7. □

Théorème 5.20 (le théorème du point fixe).
Une application contractante d'un espace métrique complet dans lui même possède un et un seul point fixe.

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application contractante ; disons lipschitzienne d'un rapport $k < 1$. Il s'agit de montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans X. Pour ce faire, on introduit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de X définie par : $x_0 \in X$ (choisi arbitrairement) et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrons que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (X, d). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$d(x_{n+1}, x_n) \;=\; d\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \;\leqslant\; k\, d(x_n, x_{n-1})$$

(puisque f est lipschitzienne de rapport k).
En réitérant plusieurs fois cette inégalité, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d(x_{n+1}, x_n) \;\leqslant\; k\, d(x_n, x_{n-1}) \;\leqslant\; k \cdot k\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) \;\leqslant\; \dots \;\leqslant\; \underbrace{k \cdot k \cdots k}_{n \text{ fois}}\, d(x_1, x_0);$$

2. Ces sous-suites sont juste des décalées de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c'est-à-dire :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0) \tag{$\star$}$$

Par suite, en utilisant (dans cet ordre) l'inégalité triangulaire généralisée puis l'inégalité ($\star$), on a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, avec $p > q$:

$$\begin{aligned}
d(x_p, x_q) &\leqslant d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \cdots + d(x_{q+1}, x_q) \\
&\leqslant k^{p-1} d(x_1, x_0) + k^{p-2} d(x_1, x_0) + \cdots + k^q d(x_1, x_0) \\
&= \left(k^q + k^{q+1} + \cdots + k^{p-1}\right) d(x_1, x_0) \\
&= k^q \left(\frac{1 - k^{p-q}}{1 - k}\right) d(x_1, x_0) \\
&\leqslant \frac{k^q}{1 - k} d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{q \to +\infty} \frac{k^q}{1-k} d(x_1, x_0) = 0$ (car $k \in]0, 1[$), il s'ensuit que $\lim_{\substack{p,q \to +\infty \\ p > q}} d(x_p, x_q) = 0$. Ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (X, d), comme prétendu. Mais puisque (X, d) est complet alors la suite $(x_n)_n$ est convergente. En désignant par ℓ la limite de $(x_n)_n$, on a d'une part : $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n) = f(\ell)$ (car f est continue, étant donné qu'elle est lipschitzienne) et d'autre part : $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \ell$. Il en résulte de l'unicité de la limite que l'on a $f(\ell) = \ell$; autrement dit, ℓ est un point fixe de f. Montrons maintenant que ce point fixe ℓ de f est unique. Si ℓ' est un autre point fixe de f, on a d'une part : $d(f(\ell), f(\ell')) = d(\ell, \ell')$ et d'autre part : $d(f(\ell), f(\ell')) \leqslant k d(\ell, \ell')$ (puisque f est lipschitzienne de rapport k). D'où $d(\ell, \ell') \leqslant k d(\ell, \ell')$; c'est-à-dire $(1 - k) d(\ell, \ell') \leqslant 0$. Ce qui entraîne (puisque $k \in]0, 1[$ et $d(\ell, \ell') \geqslant 0$) que $d(\ell, \ell') = 0$. D'où $\ell = \ell'$. Ainsi f possède un unique point fixe qui est ℓ. Le théorème est démontré. □

Théorème 5.21 (le théorème de Baire - 1899).
Dans un espace métrique complet, on a les deux propriétés équivalentes suivantes :

(i) Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

(ii) Toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense.

Démonstration. L'équivalence entre les propriétés (i) et (ii) se démontre immédiatement par passage aux complémentaires (voir l'exercice 5.8). Il suffit alors de montrer l'une de ces deux propriétés (i) et (ii). Montrons par exemple (ii). Etant donné (E, d) un espace métrique complet, soit $(O_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'ouverts partout denses et montrons que $\cap_{n=1}^{+\infty} O_n$ est partout dense. Il s'agit de montrer que $\cap_{n=1}^{+\infty} O_n$ rencontre tout ouvert non vide de E. Soit donc Ω un ouvert non vide de E et montrons que $(\cap_{n=1}^{+\infty} O_n) \cap \Omega \neq \varnothing$. Pour ce faire, on suit le procédé récursif suivant :
— Comme O_1 est partout dense alors $O_1 \cap \Omega \neq \varnothing$; d'où (puisque $O_1 \cap \Omega$ est un ouvert de E) $O_1 \cap \Omega$ contient une boule ouverte (non vide) de rayon aussi petit qu'on le souhaite, qui contient à son tour une boule fermée (non vide) de rayon aussi petit qu'on le souhaite. En particulier, $O_1 \cap \Omega$ contient une boule fermée $\overline{B}(x_1, r_1)$, avec $x_1 \in E$ et $0 < r_1 < 1/2$.
— Par suite, comme O_2 est partout dense alors $O_2 \cap B(x_1, r_1) \neq \varnothing$; d'où (puisque $O_2 \cap B(x_1, r_1)$ est

un ouvert de E) $O_2 \cap B(x_1, r_1)$ contient une boule fermée $\overline{B}(x_2, r_2)$, avec $x_2 \in E$ et $0 < r_2 < 1/4$.
— Par suite, comme O_3 est partout dense alors $O_3 \cap B(x_2, r_2) \neq \varnothing$ et donc $O_3 \cap B(x_2, r_2)$ contient une boule fermée $\overline{B}(x_3, r_3)$, avec $x_3 \in E$ et $0 < r_3 < \frac{1}{8}$, ...etc.
Ce procédé (infini) nous fournit une suite de boules fermées emboîtées

$$\overline{B}(x_1, r_1) \ \supset \ \overline{B}(x_2, r_2) \ \supset \ \overline{B}(x_3, r_3) \ \supset \ \dots$$

qui sont toutes non vides et dont la suite des diamètres $(\delta_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (puisque $\delta_n \leqslant 2r_n < 2 \times \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). Il s'ensuit, en vertu du théorème des fermés emboîtés de Cantor (i.e. le théorème 5.19), que l'intersection $\cap_{n \geqslant 1} \overline{B}(x_n, r_n)$ est réduite à un singleton $\{x\}$ ($x \in E$). Enfin, ce point x appartient d'une part à tous les O_n ($n \geqslant 1$), puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \in \overline{B}(x_n, r_n) \subset O_n$; et il appartient d'autre part à Ω, puisque $x \in \overline{B}(x_1, r_1) \subset \Omega$. D'où $x \in (\cap_{n=1}^{+\infty} O_n) \cap \Omega$. Ce qui montre que $(\cap_{n=1}^{+\infty} O_n) \cap \Omega \neq \varnothing$ et complète cette démonstration. □

Remarques complémentaires :

1. Un espace topologique (non forcément métrisable) qui vérifie l'une (donc également l'autre) des propriétés équivalentes (i) et (ii) du théorème 5.21 s'appelle **un espace de Baire**. Le théorème 5.21 se reformule alors plus simplement en énonçant que « tout espace métrique complet est de Baire ». Noter qu'il existe d'autres conditions suffisantes simples sur un espace topologique pour qu'il soit de Baire. On montre par exemple que « tout espace topologique localement compact est de Baire » et que « tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire ».

2. Une partie d'un espace topologique qui est contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides s'appelle **une partie maigre**. Un espace de Baire (voir le point ci-dessus) est donc simplement un espace topologique où le seul ouvert maigre est l'ensemble vide.

3. Le théorème de Baire (i.e. le théorème 5.21) est un outil puissant pour l'Analyse. Il possède des conséquences remarquables sur les fonctions à variable réelle ou complexe (continuité, dérivabilité, holomorphie, etc). À titre d'exemple, il montre que la limite simple [3] d'une suite d'applications continues (d'un espace métrique dans un autre espace métrique) est une application continue sur une partie partout dense. Une conséquence immédiate de ce résultat énonce que « la dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur une partie dense dans $\mathbb{R}$ ».
   En Analyse fonctionnelle, le théorème de Baire s'applique pour démontrer un théorème fondamental, connu sous le nom du « théorème de Banach-Steinhaus ».

3. Au module d'Analyse 3, l'étudiant a appris que l'une des conditions suffisantes (mais loin d'être nécessaire) pour que la limite simple d'une suite d'applications continues (d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) soit continue sur I est la convergence uniforme sur I de cette suite de fonctions.

Exercices

⋆ **Exercice 5.1.** Soient $E :=]0, +\infty[$ et d la distance de E définie par :

$$d(x, y) := |\ln x - \ln y| \qquad (\forall x, y \in E).$$

— Montrer que l'espace métrique (E, d) est complet.

⋆ **Exercice 5.2.** Soit d la distance de $\mathbb{R}$ définie par :

$$d(x, y) := |\arctan x - \arctan y| \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

— L'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet ?

⋆ **Exercice 5.3.** En utilisant convenablement le théorème du point fixe, montrer que l'équation :

$$\sqrt{x^2 + 1} = e^{2x} - x - 1$$

possède une solution unique sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

⋆ **Exercice 5.4.** En utilisant convenablement le théorème du point fixe, montrer que le système de deux équations :

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 3x \\ \cos x + 2\sin y = 4y \end{cases}$$

possède une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

⋆ **Exercice 5.5.** Soit (E, d) un espace métrique et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n(x) = d(u_n, x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\alpha_n(x))_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$.
   Pour la suite, on définit :
   $$\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) := \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n(x) \end{array}.$$
2. Montrer que f est continue.
3. Montrer qu'on a $\inf\limits_{x \in E} f(x) = 0$ et donner la condition sur $(u_n)_n$ pour que cet infinimum soit atteint.

⋆ **Exercice 5.6.** Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que toute intersection de parties complètes de E est une partie complète de E.
2. Montrer que toute réunion finie de parties complètes de E est une partie complète de E.

⋆ **Exercice 5.7** (la réciproque du théorème de Cantor).

Soit (E, d) un espace métrique vérifiant la propriété des fermés emboîtés de Cantor.

— Montrer que (E, d) est complet.

☞ Etant donnée une suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E, considérer la suite de fermés emboîtés $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E, avec $F_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

⋆ **Exercice 5.8** (les propriétés de Baire).

Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

(ii) Toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense.

⋆ **Exercice 5.9.** En utilisant le théorème de Baire, montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

⋆ **Exercice 5.10.**

1. Montrer que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$.
2. En se servant du théorème de Baire, en déduire que $\mathbb{Q}$ ne peut pas s'écrire comme intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.11. Soit (E, d) un espace métrique complet. On suppose que E est une réunion dénombrable de fermés ; c'est-à-dire que E s'écrit : $E = \cup_{n=1}^{+\infty} F_n$ (avec F_n est un fermé de E, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On pose $\Omega := \cup_{n=1}^{+\infty} \overset{\circ}{F_n}$.

— Montrer que Ω est dense dans E.

☞ Appliquer le théorème de Baire pour les fermés $F'_n := F_n \cap (E \backslash \Omega)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

✠ ✠ ✠

Chapitre 6

Espaces compacts

6.1 Définitions et premières propriétés

Définitions 6.1.

• Soient E un ensemble et $(\theta_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On dit que $(\theta_i)_{i\in I}$ **recouvre** E (ou constitue un **recouvrement** de E) si $\bigcup_{i\in I}\theta_i = E$.

• Si $(\theta_i)_{i\in I}$ est un recouvrement d'un ensemble E, une sous-famille $(\theta_i)_{i\in I_0}$ $(I_0 \subset I)$ de la famille $(\theta_i)_{i\in I}$, qui est elle même un recouvrement de E, s'appelle **un sous-recouvrement** de E du recouvrement $(\theta_i)_{i\in I}$.

• Un recouvrement $(\theta_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E est dit **fini** si l'ensemble d'indices I est fini.

• Lorsque (E,τ) est un espace topologique, un recouvrement de E constitué d'ouverts de E s'appelle **un recouvrement ouvert** de E.

La propriété de Borel-Lebesgue d'un espace topologique

Définition 6.2. Soit (E,τ) un espace topologique. On dit que E satisfait **la propriété de Borel-Lebesgue** si :

« De tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini ».

Autrement dit, si :

$\forall (O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $\cup_{i\in I} O_i = E$, $\exists I_0 \subset I$, avec I_0 fini, tel que $\cup_{i\in I_0} O_i = E$.

La compacité d'un espace topologique

Définition 6.3. *Un espace topologique (E,τ) est dit **compact** s'il est séparé et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.*

Exemples :

1. Si E est un ensemble fini, muni de sa topologie discrète τ_{dis}, alors l'espace topologique (E, τ_{dis}) est compact. En effet, E est bien séparé et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue (puisqu'il n y a qu'un nombre fini d'ouverts de E, étant donné que E est fini).
2. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, muni de sa topologie usuelle, n'est pas compact. En effet, la famille $(]-n, n[)_{n\in\mathbb{N}^*}$ constitue bien un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$ mais on ne peut extraire d'elle aucun sous-recouvrement fini (car toute réunion finie d'intervalles ayant la forme $]-n, n[$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ donne un ensemble borné de $\mathbb{R}$ et ne peut donc être égale à $\mathbb{R}$).

Remarque : Pour les anglo-saxons, l'axiome de séparation n'est pas inclus dans la définition de la compacité d'un espace topologique !

Définition 6.4. Une partie A d'un espace topologique (E, τ) est dite **compacte** si le sous-espace topologique (A, τ_A) de (E, τ) est compact.

La proposition suivante a pour but de caractériser la compacité d'une partie d'un espace topologique séparé E sans faire appel à la topologie induite résultante (c'est-à-dire en travaillant directement avec les ouverts de E).

Proposition 6.5 (fondamentale). *Soient (E, τ) un espace topologique séparé et A une partie de E. Alors A est compacte ssi de toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E dont la réunion contient A, on peut extraire un nombre fini d'ouverts dont la réunion contient A.*

Démonstration. Comme (E, τ) est séparé alors tout sous-espace topologique de E est séparé (voir l'exercice 3.6) ; en particulier (A, τ_A) est séparé. Par conséquent, A est compacte ssi le sous-espace topologique (A, τ_A) de (E, τ) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue. Il nous suffit donc de montrer que la propriété de Borel-Lebesgue pour (A, τ_A) est équivalente à la propriété énoncée dans la proposition.

• $(\Rightarrow)$: Supposons que (A, τ_A) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue et soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $\cup_{i\in I} O_i \supset A$. Nous devons montrer qu'il existe $I_0 \subset I$, avec I_0 fini, tel que $\cup_{i\in I_0} O_i \supset A$. La famille $(O_i \cap A)_{i\in I}$ est constituée d'ouverts de (A, τ_A) (puisque les O_i sont des ouverts de (E, τ)) et vérifie :

$$\bigcup_{i\in I} (O_i \cap A) = \left(\bigcup_{i\in I} O_i\right) \cap A = A$$

(puisque $\cup_{i\in I} O_i \supset A$ par hypothèse). Cette famille $(O_i \cap A)_{i\in I}$ constitue donc un recouvrement ouvert de (A, τ_A). Comme (par supposition) (A, τ_A) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue, on peut extraire de ce recouvrement $(O_i \cap A)_{i\in I}$ de A un sous-recouvrement fini $(O_i \cap A)_{i\in I_0}$ ($I_0 \subset I$, I_0 fini). On a alors :

$$\bigcup_{i\in I_0} (O_i \cap A) = A,$$

c'est-à-dire :
$$\left(\bigcup_{i \in I_0} O_i\right) \cap A \;=\; A.$$
D'où l'on déduit que :
$$\left(\bigcup_{i \in I_0} O_i\right) \;\supset\; \left(\bigcup_{i \in I_0} O_i\right) \cap A \;=\; A,$$
confirmant la propriété requise.

• $(\Leftarrow)$: Supposons que de toute famille $(O_i)_{i \in I}$, d'ouverts de E dont la réunion contient A, on peut extraire un nombre fini d'ouverts de E dont la réunion contient A et montrons que le sous-espace topologique (A, τ_A) de (E, τ) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue. Soit donc $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de (A, τ_A) et montrons qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Comme chaque Ω_i $(i \in I)$ appartient à τ_A alors Ω_i s'écrit : $\Omega_i = O_i \cap A$, avec O_i est un ouvert de E. Par hypothèse, on a $\cup_{i \in I} \Omega_i = A$, qui s'écrit donc $\cup_{i \in I}(O_i \cap A) = A$, ce qui équivaut à : $(\cup_{i \in I} O_i) \cap A = A$ et montre qu'on a :
$$\bigcup_{i \in I} O_i \;\supset\; \left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) \cap A \;=\; A.$$
On dispose ainsi d'une famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E dont la réunion contient A. D'après notre supposition, on peut extraire de cette famille un nombre fini d'ouverts de E dont la réunion contient A ; autrement dit, $\exists I_0 \subset I$, I_0 fini, tel que :
$$\bigcup_{i \in I_0} O_i \;\supset\; A.$$
Ceci entraîne qu'on a :
$$\left(\bigcup_{i \in I_0} O_i\right) \cap A \;=\; A,$$
c'est-à-dire :
$$\bigcup_{i \in I_0} (O_i \cap A) \;=\; A.$$
Autrement dit :
$$\bigcup_{i \in I_0} \Omega_i \;=\; A.$$
Ce qui montre que la famille $(\Omega_i)_{i \in I_0}$ est un recouvrement de A, qui est bien fini et extrait du recouvrement ouvert initial $(\Omega_i)_{i \in I}$ de (A, τ_A). Ainsi l'on conclut que (A, τ_A) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve de la proposition. □

La proposition suivante fournit une autre façon de définir (ou de caractériser) un espace topologique compact en se servant de familles de fermés au lieu de familles d'ouverts.

Proposition 6.6. *Soit (E, τ) un espace topologique séparé. Alors E est compact ssi de toute famille de fermés d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie de fermés d'intersection vide.*

Démonstration.

• (⇒) : Supposons que E est compact et soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermé de E d'intersection vide (i.e., $\cap_{i\in I}F_i = \emptyset$). Il s'agit de montrer qu'il existe $I_0 \subset I$, I_0 fini, tel que $\cap_{i\in I_0}F_i = \emptyset$. Comme pour chaque $i \in I$, F_i est un fermé de E alors F_i s'écrit $F_i = \complement_E O_i$, avec O_i est un ouvert de E. L'égalité ensembliste $\cap_{i\in I}F_i = \emptyset$ s'écrit alors $\cap_{i\in I}(\complement_E O_i) = \emptyset$; ce qui équivaut (d'après les formules de De Morgan) à $\complement_E(\cup_{i\in I}O_i) = \emptyset$; qui équivaut encore à $\cup_{i\in I}O_i = E$. Cette dernière montre que la famille $(O_i)_{i\in I}$ constitue un recouvrement ouvert de E. Comme E est supposé compact, on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini ; autrement dit, $\exists I_0 \subset I$, I_0 fini, tel que $\cup_{i\in I_0}O_i = E$. D'où l'on déduit que :

$$\complement_E\left(\bigcup_{i\in I_0} O_i\right) = \complement_E E = \emptyset.$$

Ce qui équivaut (d'après les formules de De Morgan) à :

$$\bigcap_{i\in I_0}(\complement_E O_i) = \emptyset,$$

c'est-à-dire :

$$\bigcap_{i\in I_0} F_i = \emptyset,$$

qui donne le résultat requis.

• (⇐) : Supposons maintenant que de toute famille de fermés (de E) d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie de fermés d'intersection vide et montrons que E est compact. Comme E est supposé séparé, il reste juste à montrer que E satisfait la propriété de Borel-Lebesgue. Soit donc $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E et montrons qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. L'égalité ensembliste $\cup_{i\in I}O_i = E$ entraîne (en prenant les complémentaires dans E de ses deux membres) : $\complement_E(\cup_{i\in I}O_i) = \emptyset$. Ce qui équivaut (en vertu des formules de De Morgan) à :

$$\bigcap_{i\in I}(\complement_E O_i) = \emptyset.$$

La famille $(\complement_E O_i)_{i\in I}$ est ainsi une famille de fermés de E (puisque les O_i sont des ouverts de E) d'intersection vide. D'après notre supposition, on peut extraire de cette famille une sous-famille finie de fermés $(\complement_E O_i)_{i\in I_0}$ ($I_0 \subset I$, I_0 fini) d'intersection vide ; soit $\cap_{i\in I_0}(\complement_E O_i) = \emptyset$. Ce qui équivaut (d'après les formules de De Morgan) à :

$$\complement_E\left(\bigcup_{i\in I_0} O_i\right) = \emptyset.$$

En prenant enfin les complémentaires dans E des deux membres de cette dernière, on obtient :

$$\bigcup_{i\in I_0} O_i = E.$$

Ce qui montre que la famille $(O_i)_{i\in I_0}$ constitue un recouvrement de E qui est bien un sous-recouvrement fini du recouvrement initial $(O_i)_{i\in I}$ de E. Ainsi, l'espace topologique (E, τ) satisfait

la propriété de Borel-Lebesgue et il est par conséquent compact.
Ceci complète la preuve de la proposition. □

La proposition suivante est laissée comme exercice au soin du lecteur.

Proposition 6.7. *Soient (E, τ) un espace topologique séparé et A une partie de E. Alors A est compacte ssi de toute famille de fermés (de E) d'intersection disjointe avec A, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection disjointe avec A.* □

6.2 Propriétés des espaces topologiques compacts

Théorème 6.8. *Soit (E, τ) un espace topologique séparé. Alors toute partie compacte de E est fermée.*

Démonstration. Soit A une partie de E. Supposons que A est compacte et montrons qu'elle est fermée. Cela revient à montrer que $\complement_E A$ est un ouvert. Ce qui revient encore à montrer que $\complement_E A$ est voisinage de chacun de ses points. Soit donc $y \in \complement_E A$ et montrons que $\complement_E A$ est un voisinage de y. Pour tout $x \in A$, puisque $x \neq y$ (car $y \in \complement_E A$), la séparation de E entraîne qu'il existe un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert $V_y^{(x)}$ de y tels que $V_x \cap V_y^{(x)} = \varnothing$. Maintenant, comme A est supposé compact et qu'on a de toute évidence :

$$\bigcup_{x \in A} V_x \supset A,$$

alors (en vertu de la proposition 6.5) on peut extraire de la famille d'ouverts $(V_x)_{x \in A}$ une sous-famille finie $(V_{x_i})_{i=1,\dots,n}$ telle que $\cup_{i=1}^n V_{x_i} \supset A$. Par passage au complémentaires dans E, on obtient (compte tenu des formules de De Morgan) :

$$\bigcap_{i=1}^{n} (\complement_E V_{x_i}) \subset \complement_E A.$$

Mais puisque $V_y^{(x)} \subset \complement_E V_x$ pour tout $x \in A$ (car $V_x \cap V_y^{(x)} = \varnothing$), il s'ensuit que :

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_y^{(x_i)} \subset \bigcap_{i=1}^{n} (\complement_E V_{x_i}) \subset \complement_E A.$$

Enfin, comme $\cap_{i=1}^n V_y^{(x_i)}$ est un ouvert de E contenant y (car c'est une intersection finie d'ouverts de E contenant y), on en conclut que $\complement_E A$ est bien un voisinage de y. Ce qui complète cette démonstration. □

Théorème 6.9. *Soit (E, τ) un espace topologique compact. Alors toute partie fermée de E est compacte.*

Démonstration. Soit A une partie fermée de E et montrons que A est compacte. D'après la proposition 6.7, cela revient à montrer que de toute famille de fermés (de E) d'intersection disjointe avec A, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection disjointe avec A. Soit donc $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E d'intersection disjointe avec A (i.e., $(\cap_{i \in I} F_i) \cap A = \varnothing$) et montrons qu'on peut extraire d'elle une sous-famille finie $(F_i)_{i \in I_0}$ ($I_0 \subset I$, I_0 fini) telle que l'intersection $\cap_{i \in I_0} F_i$ soit disjointe avec A (i.e., $(\cap_{i \in I_0} F_i) \cap A = \varnothing$). Comme A est supposée fermée, la famille $\{(F_i)_{i \in I}, A\}$ (constituée des F_i ($i \in I$) et de A) est une famille de fermés de E d'intersection vide. La compacité de E entraîne alors (en vertu de la proposition 6.6) qu'on peut extraire de cette famille une sous-famille finie d'intersection vide. Cette sous-famille est de l'une des deux formes suivantes :

$$(F_i)_{i \in I_0} \quad \text{ou} \quad \left\{(F_i)_{i \in I_0}, A\right\},$$

avec $I_0 \subset I$, I_0 fini. Dans les deux situations, on a :

$$\left(\bigcap_{i \in I_0} F_i\right) \cap A = \varnothing.$$

Ce qui donne le résultat requis et achève cette démonstration. □

Remarque : En réunissant les deux théorèmes 6.8 et 6.9, on voit que dans un espace topologique compact, on a équivalence entre « partie fermée » et « partie compacte ».

Corollaire 6.10. *Soient E un espace topologique et A une partie compacte de E. Alors, toute partie fermée de E et incluse dans A est compacte.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 6.9 au sous-espace topologique A de E. □

Le résultat de ce dernier corollaire peut s'exprimer littérairement comme ceci :

Toute partie fermée incluse dans une partie compacte d'un espace topologique est, elle même, compacte.

Théorème 6.11. *Dans un espace topologique séparé E, on a les deux propriétés suivantes :*

(i) Toute réunion finie de parties compactes de E est un compact de E.

(ii) Toute intersection de parties compactes de E est un compact de E.

Démonstration. Voir l'exercice 6.4. □

Théorème 6.12. *Soit E un espace topologique compact. Alors toute suite de E possède au moins une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E. D'après le résultat de l'exercice 3.2, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est égale à :

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k, \qquad \text{avec} \qquad F_k := \overline{\{x_n\ ,\ n \geqslant k\}}.$$

Il s'agit donc de montrer que $\cap_{k\in\mathbb{N}} F_k \neq \varnothing$. Procédons par l'absurde en supposant que $\cap_{k\in\mathbb{N}} F_k = \varnothing$. Alors, comme E est compact, on peut extraire de la famille de fermés d'intersection vide $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-famille finie $(F_{k_i})_{i=1,\dots,r}$ d'intersection vide ; soit

$$F_{k_1} \cap \dots \cap F_{k_r} = \varnothing.$$

Mais d'un autre côté on a (puisque tout ensemble est contenu dans son adhérence) :

$$F_{k_1} \cap \dots \cap F_{k_r} \supset \bigcap_{i=1}^{r} \{x_n \ , \ n \geqslant k_i\} = \{x_n \ , \ n \geqslant \max(k_1, \dots, k_r)\} \neq \varnothing,$$

ce qui contredit bien le fait établi juste au dessus. On a donc $\cap_{k\in\mathbb{N}} F_k \neq \varnothing$ et la suite $(x_n)_n$ possède, par conséquent, au moins une valeurs d'adhérence. Le théorème est démontré. $\square$

6.3 Caractérisation des espaces métriques compacts

La propriété de Bolzano-Weierstrass d'un espace métrique

Définition 6.13. Soit (E, d) un espace métrique. On dit que E satisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass si :

« Toute suite de E possède une sous-suite convergente ».

Théorème 6.14 (la caractérisation de Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit (E, d) un espace métrique. Alors E est compact ssi E satisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass.*

Remarque : Il y a la compacité *à la Borel-Lebesgue* (qui est plus générale puisqu'elle définit la compacité d'un espace topologique quelconque) et la compacité *à la Bolzano-Weierstrass* (qui est restreinte aux espaces métriques). La caractérisation de Bolzano-Weierstrass (du théorème 6.14) est quelquefois prise comme définition des espaces métriques compacts (notamment pour les non matheux). Elle est effectivement moins abstraite et plus cernable que la caractérisation en termes de recouvrements ouverts ; néanmoins, cette dernière est plus puissante et plus riche en applications.

Pour démontrer le théorème 6.14, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 6.15. *Soit (E, d) un espace métrique satisfaisant la propriété de Bolzano-Weierstrass. Alors pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de E, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$, la boule ouverte $B(x, r)$ est incluse dans l'un au moins des ouverts O_i ($i \in I$).*

Preuve du lemme 6.15. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. On procède par l'absurde en supposant que :

$$\forall r > 0, \exists x \in E \text{ tel que } \forall i \in I : \ B(x, r) \not\subset O_i.$$

En prenant en particulier $r = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E \text{ tel que } \forall i \in I : \ B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset O_i.$$

En fixant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un tel x_n, on obtient une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E. D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass (supposée satisfaite par E), cette suite possède au moins une sous-suite convergente. Soit $(x_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite convergente de $(x_n)_n$ et $\ell \in E$ sa limite. Comme $(O_i)_{i \in I}$ constitue un recouvrement de E, il existe $i_0 \in I$ tel que $\ell \in O_{i_0}$. Par suite, puisque O_{i_0} est un ouvert de E, il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $B(\ell, \varepsilon) \subset O_{i_0}$. Fixons en un tel ε. Maintenant, puisque $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers ℓ alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad n > n_1 \Longrightarrow d\left(x_{\varphi(n)}, \ell\right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Par ailleurs, puisque la suite réelle $\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)_n$ converge vers 0 alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad n > n_2 \Longrightarrow \frac{1}{\varphi(n)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

En utilisant (1) et (2), on obtient que pour tout entier $n > \max(n_1, n_2)$ et tout $x \in B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right)$, on a :

$$\begin{aligned} d(x, \ell) &\leqslant d(x, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, \ell) \\ &< \frac{1}{\varphi(n)} + d\left(x_{\varphi(n)}, \ell\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que l'on a pour tout $n > \max(n_1, n_2)$:

$$\forall x \in B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right), \quad x \in B(\ell, \varepsilon),$$

ce qui montre que $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset B(\ell, \varepsilon)$ $(\forall n > \max(n_1, n_2))$. Mais puisque $B(\ell, \varepsilon) \subset O_{i_0}$, on en conclut que $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset O_{i_0}$ $(\forall n > \max(n_1, n_2))$. ce qui est en contradiction apparente avec la propriété de base de la suite $(x_n)_n$, à savoir « $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in I : \ B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$ ». Cette contradiction confirme la propriété requise et achève cette démonstration. □

Preuve du théorème 6.14.

<u>$(\Rightarrow)$:</u> Supposons que (E, d) est compact. Alors, d'après le théorème 6.12, toute suite de E possède au moins une valeur d'adhérence ; ce qui équivaut à dire que toute suite de E possède au moins une sous-suite convergente (car on sait, d'après la proposition 4.33, qu'une valeur d'adhérence d'une suite d'un espace métrique n'est rien d'autre qu'une limite de l'une de ses sous-suites convergentes). Autrement dit, E satisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass.

<u>$(\Rightarrow)$:</u> Supposons que E satisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass et montrons que E est compact. Comme E est séparé (en tant qu'espace métrique), il reste juste à montrer que E satisfait la propriété de Borel-Lebesgue. Soit donc $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E et montrons qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. D'après le lemme 6.15, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $i(x) \in I$ tel que $B(x, r) \subset O_{i(x)}$. Fixons en un tel r. Nous allons construire récursivement une progression $x_0, x_1, \ldots$ de points de E dont la finitude entraînera l'existence d'un sous-recouvrement

fini du recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ de E :
— Prenons $x_0 \in E$ quelconque. On a $B(x_0, r) \subset O_{i(x_0)}$.
— Si $B(x_0, r) = E$ alors, à fortiori, $O_{i(x_0)} = E$ et la famille $\{O_{i(x_0)}\}$ (constituée d'un seul ouvert) est un sous-recouvrement fini du recouvrement initial $(O_i)_{i\in I}$ de E.
— Sinon (i.e., si $B(x_0, r) \neq E$) alors il existe $x_1 \in E \backslash B(x_0, r)$ et on a $B(x_1, r) \subset O_{i(x_1)}$.
— Par suite, si $B(x_0, r) \cup B(x_1, r) = E$, alors à fortiori $O_{i(x_0)} \cup O_{i(x_1)} = E$ (puisque $B(x_0, r) \subset O_{i(x_0)}$ et $B(x_1, r) \subset O_{i(x_1)}$) et la famille $\{O_{i(x_0)}, O_{i(x_1)}\}$ est ainsi un sous-recouvrement fini du recouvrement initial $(O_i)_{i\in I}$ de E.
— Sinon (i.e., si $B(x_0, r) \cup B(x_1, r) \neq E$) alors il existe $x_2 \in E\backslash(B(x_0, r) \cup B(x_1, r))$ et on a $B(x_2, r) \subset O_{i(x_2)}$. Et ainsi de suite ...
Il est claire que si ce procédé s'arrête, un sous-recouvrement fini du recouvrement $(O_i)_i$ de E en découle. Montrons que c'est effectivement le cas. Pour ce faire, on procède par l'absurde en supposant que le procédé en question se poursuit indéfiniment. On obtient donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E vérifiant (en particulier) pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} \in E\backslash \left(B(x_0, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r)\right)$$

Cette relation montre que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, avec $p \neq q$, on a $d(x_p, x_q) \geqslant r$. Ce qui montre que $(x_n)_n$ ne peut posséder une sous-suite convergente, et contredit, de ce fait, l'hypothèse de départ faite sur E (à savoir que E satisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass). Notre procédé doit donc s'arrêter et fournira le sous-recouvrement fini recherché du recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ de E. D'où E est effectivement compact.

Ainsi s'achève notre démonstration. □

6.4 Espaces totalement bornés

Définition 6.16. *Un espace métrique (E, d) est dit* ***totalement borné*** *(ou* ***précompact****) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E constitué de boules ouvertes de rayon ε. Ce qui s'exprime avec le symbolisme mathématique par :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \dots, x_n \in E : \; B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon) \; = \; E.$$

Définition équivalente 6.17. *Un espace métrique (E, d) est dit* ***totalement borné*** *(ou* ***pré-compact****) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de parties de E, de diamètres $< \varepsilon$, qui recouvrent E. Ce qui s'exprime avec le symbolisme mathématique par :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists A_1, \dots, A_n \subset E : \; A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E \text{ et } \delta(A_i) < \varepsilon \; (\forall i \in \{1, \dots, n\}).$$

La preuve de l'équivalence des deux définitions précédentes est facile et est laissée comme exercice au soin du lecteur.

Exercice : Montrer que tout espace métrique totalement borné est borné.

Théorème 6.18 (fondamental)**.** *Un espace métrique est compact si et seulement s'il est complet et totalement borné.*

Démonstration. Voir les exercices 6.9 et 6.10. □

Corollaire 6.19 (Heine-Borel)**.** *Les parties compactes de $\mathbb{R}$ (muni de sa distance usuelle) sont exactement ses parties fermées et bornées.*

Démonstration. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

$(\Rightarrow)$ **:** Supposons que A compacte. Alors, d'après le théorème 6.8, A est fermée. Et d'après le théorème 6.18, l'espace métrique $(A, d_{\mathrm{us}}|_A)$ est totalement borné, donc borné (d'après le résultat de l'exercice ci-dessus). Ainsi, A est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$.

$(\Leftarrow)$ **:** Supposons que A est un fermé borné de $\mathbb{R}$. Montrer que A est compacte équivaut à montrer (en vertu du théorème 6.14) que toute suite d'éléments de A possède une sous-suite convergente dans A. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A et montrons qu'elle possède une sous-suite convergente vers un élément de A. Comme A est supposée bornée alors $(x_n)_n$ est une suite réelle bornée. Il s'ensuit (en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass) que $(x_n)_n$ possède une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, disons vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $(x_{\varphi(n)})_n$ est une suite d'éléments de A (puisqu'elle est extraite d'une suite d'éléments de A) alors sa limite ℓ appartient à $\overline{A}$. Mais puisque A est supposée fermée, on a $\overline{A} = A$; d'où $\ell \in A$. Ainsi $(x_{\varphi(n)})_n$ est une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers un élément de A. Ce qui donne le résultat requis et complète cette démonstration. □

6.5 Compacité et continuité

Théorème 6.20. *Soit $f : E \rightarrow F$ une application continue d'un espace topologique compact E dans un espace topologique séparé F. Alors $f(E)$ est une partie compacte de F.*

Démonstration. Montrer que $f(E)$ est une partie compacte de F revient à montrer (d'après la proposition 6.5) que de toute famille d'ouverts de F dont la réunion contient $f(E)$, on peut extraire une sous-famille finie dont la réunion contient $f(E)$. Soit donc $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de F dont la réunion contient $f(E)$ et montrons qu'on peut en extraire une sous-famille finie dont la réunion contient $f(E)$. Par hypothèse, on a :

$$\bigcup_{i\in I} \Omega_i \ \supset \ f(E).$$

Ce qui entraîne que :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} \Omega_i\right) \ \supset \ f^{-1}\left(f(E)\right).$$

Mais puisque $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} \Omega_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\Omega_i)$ et que $f^{-1}(f(E)) = E$, il s'ensuit que :

$$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(\Omega_i) \ \supset \ E;$$

c'est-à-dire (puisqu'on a aussi évidemment $\cup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i) \subset E$) :

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i) = E.$$

Cette égalité ensembliste montre que la famille $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in I}$ constitue un recouvrement de E. De plus, comme f est continue et que les Ω_i ($i \in I$) sont tous des ouverts de F, ce recouvrement est ouvert. Par suite, puisque E est compact, on peut alors extraire de $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in I}$ un sous-recouvrement fini de E. Autrement dit, il existe $I_0 \subset I$, avec I_0 fini, tel que :

$$\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i) = E.$$

Il s'ensuit de cela que :

$$f\left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i)\right) = f(E).$$

Mais puisque $f\left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i)\right) = \bigcup_{i \in I_0} f\left(f^{-1}(\Omega_i)\right)$ et que $f\left(f^{-1}(\Omega_i)\right) \subset \Omega_i$ ($\forall i \in I_0$), on a $f\left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i)\right) \subset \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i$ et il en résulte, de ce fait, que :

$$\bigcup_{i \in I_0} \Omega_i \supset f(E),$$

ce qui donne bien le résultat requis. Le théorème est démontré. □

Corollaire 6.21. *Soit $f : E \to F$ une application continue d'un espace topologique E dans un espace topologique séparé F et soit A une partie compacte de E. Alors $f(A)$ est une partie compacte de F.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 6.20 à l'application $f|_A : A \to F$ (la restriction de f à A). □

Le résultat de ce dernier corollaire peut s'exprimer brièvement comme ceci :

L'image d'un compact par une application continue est un compact
(lorsque l'espace d'arrivée est séparé).

Corollaire 6.22. *Toute bijection continue $f : E \to F$ d'un espace topologique compact E dans un espace topologique séparé F est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $f^{-1} : F \to E$ est continue. Ce qui revient à montrer que l'image réciproque par f^{-1} de tout fermé de E est un fermé de F. Autrement dit, l'image par f de tout fermé de E est un fermé de F. Comme E est compact, alors (en vertu du théorème 6.9) tout fermé de E est un compact de E ; ce qui entraîne (en vertu du corollaire 6.21) que son image par f est un compact de F ; qui est par conséquent un fermé de F (en vertu du théorème 6.8). Ceci confirme le résultat requis et achève cette démonstration. □

Théorème 6.23 (le premier théorème de Heine). *Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une application continue d'un espace topologique compact K dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Dans la démonstration qui va suivre de ce théorème, on s'appuie sur le résultat de l'exercice suivant dont la solution est laissée au soin du lecteur !

Exercice : Montrer que pour toute partie bornée A de $\mathbb{R}$, on a : $\inf A \in \overline{A}$ et $\sup A \in \overline{A}$.

Démonstration du théorème 6.23. Le théorème 6.20 assure que $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$; ce qui revient à dire (en vertu du corollaire 6.19) que c'est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Le fait que $f(K)$ est bornée équivaut à dire que f est bornée et entraîne par ailleurs (d'après le résultat de l'exercice précédent) que : $\inf f(K) \in \overline{f(K)}$ et $\sup f(K) = \overline{f(K)}$. Mais puisque $f(K)$ est fermé, on a $\overline{f(K)} = f(K)$, ce qui conclut que : $\inf f(K) \in f(K)$ et $\sup f(K) \in f(K)$. Ce qui revient à dire que f atteint ses deux bornes inférieure et supérieure. Ceci complète la preuve du théorème. □

Théorème 6.24 (le second théorème de Heine - 1872). *Toute application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique quelconque est uniformément continue.*

Démonstration. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, avec E compact, et soit $f : E \to F$ une application continue. Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in E$:

$$d_E(x_1, x_2) < \delta \implies d_F\left(f(x_1), f(x_2)\right) < \varepsilon.$$

Montrons cette propriété pour un $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement. Pour tout $x \in E$, il découle de la continuité de f en x, qu'il existe $\delta_x > 0$ tel que l'on ait pour tout $x' \in E$:

$$d_E(x, x') < \delta_x \implies d_F\left(f(x), f(x')\right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{$\star$}$$

Par suite, comme la famille $\left(B(x, \frac{\delta_x}{2})\right)_{x \in E}$ constitue (de toute évidence) un recouvrement ouvert de E et que E est compact, alors on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $\left(B(x, \frac{\delta_x}{2})\right)_{x \in I}$ ($I \subset E$, I est fini). Prenons

$$\delta := \min_{x \in I} \frac{\delta_x}{2} \qquad (> 0)$$

et supposons donnés $x_1, x_2 \in E$ tels que $d_E(x_1, x_2) < \delta$. Puisque les boules ouvertes $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ ($x \in I$) recouvrent E, il existe $x_0 \in I$ tel que $x_1 \in B(x_0, \frac{\delta_{x_0}}{2})$. On a par conséquent :

$$d_E(x_0, x_1) < \frac{\delta_{x_0}}{2} < \delta_{x_0}$$

et

$$d_E(x_0, x_2) \leqslant d_E(x_0, x_1) + d_E(x_1, x_2) < \frac{\delta_{x_0}}{2} + \delta \leqslant \frac{\delta_{x_0}}{2} + \frac{\delta_{x_0}}{2} = \delta_{x_0}.$$

Il s'ensuit (en vertu de ($\star$) qu'on utilise pour $(x, x') = (x_0, x_1)$ puis pour $(x, x') = (x_0, x_2)$) qu'on a :

$$d_F(f(x_0), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d_F(f(x_0), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où :

$$d_F(f(x_1), f(x_2)) \leqslant d_F(f(x_1), f(x_0)) + d_F(f(x_0), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En récapitulant (depuis l'introduction des deux points x_1 et x_2 de E), on a :

$$\forall x_1, x_2 \in E : \; d_E(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_F(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon,$$

comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. $\square$

Théorème 6.25 (le théorème de Tychonoff). *Un produit (fini ou infini) d'espaces topologiques est compact si et seulement si chacun de ces espaces est compact.*

Le théorème de Tychonoff est, sans doute, le théorème le plus difficile de topologie générale. Bien que son sens direct est assez simple (c'est une conséquence immédiate de la continuité des projections canoniques), son sens inverse (dans le cas d'un produit infini d'espaces topologiques) peine à s'éclaircir et fait appel à des arguments raffinés de la théorie des ensembles (tel que l'axiome du choix). La théorie des filtres (introduite par H. Cartan en 1937) permet de simplifier quelque peu la preuve du théorème de Tychonoff quitte à sacrifier quelque temps dans son introduction. Cette démarche reste tout de même la plus préférée des auteurs de topologie générale. Pour ce qui nous concerne, nous allons démontrer le théorème de Tychonoff seulement dans son cas (facile) d'un produit fini d'espaces topologiques.

Démonstration du théorème 6.25 dans le cas d'un produit fini d'espaces topologiques.
Nous allons montrer qu'un produit de deux espaces topologiques $E \times F$ est compact si et seulement si E et F sont tous les deux compacts. La généralisation en un produit fini se fait aisément par récurrence.

($\Rightarrow$) : Supposons que $E \times F$ est compact. Comme les projections canoniques :

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & E \times F & \longrightarrow & E \\ & (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \pi_2 : & E \times F & \longrightarrow & F \\ & (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sont continues, $E \times F$ est compact (par hypothèse) et F est séparé (en tant que compact) alors (d'après le théorème 6.20) les images de π_1 et π_2 sont compactes ; c'est-à-dire que E et F sont compacts.

($\Leftarrow$) : Supposons que E et F sont tous les deux compacts et montrons que $E \times F$ l'est également. Puisque E et F sont séparés (en tant que compacts) alors $E \times F$ l'est également et il reste donc à montrer que $E \times F$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. Soit donc $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $E \times F$ et montrons qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Etant fixé $x \in E$, on a pour tout $y \in F$: $(x, y) \in E \times F = \cup_{i \in I} O_i$; ce qui entraîne qu'il existe $i = i(x, y) \in I$ tel que $(x, y) \in O_{i(x,y)}$. Par suite, comme $O_{i(x,y)}$ $(y \in F)$ est un ouvert de $E \times F$, il est une réunion de pavets ouverts de $E \times F$; ce qui entraîne qu'il existe $U_{i(x,y)}$ un ouvert de E et $V_{i(x,y)}$ un ouvert de F tels que :

$$(x, y) \in U_{i(x,y)} \times V_{i(x,y)} \subset O_{i(x,y)}.$$

De ce fait, on a pour tout $y \in F$: $x \in U_{i(x,y)}$ et $y \in V_{i(x,y)}$. Ainsi, la famille $\left(V_{i(x,y)}\right)_{y \in F}$ constitue un recouvrement ouvert de F. Comme F est supposé compact, alors on peut extraire de $\left(V_{i(x,y)}\right)_{y \in F}$ un sous-recouvrement fini de F. Autrement dit, il existe B_x une partie finie de F telle que :

$$\bigcup_{y \in B_x} V_{i(x,y)} = F.$$

Considérons maintenant le sous-ensemble de E (dépendant de x) suivant :

$$\Omega_x := \bigcap_{y \in B_x} U_{i(x,y)}.$$

Cet ensemble Ω_x est une intersection finie d'ouverts de E contenant x ; c'est donc lui même un ouvert de E contenant x. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\Omega_x \times F = \Omega_x \times \left(\bigcup_{y \in B_x} V_{i(x,y)}\right) &= \bigcup_{y \in B_x} \left(\Omega_x \times V_{i(x,y)}\right) \\
&\subset \bigcup_{y \in B_x} \left(U_{i(x,y)} \times V_{i(x,y)}\right) \qquad (\text{car } \Omega_x \subset U_{i(x,y)}, \forall y \in B_x) \\
&\subset \bigcup_{y \in B_x} O_{i(x,y)} \qquad (\text{car } U_{i(x,y)} \times V_{i(x,y)} \subset O_{i(x,y)}).
\end{aligned}$$

D'où :

$$\Omega_x \times F \subset \bigcup_{y \in B_x} O_{i(x,y)} \tag{$\star$}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$ et nous pouvons maintenant faire varier x pour conclure. Puisque $\forall x \in E$, $x \in \Omega_x$, on a $E = \cup_{x \in E} \Omega_x$; autrement dit, la famille $(\Omega_x)_{x \in E}$ constitue un recouvrement ouvert de E. Mais comme E est compact alors on peut extraire de $(\Omega_x)_{x \in E}$ un sous-recouvrement fini ; c'est-à-dire qu'il existe $A \subset E$, A fini, tel que :

$$E = \bigcup_{x \in A} \Omega_x.$$

En se servant de cette dernière et de ($\star$), on a :

$$E \times F = \left(\bigcup_{x \in A} \Omega_x\right) \times F = \bigcup_{x \in A} (\Omega_x \times F) \subset \bigcup_{x \in A} \left(\bigcup_{y \in B_x} O_{i(x,y)}\right) = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B_x}} O_{i(x,y)} \subset E \times F.$$

D'où :

$$E \times F = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B_x}} O_{i(x,y)}.$$

Ceci montre que la famille $\left(O_{i(x,y)}\right)_{\substack{x \in A \\ y \in B_x}}$ constitue un sous-recouvrement fini du recouvrement initial $(O_i)_{i \in I}$ de $E \times F$. Ce qui complète la preuve du théorème. $\square$

Corollaire 6.26. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont exactement ses parties fermées et bornées*[1].

Démonstration. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

<u>($\Rightarrow$)</u> **:** Supposons que A est compacte. Alors, d'après le théorème 6.8, A est fermée et, d'après le théorème 6.18, A est totalement bornée, donc bornée. Ainsi, A est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.

<u>($\Leftarrow$)</u> **:** Supposons que A est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$. La bornitude supposée de A entraîne (d'après la proposition 4.25) qu'il est possible d'inclure A dans une boule ouverte $B_{d_\infty}(\mathbf{a}, r)$, avec $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Mais comme on a :

$$\begin{aligned} B_{d_\infty}(\mathbf{a}, r) &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ d_\infty((x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_n)) < r\} \\ &= \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - a_i| < r\right\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ |x_i - a_i| < r, \forall i \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_i \in]a_i - r, a_i + r[, \forall i \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \prod_{i=1}^n]a_i - r, a_i + r[, \end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$A \subset \prod_{i=1}^n]a_i - r, a_i + r[\subset \prod_{i=1}^n [a_i - r, a_i + r] \qquad (\star)$$

Maintenant, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'intervalle $[a_i - r, a_i + r]$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$, c'est donc une partie compacte de $\mathbb{R}$ (en vertu du corollaire 6.19). Il s'ensuit (en vertu du théorème de Tychonoff) que le produit $\prod_{i=1}^n [a_i - r, a_i + r]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Enfin, A est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ (par hypothèse), incluse dans la partie compacte $\prod_{i=1}^n [a_i - r, a_i + r]$ de $\mathbb{R}^n$ (en vertu de $(\star)$) ; elle est donc compacte (en vertu du théorème 6.9), comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve du corollaire. □

Corollaire 6.27. *Les parties compactes de $\mathbb{C}$ (muni de sa distance usuelle) sont exactement ses parties fermées et bornées.*

Démonstration. On se sert de l'isométrie bijective :

$$\begin{aligned} \varphi : \ (\mathbb{C}, d_{\text{us}}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_2) \\ z &\longmapsto (\Re z, \Im z) \end{aligned}$$

(vue au § 4.3.5), qui est à fortiori un homéomorphisme. Soit A une partie de $\mathbb{C}$.

<u>($\Rightarrow$)</u> **:** Supposons que A est compacte. La continuité de φ entraîne (d'après le corollaire 6.21) que $\varphi(A)$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Il s'ensuit (en vertu du corollaire 6.26) que $\varphi(A)$ est une partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Par suite, les faits que « φ est continue » et « $\varphi(A)$ est fermée » entraînent (en vertu du corollaire 3.9) que $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ est fermée dans $(\mathbb{C}, d_{\text{us}})$; en

1. Bien entendu, $\mathbb{R}^n$ est considéré comme espace produit de n copies de $\mathbb{R}$ (où $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle), auquel est associée l'une des distances équivalentes d_1, d_2 ou d_∞.

outre, le fait que « φ est une isométrie » entraîne que A est de même diamètre que $\varphi(A)$ et que, par conséquent, A est bornée dans $(\mathbb{C}, d_{\text{us}})$. En conclusion, A est une partie fermée et bornée dans $(\mathbb{C}, d_{\text{us}})$, comme il fallait le prouver.

$(\Leftarrow)$: Supposons que A est fermée et bornée. D'une part, la continuité de φ^{-1} entraîne (d'après le corollaire 3.9) que $(\varphi^{-1})^{-1}(A) = \varphi(A)$ est une partie fermée de $(\mathbb{R}^2, d_2)$. D'autre part, le fait que φ est une isométrie entraîne que $\varphi(A)$ est de même diamètre que A et que, par conséquent, $\varphi(A)$ est bornée dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Ainsi, $\varphi(A)$ est à la fois fermée et bornée dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$; ce qui entraîne (en vertu du corollaire 6.26) que c'est une partie compacte de $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Enfin, la continuité de φ^{-1} conclut (en vertu du corollaire 6.21) que $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$, comme il fallait le prouver. Ainsi s'achève la démonstration du corollaire. □

Le corollaire qui va suivre est une conséquence du corollaire 6.27 et s'obtient exactement de la même manière que le corollaire 6.26. Sa démonstration (laissée au soin du lecteur) ne fait que recopier la démonstration du corollaire 6.26 en lui apportant des modifications mineurs évidentes aux endroits adéquats.

Corollaire 6.28. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les parties compactes de $\mathbb{C}^n$ sont exactement ses parties fermées et bornées*[2]. □

6.6 Espaces localement compacts

Définition 6.29. Un espace topologique E est dit **localement compact** si tout point de E possède un voisinage compact.

Exemple : Les espaces $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont localement compacts. En effet, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la boule fermée $\overline{B}(\mathbf{x}, 1)$ est fermée et bornée, donc compacte (en vertu du corollaire 6.26), et c'est un voisinage de $\mathbf{x}$.

2. Bien entendu, $\mathbb{C}^n$ est considéré comme espace produit de n copies de $\mathbb{C}$ (où $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle), auquel est associée l'une des distances équivalentes d_1, d_2 ou d_∞.

Exercices

⋆ **Exercice 6.1.** Soit E un ensemble infini et τ sa topologie cofinie (voir l'exercice 2.4). Montrer que E satisfait la propriété de Borel-Lebesgue mais qu'il n'est pas compact.

Exercice 6.2. Soit E un ensemble muni de sa topologie discrète. Montrer que E est compact si et seulement s'il est fini.

⋆ **Exercice 6.3.** Soient E un espace topologique séparé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers un élément ℓ de E.

— Montrer que l'ensemble :

$$K \ := \ \{u_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$$

est une partie compacte de E.

Exercice 6.4. Soit E un espace topologique séparé. Montrer les deux propriétés suivantes :

(i) Toute réunion <u>finie</u> de parties compactes de E est une partie compacte de E.

(ii) Toute intersection de parties compactes de E est une partie compacte de E.

⋆ **Exercice 6.5.** Soient E un espace topologique séparé et A et B deux parties compactes, non vides et disjointes de E.

— Montrer qu'il existe un voisinage U de A et un voisinage V de B qui soient disjoints.

☞ Commencer par traiter le cas où B est un singleton puis généraliser en se servant de ce cas particulier.

⋆ **Exercice 6.6.** On munit $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle et on considère deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que A est compacte et B est fermée. On pose :

$$C \ := \ \{a + b \ ; \ a \in A, b \in B\} .$$

1. Montrer que C est fermée.
2. Monter que si B est compacte alors C est compacte.

Exercice 6.7 (Examen de rattrapage de l'année 2017-2018).

On munit $\mathbb{R}$ de la distance d définie par :

$$d(x, y) \ := \ |e^x - e^y| \qquad\qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

1. Déterminer explicitement la boule ouverte $B_d(0, 1)$.
2. Montrer que l'intervalle $]-\infty, 0]$ est une partie fermée et bornée mais non compacte de l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$.
3. Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 6.8. Soient E un espace topologique séparé et F un espace topologique compact et soit $f : E \to F$ une application.
— Montrer que si le graphe de f est fermé dans $E \times F$ alors f est continue.

★ **Exercice 6.9.** Soit (E, d) un espace métrique compact. Montrer que E est complet et totalement borné.

Exercice 6.10. Soit (E, d) un espace métrique complet et totalement borné. Montrer que E est compact.

☞ Justifier d'abord que cela revient à montrer que toute suite de E possède une sous-suite de Cauchy. Soit donc $S_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots\}$ une suite de E. Montrer qu'on peut extraire de S_1 une sous-suite $S_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots\}$ qui soit contenue dans une boule ouverte de E de rayon $1/2$. Montrer ensuite qu'on peut extraire de S_2 une sous-suite $S_3 = \{x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots\}$ qui soit contenue dans une boule ouverte de E de rayon $1/3$, ...etc. Considérer au final la suite diagonale $S = \{x_{11}, x_{22}, x_{33}, \dots\}$ et montrer que c'est une sous-suite de S_1 et qu'elle est de Cauchy dans E. Conclure.

★ **Exercice 6.11.** Soient (E, d) un espace métrique et A et B deux parties non vides de E.
On rappelle que $\boldsymbol{d(A, B) := \inf_{(a,b) \in A \times B} d(a, b) = \inf_{a \in A} d(a, B)}$.

1. Montrer que si A est compacte, alors il existe $a \in A$ tel que $d(a, B) = d(A, B)$.
2. En déduire que si A est compacte et B est fermée, on a :
$$d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \varnothing.$$
3. Donner un exemple où A et B sont fermées et disjointes et telles que $d(A, B) = 0$.

Exercice 6.12. Soient (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant :
$$d\left(f(x), f(y)\right) \geqslant d(x, y) \qquad (\forall x, y \in E).$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^n : E \to E$ par :
$$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$
(avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$).

1. Montrer que tout élément a de E est une valeur d'adhérence de la suite $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$.
— En déduire que $f(E)$ est dense dans E.
2. Montrer que tout élément (a, b) de E^2 est une valeur d'adhérence de la suite $(f^n(a), f^n(b))_{n \in \mathbb{N}}$ de E^2.
☞ Munir E^2 de la distance d_∞ (par exemple) et introduire :
$$\begin{array}{rccc} g : & E^2 & \longrightarrow & E^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (f(x), f(y)) \end{array}.$$
Montrer que g vérifie la même propriété que f (sur E^2 au lieu de E) puis appliquer le résultat de la question précédente.

3. Conclure que f est une isométrie bijective.

Exercice 6.13. Soit (E, d) un espace métrique vérifiant la propriété : « de tout recouvrement ouvert dénombrable de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini ». Montrer que E est compact.

✠ ✠ ✠

Chapitre 7

Espaces connexes

7.1 Définitions et premières propriétés

Définition 7.1. *Un espace topologique (E, τ) est dit **connexe** s'il n'existe pas de partition de E, constituée de deux ouverts. Autrement dit, E est connexe s'il n'est pas possible de l'écrire sous la forme :*

$$E = O \cup O', \quad \text{avec } O, O' \in \tau,\ O \neq \emptyset,\ O' \neq \emptyset \ \text{ et } \ O \cap O' = \emptyset.$$

Définition équivalente 7.2. *Un espace topologique E est **connexe** s'il n'existe pas de partition de E, constituée de deux fermés. Autrement dit, E est connexe s'il n'est pas possible de l'écrire sous la forme :*

$$E = F \cup F', \quad \text{avec } F, F' \text{ des fermés de } E,\ F \neq \emptyset,\ F' \neq \emptyset \ \text{ et } \ F \cap F' = \emptyset.$$

Définition équivalente 7.3. *Un espace topologique (E, τ) est **connexe** si les seules parties de E qui sont ouvertes et fermées à la fois sont E et $\emptyset$.*

L'équivalence de ces trois définitions est facile à prouver et est laissée au soin du lecteur.

Exemple : L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est connexe (voir le théorème 7.7).

La proposition suivante peut être également considérée comme une caractérisation des espaces topologiques connexes. Elle constitue aussi un outil pratique pour prouver d'intéressantes propriétés de connexité.

Proposition 7.4. *Un espace topologique E est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to \{0, 1\}$ (où l'ensemble $\{0, 1\}$ est muni de sa topologie discrète) est constante.*

Démonstration. Soit E un espace topologique.

• $(\Rightarrow)$ **:** Supposons que E est connexe et soit $f : E \to \{0, 1\}$ une application continue. Puisque la partie $\{0\}$ de l'espace topologique discret $\{0, 1\}$ est à la fois ouverte et fermée, alors (vu que f est continue) son image réciproque $f^{-1}(\{0\})$ par f est une partie à la fois ouverte et fermée de E. Mais puisque E est connexe, on en déduit qu'on a : ou bien $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, ou bien $f^{-1}(\{0\}) = E$. Si

$f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$ alors f est constamment égale à 1 sur E et si $f^{-1}(\{0\}) = E$ alors f est constamment nulle sur E. Dans les deux cas, f est bien constante, comme il fallait le prouver.

• $(\Leftarrow)$ **:** Nous allons montrer la contraposée de l'implication inverse. Supposons que E n'est pas connexe (donc il existe deux ouverts non vides et disjoints U et V de E tels que $U \cup V = E$) et montrons l'existence d'une application continue et non constante de E dans $\{0, 1\}$. Soit $f : E \to \{0, 1\}$, définie par :

$$f(x) \ := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \in V \end{cases} \qquad (\forall x \in E).$$

Cette application f est continue sur E puisque l'image réciproque de tout ouvert de $\{0, 1\}$ est un ouvert de E (en effet $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, f^{-1}(\{0\}) = U, f^{-1}(\{1\}) = V$ et $f^{-1}(\{0, 1\}) = E$ sont tous des ouverts de E) et elle n'est pas constante. Ainsi, f est bien l'une des applications requises.

Ceci complète la preuve de la proposition. □

Définition 7.5. *Soient (E, τ) un espace topologique et A une partie de E. On dit que A est* ***connexe*** *si le sous-espace topologique (A, τ_A) de E est connexe.*

La proposition suivante est immédiate :

Proposition 7.6. *Soient (E, τ) un espace topologique et A une partie de E. Alors A est une partie connexe de E si et seulement s'il n'existe pas deux ouverts de E dont la réunion contient A, l'intersection est disjointe avec A et tels que chacun d'entre eux rencontre A. Autrement dit, A est connexe si et seulement s'il n'existe pas d'ouverts U et V de E tels que :*

$$U \cup V \supset A, \ U \cap V \cap A = \varnothing, \ U \cap A \neq \varnothing, \ V \cap A \neq \varnothing. \qquad \square$$

Exemples :

1. La partie $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas connexe car les deux ouverts $U =]-\infty, 1/2[$ et $V =]1/2, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ vérifient : $U \cup V \supset \mathbb{Z}$, $U \cap V \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, $U \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$ et $V \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$.
2. La partie $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas connexe non plus car les deux ouverts $\Omega_1 =]-\infty, \sqrt{2}[$ et $\Omega_2 =]\sqrt{2}, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ vérifient : $\Omega_1 \cup \Omega_2 \supset \mathbb{Q}$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \mathbb{Q} = \varnothing$, $\Omega_1 \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ et $\Omega_2 \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

Théorème 7.7. *L'ensemble $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle) est connexe.*

Démonstration. Procédons par l'absurde en supposant que $\mathbb{R}$ n'est pas connexe. Il existe alors une partie propre et non vide A de $\mathbb{R}$ qui est à la fois un ouvert et un fermé. L'idée consiste à se ramener à une autre partie ouverte et fermée à la fois de $\mathbb{R}$ qui soit, en plus, majorée ou minorée. Pour ce faire, fixons $x \in \mathbb{R} \setminus A$ (ceci est possible car $A \neq \mathbb{R}$). L'un au moins des deux ensembles $(A \cap]-\infty, x])$ et $(A \cap [x, +\infty[)$ est non vide (puisque leur réunion est $A \neq \varnothing$). Distinguons alors les deux cas suivants :

1^er^ cas : (si $A \cap]-\infty, x] \neq \varnothing$).
Comme $x \notin A$, on a :

$$A \cap]-\infty, x] \; = \; A \cap]-\infty, x[.$$

Ce qui montre que $(A \cap]-\infty, x])$ est une partie ouverte et fermée à la fois de $\mathbb{R}$ (en tant qu'intersection de deux ouverts et intersection de deux fermés). De plus, comme $(A \cap]-\infty, x])$ est non vide et majorée (par x) alors elle admet une borne supérieure. Soit

$$M \; := \; \sup \left(A \cap]-\infty, x] \right).$$

Par suite, comme $(A \cap]-\infty, x])$ est un fermé, on a $M \in (A \cap]-\infty, x])$. Mais puisque d'un autre côté, $(A \cap]-\infty, x])$ est un ouvert, alors il est voisinage de chacun de ses points ; en particulier, il est voisinage de M. D'où l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $]M - \varepsilon, M + \varepsilon[\subset (A \cap]-\infty, x])$. Ce qui contredit le fait que M est la borne supérieure de $(A \cap]-\infty, x])$. Ce cas est donc impossible.

2^nd^ cas : (si $A \cap [x, +\infty[\neq \varnothing$).
On raisonne de la même façon en montrant d'abord que l'ensemble $(A \cap [x, +\infty[)$ est une partie ouverte et fermée à la fois de $\mathbb{R}$, puis en introduisant $m := \inf \left(A \cap [x, +\infty[\right)$. On aboutira à l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\subset A \cap [x, +\infty[$; ce qui est en contradiction apparente avec la définition même de m. Ce cas est encore impossible.

En conclusion, une telle partie A de $\mathbb{R}$ ne peut exister ; autrement dit, $\mathbb{R}$ est connexe. Le théorème est démontré. □

Quelques propriétés des parties connexes d'un espace topologique

Proposition 7.8. *Soient E un espace topologique et A une partie connexe de E. Alors toute partie B de E vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est également connexe.*

Démonstration. Voir l'exercice 7.1. □

Théorème 7.9 (le théorème du passage de la douane).
Soient E un espace topologique et A et B deux parties de E, avec A connexe. Si A rencontre l'intérieur de B et l'extérieur[1] *de B alors A rencontre la frontière de B.*

Démonstration. Voir l'exercice 7.2. □

Le théorème suivant est fondamental ; il nous servira à établir la connexité de parties d'un espace topologique dans plusieurs situations.

Théorème 7.10 (réunion de connexes qui se rencontrent deux à deux).
Soient E un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E qui se rencontrent deux à deux (i.e., $A_i \cap A_j \neq \varnothing, \forall i, j \in I$). Alors la réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

1. Rappelons que l'extérieur d'une partie B d'un espace topologique E est (par définition) égale à : $\overset{\circ}{\widehat{\complement_E B}}$.

Démonstration. En vertu de la proposition 7.4, il faut et il suffit de montrer que toute application continue de $\bigcup_{i \in I} A_i$ dans $\{0,1\}$ (où $\cup_{i \in I} A_i$ est muni de sa topologie induite par celle de E et $\{0,1\}$ est muni de sa topologie discrète) est constante. Soit donc $f : \cup_{i \in I} A_i \to \{0,1\}$ continue et montrons qu'elle est constante. Ce qui revient à montrer que :

$$\forall x_1, x_2 \in \bigcup_{i \in I} A_i : \quad f(x_1) = f(x_2).$$

Soient donc $x_1, x_2 \in \cup_{i \in I} A_i$ et montrons que $f(x_1) = f(x_2)$. Le fait $x_1, x_2 \in \cup_{i \in I} A_i$ entraîne qu'il existe $i_1, i_2 \in I$ tels que $x_1 \in A_{i_1}$ et $x_2 \in A_{i_2}$. L'intersection $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ étant (par hypothèse) non vide, il existe $x \in A_{i_1} \cap A_{i_2}$. Par ailleurs, la continuité de f entraîne celle de toutes ses restrictions à des parties de $\cup_{i \in I} A_i$; particulièrement $f|_{A_{i_1}}$ et $f|_{A_{i_2}}$ sont continues. Mais puisque A_{i_1} et A_{i_2} sont connexes alors (d'après la proposition 7.4) chacune des deux applications $f|_{A_{i_1}}$ et $f|_{A_{i_2}}$ est constante. On a donc d'une part $f(x_1) = f(x)$ (car $x_1, x \in A_{i_1}$ et $f|_{A_{i_1}}$ est constante) et d'autre part $f(x_2) = f(x)$ (car $x_2, x \in A_{i_2}$ et $f|_{A_{i_2}}$ est constante). D'où l'on conclut que $f(x_1) = f(x_2)$, comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. □

7.2 Continuité et connexité

Théorème 7.11. *Soit $f : E \to F$ une application continue d'un espace topologique connexe E dans un espace topologique F. Alors $f(E)$ est une partie connexe de F.*

Le résultat de ce théorème s'exprime plus brièvement en disant que :

L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.

Démonstration. Montrer que $f(E)$ est une partie connexe de F revient à montrer (en vertu de la proposition 7.4) que toute application continue de $f(E)$ dans $\{0,1\}$ (où $f(E)$ est muni de sa topologie induite par celle de F et $\{0,1\}$ est muni de sa topologie discrète) est constante. Soit donc $h : f(E) \to \{0,1\}$ une application continue et montrons qu'elle est constante. L'application

$$h \circ f : \; E \xrightarrow{f} f(E) \xrightarrow{h} \{0,1\}$$

est une composée de deux applications continues, donc continue. Mais puisque E est connexe, il en résulte (en vertu de la proposition 7.4) que $h \circ f$ est constante. Ce qui équivaut à dire que h est constante (sur $f(E)$), comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. □

7.3 Les parties connexes de $\mathbb{R}$

Théorème 7.12. *Les parties connexes non vides de $\mathbb{R}$ sont ses intervalles.*

Démonstration. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

$(\Rightarrow)$: Supposons que A est connexe et montrons que A est un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous procédons par l'absurde en supposant que A n'est pas un intervalle. Il existe donc $a, b \in A$, avec $a < b$, tels que $]a, b[\not\subset A$. Il existe, par suite, $x \in]a, b[$ tel que $x \notin A$. En prenant alors

$$U :=]-\infty, x[\quad \text{et} \quad V :=]x, +\infty[,$$

qui sont deux ouverts de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} U \cup V &\supset A && (\text{car } x \notin A) \\ U \cap V \cap A &= \varnothing && \\ U \cap A &\neq \varnothing && (\text{car } a \in U \cap A) \\ V \cap A &\neq \varnothing && (\text{car } b \in V \cap A). \end{aligned}$$

Ce qui contredit la connexité de A (en vertu de la proposition 7.6).

($\Leftarrow$) : Supposons que A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et montrons qu'il est une partie connexe de $\mathbb{R}$. Le fait que A est un intervalle entraîne que $\mathring{A}$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Par conséquent, $\mathring{A}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ (en vertu de la proposition 3.19). Comme $\mathbb{R}$ est connexe (d'après le théorème 7.7), il s'ensuit (en vertu du théorème 7.11) que $\mathring{A}$ est aussi connexe. Enfin, puisqu'on a :

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{\mathring{A}} = \overline{A}$$

(où la seconde inclusion et l'égalité de droite sont dues au fait que A est un intervalle), on en conclut (en vertu de la proposition 7.8) que A est également connexe.

Le théorème est démontré. $\square$

Corollaire 7.13 (le théorème des valeurs intermédiaires). *Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue d'un espace topologique connexe E dans $\mathbb{R}$. Alors $f(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Ainsi, si f prend deux valeurs réelles distinctes a et b (avec $a < b$) alors : $\forall c \in]a, b[$, $\exists x \in E$ tel que $f(x) = c$.*

Démonstration. Comme E est connexe et f est continue alors (en vertu du théorème 7.11) $f(E)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$; ce qui équivaut à dire (en vertu du théorème 7.12) que $f(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, comme il fallait le prouver. En particulier, si f prend deux valeurs réelles distinctes a et b (avec $a < b$) ; c'est-à-dire si $a, b \in f(E)$, on a (puisque $f(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$) : $]a, b[\subset f(E)$. Il s'ensuit, dans un tel cas, que pour tout $c \in]a, b[$, on a $c \in f(E)$; autrement dit, pour tout $c \in]a, b[$, $\exists x \in E$ tel que $f(x) = c$. Ce qui complète la preuve du corollaire. $\square$

7.4 Les composantes connexes d'un espace topologique

Définition 7.14. Soit E un espace topologique. On dit que deux points a et b de E sont **connectés** s'il existe une partie connexe de E qui les contiennent tous les deux.

Proposition 7.15. *Soit E un espace topologique. Alors la relation binaire $\mathscr{R}$ de E, définie par :*

$$\forall a, b \in E : \quad a \mathscr{R} b \stackrel{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} a \text{ et } b \text{ sont connectés}$$

est une relation d'équivalence.

Démonstration.

• **Réflexivité.** Tout élément a de E est connecté avec lui même puisque le singleton $\{a\}$ est (de tout évidence) une partie connexe de E.

• **Symétrie.** Elle est évidente !

• **Transitivité.** Soient $a, b, c \in E$ tels que $a \mathscr{R} b$ et $b \mathscr{R} c$ et montrons que $a \mathscr{R} c$. Comme $a \mathscr{R} b$, il existe une partie connexe C_1 de E qui contient a et b ; de même, comme $b \mathscr{R} c$, il existe une partie connexe C_2 de E qui contient b et c. Par suite, on a $b \in C_1 \cap C_2$, donc $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$. Il s'ensuit (en vertu du théorème 7.10) que la partie $C_1 \cup C_2$ de E est connexe. Enfin, puisque $C_1 \cup C_2$ contient a et c alors $a \mathscr{R} c$, comme il fallait le prouver. La relation $\mathscr{R}$ est donc transitive.

En conclusion, $\mathscr{R}$ est bien une relation d'équivalence sur E. La proposition est démontrée. □

Définition 7.16. Soit E un espace topologique et $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence de E introduite à la proposition précédente. On appelle **composante connexe** de E toute classe d'équivalence modulo $\mathscr{R}$. Pour $a \in E$, on définit **la composante connexe de a** (que l'on note $\mathrm{cl}(a)$) comme étant la classe d'équivalence de a modulo $\mathscr{R}$.

Proposition 7.17. *soient E un espace topologique et a un point de E. Alors la composante connexe de a est la plus grande partie connexe de E qui contient a.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{cl}(a) \quad & \Longleftrightarrow \quad a \mathscr{R} x \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists C \text{ une partie connexe de } E \text{ qui contient } a \text{ et } x \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists C \text{ une partie connexe de } E \text{ qui contient } a \text{ tel que : } x \in C \\
& \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcup_{\substack{C \subset E,\, C \text{ connexe} \\ a \in C}} C.
\end{aligned}$$

Ce qui montre qu'on a :

$$\mathrm{cl}(a) = \bigcup_{\substack{C \subset E,\, C \text{ connexe} \\ a \in C}} C.$$

Cette formule montre que $\mathrm{cl}(a)$ est une réunion de parties connexes de E qui se rencontrent deux à deux (puisqu'elles ont a comme point commun) ; donc $\mathrm{cl}(a)$ est connexe (en vertu du théorème 7.10). Ainsi, $\mathrm{cl}(a)$ est une partie connexe de E qui contient a et contient (en vertu de la formule précédente) toute autre partie connexe de E qui contient a. D'où $\mathrm{cl}(a)$ est la plus grande partie connexe de E qui contient a. La proposition est démontrée. □

7.5 Espaces totalement discontinus

Définition 7.18. Un espace topologique est dit **totalement discontinu** si ses composantes connexes sont toutes des singletons (autrement dit, si ses points sont deux à deux déconnectés).

7.6 Produit fini d'espaces connexes

Théorème 7.19. *Soient $E_1, \dots, E_n$ ($n \geqslant 2$) des espaces topologiques. Alors l'espace topologique produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est connexe si et seulement si chacun des espaces E_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) l'est.*

Démonstration. Nous démontrons le théorème pour $n = 2$. Le cas général se déduit par récurrence ou se démontre de la même manière.

• ($\Rightarrow$) : Supposons que $E = E_1 \times E_2$ est connexe. Puisque les projections canoniques $\pi_1 : E \to E_1$ et $\pi_2 : E \to E_2$ sont continues alors (en vertu du théorème 7.11) $\pi_1(E) = E_1$ et $\pi_2(E) = E_2$ sont connexes.

• ($\Leftarrow$) : Inversement, supposons que E_1 et E_2 sont connexes. Pour montrer que l'espace produit $E_1 \times E_2$ est connexe, il faut et il suffit de montrer que ses points sont deux à deux connectés. Soient donc (x_1, x_2) et (y_1, y_2) deux points quelconques de $E_1 \times E_2$ et montrons qu'ils sont connectés. Les deux sous-ensemble $\{x_1\} \times E_2$ et $E_1 \times \{y_2\}$ de $E_1 \times E_2$ sont respectivement homéomorphes aux connexes E_2 et E_1 ; ils sont donc tous les deux connexes (en vertu du théorème 7.11). Il s'ensuit de cela que les deux points (x_1, x_2) et (x_1, y_2) sont connectés (étant donné qu'ils appartiennent au même connexe $\{x_1\} \times E_2$) ainsi que les deux points (x_1, y_2) et (y_1, y_2) (étant donné qu'ils appartiennent au même connexe $E_1 \times \{y_2\}$). Il en découle (en vertu de la transitivité de la relation "connecté à") que (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont connectés, comme il fallait le prouver.

Ceci complète la preuve du théorème. □

Corollaire 7.20. *L'ensemble $\mathbb{C}$ (muni de sa topologie usuelle) est connexe.*

Démonstration. On se sert de l'isométrie bijective :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathbb{C}, d_{\text{us}}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, d_2) \\ & z & \longmapsto & (\Re z, \Im z) \end{array}$$

(vue au § 4.3.5), qui est à fortiori un homéomorphisme. Comme (d'après le théorème 7.19) l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$ est connexe (car c'est un produit de deux copies de $(\mathbb{R}, d_{\text{us}})$, qui est connexe en vertu du théorème 7.7) et que l'application φ^{-1} est continue (puisque φ est un homéomorphisme) alors (d'après le théorème 7.11) : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$ est également connexe. Ce qui achève cette démonstration. □

Enfin, du théorème 7.7 et du corollaire 7.20 résulte, par l'application immédiate du théorème 7.19, le corollaire suivant :

Corollaire 7.21. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont connexes*[2]. □

2. Evidemment, $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) sous-entend l'espace topologique produit de n copies de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), lequel est muni de sa topologie usuelle.

7.7 Connexité par arc

Définition 7.22. Soient E un espace topologique et a et b deux point de E. On appelle **chemin** allant de a vers b (ou chemin de point de départ a et de point d'arrivée b) toute application $f : [0,1] \to E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Si de plus cette application est continue[3], on l'appellera **chemin continu**.

Définition 7.23. Un espace topologique E est dit **connexe par arc** si pour tous $a, b \in E$, il existe un chemin continu allant de a vers b.

La notion de connexité par arc est plus forte que celle de la connexité, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 7.24. *Tout espace topologique connexe par arc est connexe.*

Démonstration. Soit E un espace topologique connexe par arc et montrons qu'il est connexe. Si E est vide, le résultat est banal. Supposons donc que E est non vide et soit a un point fixé de E. Comme E est supposé connexe par arc, il existe, pour tout $x \in E$, un chemin continu allant de a vers x ; c'est-à-dire une application continue $f_x : [0,1] \to E$ telle que $f_x(0) = a$ et $f_x(1) = x$. Par suite, pour tout $x \in E$, comme $[0,1]$ est connexe (car c'est un intervalle de $\mathbb{R}$) et f_x est continue alors (en vertu du théorème 7.11) $f_x([0,1])$ est une partie connexe de E. Pour tout $x \in E$, posons $\Gamma_x := f_x([0,1])$. Ainsi, pour tout $x \in E$, l'ensemble Γ_x est une partie connexe de E qui contient a et x. Le fait que Γ_x contient x ($\forall x \in E$) entraîne qu'on a :

$$E = \bigcup_{x \in E} \Gamma_x.$$

Cette formule montre que E est une réunion de connexes qui se rencontrent deux-à-deux (puisqu'ils contiennent tous le même point a) ; d'où E est lui même connexe (en vertu du théorème 7.10). La proposition est démontrée. □

3. Ici, l'intervalle $[0,1]$ est considéré comme un sous-espace topologique de $\mathbb{R}$, où celui-ci est muni de sa topologie usuelle.

Exercices

⋆ **Exercice 7.1.** Soit (E, τ) un espace topologique et A une partie connexe de E.

— Montrer que toute partie B de E, vérifiant :

$$A \subset B \subset \overline{A}$$

est connexe. **En particulier, l'adhérence d'une partie connexe de E est connexe.**

⋆ **Exercice 7.2 (Le théorème du passage de la douane).**

Soient (E, τ) un espace topologique et A et B deux parties de E. On suppose que A est connexe et que A rencontre à la fois l'intérieur et l'extérieur de B (i.e. $A \cap \overset{\circ}{B} \neq \varnothing$ et $A \cap \overset{\circ}{\widehat{\complement_E B}} \neq \varnothing$).

— Montrer alors que A rencontre la frontière de B (i.e. $A \cap \mathrm{Fr}(B) \neq \varnothing$).

⋆ **Exercice 7.3.** Soient (E, d_E) un espace métrique complet, (F, d_F) un espace métrique connexe et $f : E \to F$ une application continue et ouverte[4]. On suppose que f satisfait l'inégalité :

$$d_F\left(f(x), f(y)\right) \geqslant k\, d_E(x, y) \qquad (\forall x, y \in E),$$

pour une certaine constance absolue et strictement positive k.

1. Montrer que f est injective.
2. (a) Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E telle que la suite $\left(f(x_n)\right)_n$ est de Cauchy dans F alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E.
   (b) En déduire que $f(E)$ est une partie fermée de F.
   (c) En déduire que f est surjective puis que f est un homéomorphisme.
   (d) Conclure que E est connexe.

⋆ **Exercice 7.4.** Soit (E, d) un espace métrique compact. On suppose que l'on a pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$:

$$\overline{B(a, r)} = \overline{B}(a, r).$$

— Montrer que toute boule ouverte de E est connexe.

⋆ **Exercice 7.5.** Soit (E, d) un espace métrique connexe, de distance bornée.

1. Montrer que toute sphère de E est non vide.
2. En déduire que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ est non connexe.

✠ ✠ ✠

4. Une application d'un espace topologique dans un autre est dite **ouverte** si elle transforme tout ouvert (de l'espace topologique de départ) en un ouvert (de l'espace topologique d'arrivée).

Chapitre 8

Espaces vectoriels normés

Pour tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps commutatifs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et la notation $|\cdot|$ représente la valeur absolue ou le module selon les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

8.1 Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe

8.1.1 Définition et propriétés immédiates

Définition 8.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **norme** sur E, toute application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in E : \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(iii) $\forall x, y \in E : \ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Remarques :

- Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme est appelé **un espace vectoriel normé** ; une expression qu'on désigne pour toute la suite par l'abréviation **e.v.n**.
- Dans la propriété (i), l'équivalence peut être remplacée par l'implication directe ($\Rightarrow$), car implication inverse peut s'obtenir comme conséquence de la propriété (ii) en prenant $\lambda = 0$.
- Si E est un $\mathbb{K}$-**e.v.n**, on a toujours $\|0_E\| = 0$ (ceci provient de la propriété (i) ou de la propriété (ii) en prenant $\lambda = 0$).
- L'inégalité de la propriété (iii) est connue sous le nom de **l'inégalité triangulaire**.
- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|\cdot\| : \ E \to \mathbb{R}^+$ est une application vérifiant seulement les deux propriétés (ii) et (iii), on dit que $\|\cdot\|$ est **une semi-norme** sur E. Evidemment, toute norme est (à fortiori) une semi-norme.

8.1.2 Distance associée à une norme

Définition 8.2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un **e.v.n**. On définit :

$$\begin{array}{rccl} d: & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) := \|x-y\| \end{array}.$$

On vérifie aisément que d est une distance sur E. Cette distance est appelée **la distance associée à la norme** $\|\cdot\|$ **de** E.

Remarques :

- Grâce à la notion de « la distance associée à une norme », un **e.v.n** est vu comme un cas particulier d'un espace métrique ; qui est à son tour (comme on le sait) un cas particulier d'un espace topologique.
- Les définitions de *boule ouverte*, *boule fermée*, *sphère*, *ouvert*, *fermé*, *voisinage*, *intérieur*, *adhérence*, *limite*, *continuité*, etc dans un **e.v.n** sont simplement celles relatives à la distance associée à sa norme.
- Il existe des distances parfaitement naturelles qui ne sont induites par aucune norme sur un espace vectoriel ambiant. Par exemple, la distance naturelle sur la terre n'est induite par aucune norme de l'espace, étant donné que la terre n'est pas plate.

8.1.3 Quelques exemples de notions sur un e.v.n découlant de sa structure métrique

1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un **e.v.n** et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit que $(x_n)_n$ converge vers un vecteur x de E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : \quad n > N \Longrightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

2. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux **e.v.n** (sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$) et $f : E \to F$ une application. Soient aussi $x_0 \in E$ et $y_0 \in F$.
   — On dit que $f(x)$ tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E : \quad \|x - x_0\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - y_0\|_F < \varepsilon.$$

   — On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E : \quad \|x - x_0\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon.$$

8.1.4 Normes équivalentes et topologiquement équivalentes

Définition 8.3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E.

— On dit que N_1 et N_2 sont **topologiquement équivalentes** si les distances associées sont topologiquement équivalentes ; c'est-à-dire si les topologies associées sont identiques.

— On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** si les distances associées sont équivalentes ; c'est-à-dire s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1 .$$

Remarque : Dans les espaces métriques, on a vu que deux distances équivalentes sont forcément topologiquement équivalentes, mais que l'inverse est généralement faux. Concernant les **e.v.n**, on verra plus loin (voir le corollaire 8.9) que ces deux notions coïncident ! c'est-à-dire que

> *Deux normes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes.*

8.1.5 Exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

- Sur $\mathbb{R}$ (considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel), la norme usuelle est **la valeur absolue**. Sur $\mathbb{C}$ (considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel), la norme usuelle est **le module**.
- Étant donné $n \geqslant 2$ un entier, on peut définir sur $\mathbb{R}^n$ (considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) plusieurs normes dont : $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_p$ (où p est un entier strictement positif) et $\|\cdot\|_\infty$. Ces normes sont les plus utilisées sur $\mathbb{R}^n$ et sont définies par : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 &:= \sum_{i=1}^n |x_i| \\
\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 &:= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \\
\|(x_1, \dots, x_n)\|_p &:= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \\
\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &:= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| .
\end{aligned}$$

- Étant donné $n \geqslant 2$ un entier, on peut munir $\mathbb{C}^n$ (considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel) de plusieurs normes dont : $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_p$ (où p est un entier strictement positif) et $\|\cdot\|_\infty$ qu'on obtient par les même formules de ci-dessus, en prenant juste le symbole $|\cdot|$ comme module (plutôt que valeur absolue). Pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\|(z_1, \dots, z_n)\|_1 &:= \sum_{i=1}^n |z_i| \\
\|(z_1, \dots, z_n)\|_2 &:= \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \\
\|(z_1, \dots, z_n)\|_p &:= \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^p\right)^{1/p} \\
\|(z_1, \dots, z_n)\|_\infty &:= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i| .
\end{aligned}$$

Aussi bien dans $\mathbb{R}^n$ que dans $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, la norme $\|\cdot\|_2$ s'appelle **la norme euclidienne** et la norme $\|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$ donné) s'appelle **la norme de Hölder d'exposant** p. On peut montrer aussi que l'on a : $\lim_{p \to +\infty} \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty$. Par ailleurs, il est facile de montrer que ces normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et $\|\cdot\|_\infty$ (sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) sont toutes équivalentes. On montrera plus loin (voir le théorème 8.14) un résultat plus général que celui-ci qui énonce que :

> *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes.*

8.1.6 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Soient $(E_1, N_1), (E_2, N_2), \dots, (E_k, N_k)$ $(k \geqslant 2)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et soit $E := E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$. On peut définir sur E plusieurs normes, s'exprimant en fonction de $N_1, N_2, \dots, N_k$, dont les suivantes :

- **$\|\cdot\|_1$:** $\forall (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E$:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_1 := \sum_{i=1}^k N_i(x_i).$$

- **$\|\cdot\|_2$:** $\forall (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E$:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^k N_i(x_i)^2}.$$

- **$\|\cdot\|_p$ (où p est un entier strictement positif)** : $\forall (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E$:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_p := \left(\sum_{i=1}^k N_i(x_i)^p\right)^{1/p}.$$

- **$\|\cdot\|_\infty$:** $\forall (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E$:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant k} N_i(x_i).$$

On peut montrer que toutes ces normes $\|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et $\|\cdot\|_\infty$ de E sont équivalentes et que la topologie (commune) qu'elles engendrent sur E est simplement la topologie produit de E. Ce qui nous permet d'affirmer qu'**un produit (topologique) d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés est un espace vectoriel normé**[1].

Attention : l'affirmation qu'on vient de voir pour un produit fini d'**e.v.n** est en général fausse pour un produit infini d'**e.v.n**. Autrement dit, un produit infini d'**e.v.n**, muni de sa topologie produit, n'est pas en général un **e.v.n**.

1. Evidemment, les **e.v.n** en question doivent être pris sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

8.1.7 Exemples de normes sur un e.v.n de dimension infinie

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (constitué des fonctions réelles continues sur $[a,b]$) peut être muni de plusieurs normes importantes dont $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et $\|\cdot\|_\infty$, qui sont définies comme suit : $\forall f \in E$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &:= \int_a^b |f(t)|\,dt. \\
\|f\|_2 &:= \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}. \\
\|f\|_p &:= \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \\
\|f\|_\infty &:= \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.
\end{aligned}$$

La norme $\|\cdot\|_2$ s'appelle **la norme euclidienne** ; la norme $\|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$ donné) s'appelle **la norme de Hölder d'exposant** p et la norme $\|\cdot\|_\infty$ s'appelle **la norme de la convergence uniforme**[2] sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On peut montrer aussi que l'on a : $\lim_{p\to+\infty} \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty$. Enfin, il est important de noter que **ces normes ne sont pas équivalentes** ! Par exemple, l'exercice 8.12 propose de montrer que les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.

8.2 Espaces de Banach

8.2.1 Définition et exemples en dimension finie

Définition 8.4. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé est dit **de Banach** s'il est complet[3].

Exemples : Les $\mathbb{R}$-**e.v.n** : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ et $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (où n est un entier $\geqslant 2$) sont tous de Banach. Il en est de même pour les $\mathbb{C}$-**e.v.n** : $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ et $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$. On montrera plus loin (voir le corollaire 8.15) un résultat plus général qui énonce que :

▌ Tout **e.v.n de dimension finie** est de Banach.

8.2.2 Exemple d'un espace de Banach de dimension infinie

La proposition suivante nous fournit un exemple important d'espace de Banach de dimension infinie.

Proposition 8.5. *Le $\mathbb{R}$-**e.v.n** $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de sa norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, est de Banach.*

2. Dire qu'une suite $(f_n)_n$ de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ converge vers $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$, revient à dire que la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers f sur $[a,b]$; d'où le sens de l'appellation « norme de la convergence uniforme » pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3. Pour la distance associée à sa norme.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet ; c'est-à-dire que toute suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est convergente dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et montrons qu'elle est convergente dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. L'hypothèse « $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ » s'interprète mathématiquement par la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p > q > N \Longrightarrow \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon.$$

D'après la définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$, cette propriété est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p > q > N \Longrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Ce qui équivaut encore à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p > q > N \Longrightarrow \forall x \in [0,1] : \ |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \qquad (\star)$$

Cette propriété $(\star)$ montre que pour tout $x \in [0,1]$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Mais puisque $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est de Banach (i.e., complet), on en déduit que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$. Soit alors $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \qquad (\forall x \in [0,1]).$$

Avec le langage de l'Ananlyse, on dira que f est la limite simple de la suite de fonctions $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Plus fort que cela, nous allons montrer que cette même suite de fonctions $(f_n(x))_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. En prenant dans $(\star)$: $q = n > N$ et $p \to +\infty$, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : \quad n > N \Longrightarrow \forall x \in [0,1] : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

D'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : \quad n > N \Longrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui signifie bien que la suite de fonctions $(f_n(x))_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Et comme les fonctions f_n $(n \in \mathbb{N})$ sont toutes continues sur $[0,1]$ (puisque $f_n \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$), alors (d'après un résultat bien connu d'analyse) la fonction limite f est aussi continue sur $[0,1]$; autrement dit, $f \in E$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge alors dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ vers $f \in E$. Ce qui conclut que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach. La proposition est démontrée. □

8.3 Partie bornée et fonction bornée sur un e.v.n

Les notions de « partie bornée » et « fonction bornée » sur un **e.v.n** sont évidemment celles déjà vues sur un espace métrique ; néanmoins, l'utilisation d'une norme permet de caractériser plus simplement ces notions. La première proposition qui suit fournit une simple caractérisation de la première notion :

Proposition 8.6. *Une partie non vide A d'un **e.v.n** E est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :*

$$\forall x \in A : \quad \|x\| \leqslant M.$$

Démonstration. Soient E un **e.v.n** et A une partie non vide de E.

$(\Rightarrow)$ **:** Supposons que A est bornée (i.e., $\delta(A) < +\infty$) et montrons l'existence d'un réel positif M qui vérifie la propriété requise. En fixant x_0 un point de A (ce qui est possible puisque, par hypothèse, $A \neq \varnothing$), on a pour tout $x \in A$:

$$\|x\| \;=\; \|(x - x_0) + x_0\| \;\leqslant\; \|x - x_0\| + \|x_0\| \;\leqslant\; \delta(A) + \|x_0\|.$$

Ce qui montre que le réel positif $M := \delta(A) + \|x_0\|$ satisfait bien la propriété requise.

$(\Leftarrow)$ **:** Inversement, supposons qu'il existe un réel positif M tel que :

$$\forall x \in A : \quad \|x\| \leqslant M$$

et montrons que A est bornée. Pour ce faire, il suffit de remarquer que notre hypothèse sur M s'écrit aussi :

$$\forall x \in A : \quad x \in \overline{B}(0_E, M).$$

Ce qui équivaut à l'inclusion :

$$A \;\subset\; \overline{B}(0_E, M).$$

La partie A étant ainsi incluse dans une boule fermée ; ce qui entraîne (en vertu de la proposition 4.25) qu'elle est bornée.

La proposition est démontrée. □

Comme corollaire, nous obtenons une caractérisation simple d'une fonction bornée à valeurs dans un **e.v.n**. On a le

Corollaire 8.7. *Soient X un ensemble non vide, E un **e.v.n** et $f : X \to E$ une application. Alors, f est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :*

$$\forall x \in X : \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

Démonstration. Par définition, f est bornée ssi $f(X)$ est bornée. La proposition 8.6 permet de conclure. □

Avertissement : À partir de maintenant, nous aurons affaire à des situations faisant intervenir plusieurs **e.v.n**. Pour éviter l'ambiguïté, nous noterons la norme considérée sur un **e.v.n** E (resp. F, G, etc) par $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_G$, etc).

8.4 Applications linéaires continues d'un e.v.n dans un autre e.v.n

Lorsqu'une application d'un **e.v.n** dans un autre **e.v.n** est *linéaire*, sa continuité en un point devient une propriété robuste ! Elle entraîne non seulement sa continuité globale mais aussi sa lipschitziennité. Du coup, l'espace vectoriel des *application linéaires continues* d'un $\mathbb{K}$-**e.v.n** E dans un $\mathbb{K}$-**e.v.n** F (noté $\mathscr{L}_c(E, F)$) prend de l'ampleur et devient à son tour un **e.v.n** ! On a la proposition fondamentale suivante :

Proposition 8.8 (fondamentale). *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-**e.v.n** et $f : E \to F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'application f est continue sur E.*

(ii) *L'application f est continue en un certain point de E.*

(iii) *L'application f est bornée sur $\overline{B}(0_E, 1)$.*

(iv) *L'application f est bornée sur $S(0_E, 1)$.*

(v) *Il existe un réel positif M tel que : $\forall x \in E : \|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$.*

(vi) *L'application f est lipschitzienne sur E.*

Démonstration. Nous allons montrer la série d'implications circulaire

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(v)} \Rightarrow \text{(vi)} \Rightarrow \text{(i)}.$$

(**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) **:** C'est une implication évidente !

(**ii**) $\Rightarrow$ (**iii**) **:** Supposons que f est continue en un point $x_0 \in E$ et montrons qu'elle est bornée sur la boule fermée $\overline{B}(0_E, 1)$. L'hypothèse de continuité de f en x_0 entraîne qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in E : \quad \|x - x_0\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_F < 1 \tag{$\star$}$$

Maintenant, étant donné $y \in \overline{B}(0_E, 1)$ (arbitraire), en posant $x := \frac{\eta}{2} y + x_0$, on a :

$$\|x - x_0\|_E = \left\|\frac{\eta}{2} y\right\|_E = \frac{\eta}{2}\|y\|_E \leqslant \frac{\eta}{2} < \eta.$$

Ce qui entraîne (d'après ($\star$)) que :

$$\|f(x) - f(x_0)\|_F < 1.$$

Mais (vu que f est linéaire), on a par ailleurs :

$$\|f(x) - f(x_0)\|_F = \|f(x - x_0)\|_F = \left\|f\left(\frac{\eta}{2} y\right)\right\|_F = \left\|\frac{\eta}{2} f(y)\right\|_F = \frac{\eta}{2}\|f(y)\|_F.$$

D'où l'on déduit que : $\frac{\eta}{2}\|f(y)\|_F < 1$; soit

$$\|f(y)\|_F < \frac{2}{\eta}.$$

On vient ainsi de montrer que :

$$\forall y \in \overline{B}(0_E, 1) : \quad \|f(y)\|_F \; < \; \frac{2}{\eta}.$$

Ce qui montre bien que f est bornée sur $\overline{B}(0_E, 1)$ (cf. le corollaire 8.7), comme il fallait le prouver.

<u>(**iii**) ⇒ (**iv**) :</u> C'est une implication évidente puisque $S(0_E, 1) \subset \overline{B}(0_E, 1)$.

<u>(**iv**) ⇒ (**v**) :</u> Supposons que f est bornée sur $S(0_E, 1)$ et montrons la propriété (v) de la proposition. D'après le corollaire 8.7, la bornitude supposée de f sur $S(0_E, 1)$ équivaut à l'existence d'une constante positive M telle que :

$$\forall x \in S(0_E, 1) : \quad \|f(x)\|_F \; \leqslant \; M \qquad (\star\star)$$

En se servant de $(\star\star)$, montrons qu'on a pour tout $x \in E$: $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$. Soit $x \in E$. On distingue les deux cas suivants :

• Ou bien $x = 0_E$. Dans ce cas, l'inégalité $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$ est trivialement satisfaite (puisque $f(0_E) = 0_F$, étant donné que f est linéaire).

• Ou bien $x \neq 0_E$. Dans ce cas, on a $\|x\|_E \neq 0$ et $x' := \frac{x}{\|x\|_E} \in S(0_E, 1)$. D'où (d'après $(\star\star)$) : $\|f(x')\|_F \leqslant M$. Mais d'autre part, on a (puisque f est linéaire) :

$$\|f(x')\|_F \; = \; \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \; = \; \left\| \frac{1}{\|x\|_E} f(x) \right\|_F \; = \; \frac{1}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F.$$

On a par conséquent :

$$\frac{1}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F \; \leqslant \; M;$$

C'est-à-dire :

$$\|f(x)\|_F \; \leqslant \; M\|x\|_E,$$

comme il fallait le prouver.

L'implication requise est ainsi démontrée.

<u>(**v**) ⇒ (**vi**) :</u> Supposons qu'il existe un réel positif M tel que :

$$\forall x \in E : \quad \|f(x)\|_F \; \leqslant \; M\|x\|_E.$$

En se servant de la linéarité de f, il s'ensuit que pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F \; = \; \|f(x - y)\|_F \; \leqslant \; M\|x - y\|_E.$$

Ce qui montre que f est M-lipschitzienne et confirme ainsi l'implication requise.

<u>(**vi**) ⇒ (**i**) :</u> C'est une implication déjà vue lors de notre étude des espaces métriques.

La preuve de la proposition est complète. □

De la proposition fondamentale 8.8 résulte l'important corollaire suivant :

Corollaire 8.9. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient N_1 et N_2 deux normes sur E. Alors, on a équivalence entre :*

(i) *N_1 et N_2 sont topologiquement équivalentes.*

(ii) *N_1 et N_2 sont équivalentes.*

Démonstration. On a (d'après la proposition 4.38) :

$$N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont topologiquement équivalentes} \iff \mathrm{id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2) \text{ est bicontinue}$$

et

$$N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont équivalentes} \iff \mathrm{id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2) \text{ est bilipschitzienne.}$$

Mais comme l'application identité $\mathrm{id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est (de toute évidence) linéaire ainsi que son inverse, alors (d'après la proposition 8.8), on a équivalence entre « id_E est bicontinue » et « id_E est bilipschitzienne ». Ce qui conclut à l'équivalence entre les deux propriétés (i) et (ii) du corollaire et achève cette démonstration. □

Avertissement : Étant donné que les notions d'**équivalence** et d'**équivalence topologique** sont identiques pour les normes (d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel donné), on utilisera pour la suite exclusivement la première notion. On ne parlera donc que de deux normes équivalentes.

Notations :

- Lorsque E et F sont deux $\mathbb{K}$-**e.v.n**, on note par $\mathscr{L}(E, F)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications linéaires de E dans F et par $\mathscr{L}_c(E, F)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.
- Pour tout $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$, on définit $|||f|||$ par :
$$|||f||| := \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$
À priori $|||f||| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, mais le point (v) de la proposition 8.8 assure que $|||f||| < +\infty$. Ce qui fait que $|||\cdot|||$ est une application de $\mathscr{L}_c(E, F)$ dans $\mathbb{R}^+$. La proposition qui suit montre que cette application constitue en fait une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E, F)$.

Proposition 8.10. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-**e.v.n**. Alors l'application $|||\cdot||| : \mathscr{L}_c(E, F) \to \mathbb{R}^+$, définie précédemment, est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E, F)$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $|||\cdot|||$ satisfait les axiomes d'une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E, F)$.

• Pour tout $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$, on a :

$$\begin{aligned}
|||f||| = 0 &\iff \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \\
&\iff \|f(x)\|_F = 0, \ \forall x \in E \setminus \{0_E\} \\
&\iff f(x) = 0_F, \ \forall x \in E \setminus \{0_E\} \quad (\text{car } \|\cdot\|_F \text{ est une norme sur } F) \\
&\iff f(x) = 0_F, \ \forall x \in E \quad (\text{puisque } f(0_E) = 0_F, \text{ étant donné que } f \text{ est linéaire}) \\
&\iff f = 0_{\mathscr{L}_c(E,F)},
\end{aligned}$$

comme il fallait le prouver.

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$, on a :

$$\begin{aligned}
|||\lambda f||| &:= \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|(\lambda f)(x)\|_F}{\|x\|_E} \\
&= \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} \\
&= \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{|\lambda| \cdot \|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \\
&= |\lambda| \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \\
&= |\lambda|\, |||f||| ,
\end{aligned}$$

comme il fallait le prouver.

• Étant donnés $f, g \in \mathscr{L}_c(E,F)$, on a pour tout $x \in E\setminus\{0_E\}$:

$$\|(f+g)(x)\|_F = \|f(x)+g(x)\|_F \leqslant \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F.$$

D'où :

$$\frac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} + \frac{\|g(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant |||f||| + |||g|||$$

(car $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant |||f|||$ et $\frac{\|g(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant |||g|||$, d'après les définitions même de $|||f|||$ et $|||g|||$).
On vient ainsi de montrer que pour tout $x \in E\setminus\{0_E\}$, on a :

$$\frac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant |||f||| + |||g||| .$$

Ce qui entraîne que :

$$\sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant |||f||| + |||g||| ,$$

c'est-à-dire :

$$|||f+g||| \leqslant |||f||| + |||g||| ,$$

ce qui n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire requise pour $|||\cdot|||$.

Les axiomes d'une norme sont ainsi tous vérifiés par $|||\cdot|||$; d'où $|||\cdot|||$ constitue bien une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E,F)$. La proposition est démontrée. □

Appellation : Lorsque E et F sont des $\mathbb{K}$-**e.v.n**, la norme $|||\cdot|||$ de $\mathscr{L}_c(E,F)$ (construite à partir des deux normes $\|\cdot\|_E$ de E et $\|\cdot\|_F$ de F) est appelée **la norme subordonnée** sur $\mathscr{L}_c(E,F)$ des normes $\|\cdot\|_E$ de E et $\|\cdot\|_F$ de F.

Il existe plusieurs variantes de la définition d'une norme subordonnée qui découlent assez facilement les unes des autres. Ces variantes sont données par la proposition suivante :

Proposition 8.11. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-**e.v.n**. Alors, pour tout $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$, on a :*

$$|||f||| = \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in S(0_E,1)} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in B(0_E,1)} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in \overline{B}(0_E,1)} \|f(x)\|_F.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$.
La 1ère égalité de la proposition est la définition même que nous avons choisis pour $|||f|||$.
Montrons la 2ème égalité de la proposition. Pour $y \in S(0_E,1)$, on a :

$$\|f(y)\|_F = \frac{\|f(y)\|_F}{\|y\|_E} \leqslant \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |||f||| .$$

D'où :

$$\forall y \in S(0_E,1) : \quad \|f(y)\|_F \leqslant |||f||| .$$

Ce qui entraîne que :

$$\sup_{y \in S(0_E,1)} \|f(y)\|_F \leqslant |||f||| \tag{1}$$

D'autre part, pour $x \in E\setminus\{0_E\}$, en posant $x' = \frac{x}{\|x\|_E} \in S(0_E,1)$, on a :

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \frac{\|f(\|x\|_E x')\|_F}{\|x\|_E} = \frac{\big\|\|x\|_E f(x')\big\|_F}{\|x\|_E} = \frac{\|x\|_E \|f(x')\|_F}{\|x\|_E} = \|f(x')\|_F \leqslant \sup_{y \in S(0_E,1)} \|f(y)\|_F.$$

D'où :

$$\forall x \in E\setminus\{0_E\} : \quad \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \sup_{y \in S(0_E,1)} \|f(y)\|_F.$$

Ce qui entraîne que :

$$\sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \sup_{y \in S(0_E,1)} \|f(y)\|_F,$$

c'est-à-dire :

$$|||f||| \leqslant \sup_{y \in S(0_E,1)} \|f(y)\|_F \tag{2}$$

De (1) et (2), on tire :

$$|||f||| = \sup_{y \in S(0_E,1)} \|f(y)\|_F,$$

ce qui n'est rien d'autre que la 2ème égalité de la proposition.
Montrons maintenant la 3ème égalité de la proposition. Pour tout $r \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}\sup_{x \in S(0_E,r)} \|f(x)\|_F &= \sup_{y \in S(0_E,1)} \|f(ry)\|_F = \sup_{y \in S(0_E,1)} \|rf(y)\|_F = \sup_{y \in S(0_E,1)} r\|f(y)\|_F \\ &= r \sup_{y \in S(0_E,1)} \|f(y)\|_F = r\,|||f|||\end{aligned}$$

(en vertu de la 2ème égalité, déjà démontrée, de la proposition). D'où :

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ : \quad \sup_{x \in S(0_E,r)} \|f(x)\|_F = r\,|||f||| \tag{3}$$

En se servant de (3), on a :

$$\sup_{x\in B(0_E,1)} \|f(x)\|_F = \sup_{x\in\bigcup_{0\leqslant r<1} S(0_E,r)} \|f(x)\|_F = \sup_{0\leqslant r<1}\left(\sup_{x\in S(0_E,r)} \|f(x)\|_F\right) = \sup_{0\leqslant r<1} r\,|||f||| = |||f|||\,,$$

ce qui confirme bien la 3ème égalité de la proposition.
La 4ème et dernière égalité de la proposition découle immédiatement des deux précédentes. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\overline{B}(0_E,1)} \|f(x)\|_F &= \sup_{x\in B(0_E,1)\cup S(0_E,1)} \|f(x)\|_F = \max\left(\sup_{x\in B(0_E,1)} \|f(x)\|_F, \sup_{x\in S(0_E,1)} \|f(x)\|_F\right)\\ &= \max(|||f|||\,, |||f|||) = |||f|||\,,\end{aligned}$$

ce qui confirme bien la 4ème égalité de la proposition et achève cette démonstration. □

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition d'une norme subordonnée, mais nous avons préféré mettre l'accent sur elle en vue de son utilisation très fréquente (à la fois dans le cours et dans les exercices).

Proposition 8.12. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-**e.v.n** et $f\in\mathscr{L}_c(E,F)$. On a :*

1. *$\forall x\in E$:*
$$\|f(x)\|_F \leqslant |||f|||\,\|x\|_E.$$
2. *Si $M\in\mathbb{R}^+$ vérifie*
$$\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E \qquad (\forall x\in E),$$
alors
$$|||f||| \leqslant M.$$

Démonstration.
• Montrons le premier point de la proposition. Comme f est linéaire, on a $f(0_E)=0_F$ et l'inégalité « $\|f(x)\|_F \leqslant |||f|||\,\|x\|_E$ » est donc bien vérifiée pour $x=0_E$. Pour $x\in E\backslash\{0_E\}$, on a de tout évidence :

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \sup_{y\in E\backslash\{0_E\}} \frac{\|f(y)\|_F}{\|y\|_E} = |||f|||\,,$$

ce qui donne

$$\|f(x)\|_F \leqslant |||f|||\,\|x\|_E,$$

comme il fallait le prouver. L'inégalité du premier point de la proposition est ainsi vraie pour tout $x\in E$.

• Montrons maintenant le second point de la proposition. Soit $M\in\mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall x\in E:\ \ \|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E.$$

Ceci entraîne que :

$$\forall x\in E\backslash\{0_E\}:\ \ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant M.$$

D'où :

$$\sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant M;$$

autrement dit :

$$|||f||| \leqslant M,$$

comme il fallait le prouver.

La preuve de la proposition est complète. □

En appliquant la proposition 8.12, nous obtenons une inégalité remarquable concernant la norme subordonnée d'une composée de deux applications linéaires continues. On a la

Proposition 8.13. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-**e.v.n** et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires continues. Alors, on a :*

$$|||g \circ f||| \leqslant |||g|||\,|||f|||\,.$$

Démonstration. Comme $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires alors $g \circ f : E \to G$ est également linéaire. Aussi, comme f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue. D'où $g \circ f \in \mathscr{L}_c(E, G)$. En utilisant deux fois successivement l'inégalité du premier point de la proposition 8.12, on a pour tout $x \in E$:

$$\|(g \circ f)(x)\|_G = \|g(f(x))\|_G \leqslant |||g|||\,\|f(x)\|_F \leqslant |||g|||\,|||f|||\,\|x\|_E.$$

Ce qui entraîne, d'après le second point de la proposition 8.12, que :

$$|||g \circ f||| \leqslant |||g|||\,|||f|||\,,$$

comme il fallait le prouver. La proposition est démontrée. □

Remarque : Pour être plus précis, on aurait dû écrire l'inégalité de la proposition 8.13 sous la forme :

$$|||g \circ f|||_{\mathscr{L}_c(E,G)} \leqslant |||g|||_{\mathscr{L}_c(F,G)} |||f|||_{\mathscr{L}_c(E,F)}.$$

On a évité volontairement cette forme d'écriture dans l'unique but d'alléger l'inégalité en question pour mieux la cerner et la retenir.

8.5 Propriétés des e.v.n de dimensions finies

8.5.1 Les normes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. En se servant de $\mathscr{B}$, on peut construire sur E plusieurs normes dont les suivantes, notées

$\|\cdot\|_{1,\mathscr{B}}$, $\|\cdot\|_{2,\mathscr{B}}$, $\|\cdot\|_{p,\mathscr{B}}$ (p un entier $\geqslant 2$) et $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$ et définies [4] par :

$$\left.\begin{aligned} \|x\|_{1,\mathscr{B}} &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \|x\|_{2,\mathscr{B}} &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \\ \|x\|_{p,\mathscr{B}} &:= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \\ \|x\|_{\infty,\mathscr{B}} &:= \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \end{aligned}\right. \qquad (\forall x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E,\ \text{avec } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}).$$

On montre facilement que ces normes de E sont toutes équivalentes. Considérons particulièrement la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$. Il est immédiat que l'application

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & \left(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}\right) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \end{array}$$

est une isométrie bijective. Par conséquent, les $\mathbb{K}$-**e.v.n** $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}})$ et $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ont plusieurs spécificités topologiques et métriques communes. Précisément, il y a correspondance (via l'isométrie bijective sus-citée) entre les suites convergentes de l'un et les suites convergentes de l'autre, entre les suites de Cauchy de l'un et les suites de Cauchy de l'autre, entre les parties fermées de l'un et les parties fermées de l'autre, entre les parties bornées de l'un et les parties bornées de l'autre et entre les parties compactes de l'un et les parties compactes de l'autre. De ce fait et des propriétés de l'espace $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, vues aux corollaires 5.12, 5.14, 6.26 et 6.28, découle les deux importantes propriétés suivantes :

— L'**e.v.n** $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}})$ est complet (i.e., de Banach).

— Les parties compactes de l'**e.v.n** $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}})$ sont exactement ses parties fermées bornées.

Ces deux propriétés seront utilisées dans la démonstration du théorème fondamental qui va suivre :

Théorème 8.14 (fondamental). *Sur un $\mathbb{K}$-**e.v.n** de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$), et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Nous allons montrer que toute norme de E est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$ de E (définie précédemment). Soit N une norme quelconque de E. D'une part, en utilisant les propriétés de N en tant que norme de E, on a pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$ (où

4. Le fait que $\|\cdot\|_{1,\mathscr{B}}$, $\|\cdot\|_{2,\mathscr{B}}$, $\|\cdot\|_{p,\mathscr{B}}$ et $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$ sont bien des normes sur E est une généralisation de ce qu'on a vu précédemment sur $\mathbb{K}^n$, à savoir que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ (appelées les normes usuelles de $\mathbb{K}^n$) sont effectivement des normes sur $\mathbb{K}^n$. Les preuves des deux faits sont exactement identiques.

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$) :

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} N(x_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i)\right) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i)\right) \|x\|_{\infty,\mathscr{B}}. \end{aligned}$$

D'où, en posant $\beta := \sum_{i=1}^{n} N(e_i) > 0$, on a :

$$N(x) \leqslant \beta \|x\|_{\infty,\mathscr{B}} \qquad (\forall x \in E) \tag{$\star$}$$

D'autre part, d'après la propriété des normes vue à l'exercice 8.1, on a pour tous $x, y \in E$:

$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y).$$

Et puisque $N \leqslant \beta \| \cdot \|_{\infty,\mathscr{B}}$ (en vertu de $(\star)$), il en résulte que l'on a pour tous $x, y \in E$:

$$|N(x) - N(y)| \leqslant \beta \|x-y\|_{\infty,\mathscr{B}}.$$

Ce qui équivaut à dire que l'application :

$$\begin{array}{rccc} N : & \left(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & x & \longmapsto & N(x) \end{array}$$

est β-lipschitzienne et est par conséquent continue sur $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}})$.
Maintenant, étant donné que la sphère unité $S(0_E, 1)\Big|_{\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}}$ de $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}})$ est une partie fermée et bornée de $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}})$, elle est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}})$ (d'après les propriétés de la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$, vues précédemment) et le théorème de Heine entraîne que l'application N précédente est bornée sur $S(0_E, 1)\Big|_{\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}}$ et atteint ses bornes. En particulier, N atteint sa borne inférieure ; c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in S(0_E, 1)\Big|_{\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}}$ tel que :

$$N(x) \geqslant N(x_0) \qquad \left(\forall x \in S(0_E, 1)\Big|_{\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}}\right).$$

Posons $\alpha := N(x_0) \geqslant 0$. Si $\alpha = 0$, on obtient (puisque N est une norme sur E) que $x_0 = 0_E \notin S(0_E, 1)\Big|_{\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}}$, ce qui est absurde. D'où $\alpha > 0$ et on a :

$$\forall x \in S(0_E, 1)\Big|_{\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}} : \; N(x) \geqslant \alpha.$$

Enfin, étant donné $x \in E \backslash \{0_E\}$, en appliquant la dernière inégalité pour $\frac{x}{\|x\|_{\infty,\mathscr{B}}} \in S(0_E, 1)\Big|_{\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}}$, on obtient (après simplification) :

$$N(x) \geqslant \alpha\|x\|_{\infty,\mathscr{B}}.$$

Comme cette dernière est trivialement vraie pour $x = 0_E$ aussi, on a en conclusion :

$$N(x) \geqslant \alpha\,\|x\|_{\infty,\mathscr{B}} \qquad (\forall x \in E) \tag{$\star\star$}$$

Les inégalités ($\star$) et ($\star\star$) montrent bien que la norme N est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$, comme il fallait le prouver. Ceci achève la preuve du théorème. □

8.5.2 Propriétés topologiques et métriques d'un $\mathbb{K}$-e.v.n de dimension finie

Le théorème fondamental 8.14 possède d'importantes conséquences nous informant des propriétés topologiques et métriques d'un $\mathbb{K}$-**e.v.n** de dimension finie. Nous commençons par le corollaire suivant :

Corollaire 8.15.

*(1) Tout $\mathbb{K}$-**e.v.n** de dimension finie est de Banach.*

*(2) Les parties compactes d'un $\mathbb{K}$-**e.v.n** de dimension finie sont exactement ses parties fermées et bornées.*

Démonstration. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-**e.v.n** de dimension finie, notée n (le cas $n = 0$ étant trivial, on supposera que $n \geqslant 1$) et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Comme (d'après le théorème 8.14) toutes les normes de E sont équivalentes, alors le $\mathbb{K}$-**e.v.n** $(E, \|\cdot\|)$ possède les mêmes propriétés topologiques et métriques[5] que le $\mathbb{K}$-**e.v.n** $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}})$. Mais comme ce dernier vérifie les propriétés (1) et (2) du corollaire (d'après §8.5.1) alors $(E, \|\cdot\|)$ vérifie également ces mêmes propriétés. Ce qui achève cette preuve. □

Nous enchaînons avec la proposition suivante :

Proposition 8.16. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-**e.v.n**, avec E de dimension finie. Alors, toute application linéaire de E dans F est continue (i.e., $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}_c(E, F)$).*

Démonstration. Posons $n := \dim E$ (le cas $n = 0$ étant trivial, on supposera que $n \geqslant 1$) et fixons une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ une application linéaire et montrons qu'elle est continue. Comme (d'après le théorème 8.14) toutes les normes de E sont équivalentes, on a en particulier $\|\cdot\|_E \sim \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$. Ce qui entraîne l'existence d'une constante positive

5. Plus précisément, l'équivalence des deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$ de E entraîne que les deux $\mathbb{K}$-**e.v.n** $(E, \|\cdot\|)$ et $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}})$ ont les mêmes suites convergentes, les mêmes suites de Cauchy, les mêmes parties fermées, les mêmes parties bornées et les mêmes parties compactes.

c telle que $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}} \leqslant c\|\cdot\|_E$. Par suite, en se servant de ce fait, de la linéarité de f, ainsi que des propriétés d'une norme, on a pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$ (où $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$) :

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_F &= \|f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n)\|_F \\
&= \|x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n)\|_F \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_if(e_i)\|_F \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|f(e_i)\|_F \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F\right) \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F\right) \|x\|_{\infty,\mathscr{B}} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F\right) c\,\|x\|_E,
\end{aligned}$$

soit

$$\|f(x)\|_F \leqslant \left(c\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F\right) \|x\|_E \qquad (\forall x \in E),$$

Ce qui montre (en vertu de la proposition 8.8) que f est continue, comme il fallait le prouver. La proposition est démontrée. □

8.6 Résultats complémentaires

Théorème 8.17. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-**e.v.n**, avec F de Banach. Alors, le $\mathbb{K}$-**e.v.n** $\mathscr{L}_c(E,F)$ est également de Banach.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que toute suite de Cauchy de $\mathscr{L}_c(E,F)$ est convergente (dans $\mathscr{L}_c(E,F)$). Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathscr{L}_c(E,F)$ et montrons qu'elle converge vers un certain $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$. Par hypothèse, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p,q \in \mathbb{N} : \quad p > q \geqslant N \Longrightarrow |||f_p - f_q||| < \varepsilon \tag{1}$$

Comme (d'après la proposition 8.12), pour tous $p,q \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, on a : $\|f_p(x) - f_q(x)\|_F = \|(f_p - f_q)(x)\|_F \leqslant |||f_p - f_q|||\,\|x\|_E$, il s'ensuit que pour tout $x \in E\backslash\{0_E\}$, on a la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p,q \in \mathbb{N} : \quad p > q \geqslant N \Longrightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon\|x\|_E \tag{2}$$

Pour $x \in E\backslash\{0_E\}$ fixé, en prenant $\frac{\varepsilon}{\|x\|_E}$ à la place de ε dans (2), on obtient la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p,q \in \mathbb{N} : \quad p > q \geqslant N \Longrightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon,$$

qui est plus significative puisqu'elle équivaut à dire simplement que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de F est de Cauchy (pour tout $x \in E\backslash\{0_E\}$). Par suite, comme F est supposé de Banach, on en déduit que pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de F est convergente. Remarquer que cette même suite converge aussi pour $x = 0_E$ (vers 0_F), puisque $f_n(0_E) = 0_F$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), étant donné que les applications f_n sont linéaires. Définissons alors :

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) := \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \end{array}.$$

Nous allons démontrer deux choses : d'abord que $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$ et puis que f est la limite de la suite $(f_n)_n$ dans $\mathscr{L}_c(E, F)$. Montrons premièrement que f est linéaire. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tous $x, y \in E$, on a :

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda x + \mu y) & := & \lim_{n \to +\infty} f_n(\lambda x + \mu y) & \\ & = & \lim_{n \to +\infty} (\lambda f_n(x) + \mu f_n(y)) & \text{(car } f_n \text{ est linéaire pour tout } n \in \mathbb{N}) \\ & = & \lambda \lim_{n \to +\infty} f_n(x) + \mu \lim_{n \to +\infty} f_n(y) & \text{(d'après les propriétés élémentaires des limites)} \\ & = & \lambda f(x) + \mu f(y), & \end{array}$$

ce qui montre bien que f est linéaire. Montrons maintenant que f est continue. En prenant dans (2) : $\varepsilon = 1$, $q = N = N(1)$ et en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient (compte tenu de la continuité de la norme $\|\cdot\|_F$) que :

$$\|f(x) - f_N(x)\|_F \leqslant \|x\|_E \qquad (\forall x \in E \backslash \{0_E\}).$$

D'où (puisque cette inégalité est trivialement vraie pour $x = 0_E$) :

$$\|(f - f_N)(x)\|_F \leqslant \|x\|_E \qquad (\forall x \in E).$$

Ce qui montre (en vertu de la proposition 8.8) que l'application $(f - f_N)$ (de E dans F) est continue ; d'où $f = f_N + (f - f_N)$ est aussi continue (en tant que somme de deux applications continues). Le fait que $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$ est ainsi établi. Il nous reste à montrer que f est la limite (dans $\mathscr{L}_c(E, F)$) de la suite $(f_n)_n$. Pour ce faire, il suffit de faire tendre dans (1) l'entier positif p vers $+\infty$, tout en tenant compte de la continuité de la norme $|||\cdot|||$ de $\mathscr{L}_c(E, F)$. Ce faisant, on obtient la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall q \in \mathbb{N} : \; q \geqslant N \Longrightarrow |||f_q - f||| \leqslant \varepsilon,$$

qui n'interprète rien d'autre que la convergence de la suite $(f_n)_n$ vers f dans $\mathscr{L}_c(E, F)$. Ceci complète la preuve du théorème. $\square$

Le théorème suivant révèle un lien remarquable et très important entre la notion algébrique de "dimension" (d'un $\mathbb{K}$-**e.v.n**) et la notion topologique de "compacité". Il est dû au mathématicien hongrois Frigyes Riesz (1880-1956), qui est l'un des fondateurs de l'Analyse fonctionnelle. On désigne souvent le nom de ce mathématicien par F. Riesz pour le différencier de son frère Marcel Riesz, qui était également un mathématicien.

Théorème 8.18 (F. Riesz).
*Un $\mathbb{K}$-**e.v.n** E est de dimension finie ssi la boule unité fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ est compacte.*

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-**e.v.n**. Comme la boule fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ est une partie fermée et bornée de E, le sens directe du théorème n'est autre qu'une application immédiate du second point du corollaire 8.15. Montrons le sens inverse du théorème. Supposons que $\overline{B}(0_E, 1)$ est une partie compacte de E et montrons que E est de dimension finie. Comme on a trivialement

$$\overline{B}(0_E, 1) \ \subset \ \bigcup_{x \in \overline{B}(0_E,1)} B\left(x, \frac{1}{2}\right),$$

l'hypothèse de compacité de $\overline{B}(0_E, 1)$ entraîne l'existence d'un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n$ de $\overline{B}(0_E, 1)$ tels que :

$$\overline{B}(0_E, 1) \ \subset \ \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

Posons par suite

$$F \ := \ \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

et montrons que $E = F$, ce qui entraînerait que E est de dimension finie ($\leqslant n$). Comme $F \subset E$, il s'agit juste de montrer l'inclusion $E \subset F$, c'est-à-dire que tout point de E appartient à F. Soit donc $x \in E$ (arbitraire) et montrons que $x \in F$. Pour ce faire, nous allons d'abord montrer que quelque soit le point $y \in F$ que nous choisissons proche de x, il existe un autre point $y' \in F$ qui soit à moitié plus proche ; c'est-à-dire que x vérifie la propriété :

$$\forall y \in F, \exists y' \in F : \quad \|x - y'\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - y\| \tag{2}$$

Montrons (2). Soit $y \in F$ (quelconque) et montrons l'existence d'un $y' \in F$ qui satisfait l'inégalité de (2). Si $y = x$, il suffit de prendre $y' = y$ pour satisfaire (2). Sinon (i.e., si $y \neq x$), on a $\|x - y\| \neq 0$ et nous prouvons définir

$$z \ := \ \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

Comme on a (de toute apparence) $z \in \overline{B}(0_E, 1)$, alors (d'après (1)) il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $z \in B(x_i, \frac{1}{2})$. Définissons par suite :

$$y' \ := \ y + \|x - y\|x_i.$$

Comme y et x_i sont dans F, qui est un sous-espace vectoriel de E, alors aussi $y' \in F$. De plus, on a :

$$x - y' \ = \ x - y - \|x - y\|x_i \ = \ \|x - y\|z - \|x - y\|x_i \ = \ \|x - y\|(z - x_i),$$

ce qui donne :

$$\|x - y'\| \ = \ \|x - y\|\|z - x_i\| \ \leqslant \ \frac{1}{2}\|x - y\|$$

(puisque $z \in B(x_i, \frac{1}{2})$). Ce qui montre bien que ce vecteur y' de F est l'un des vecteurs requis par (2). La propriété (2) étant ainsi établie, en la réitérant plusieurs fois en partant de $y = y_0 = 0_E$, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists y_k \in F : \quad \|x - y_k\| \leqslant \frac{1}{2^k}\|x\|.$$

Cette dernière montre que la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F converge vers x. Ce qui entraîne que $x \in \overline{F}$. Enfin, comme F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors il constitue une partie fermée de E (voir l'exercice 8.6) ; d'où $\overline{F} = F$, et on a par conséquent $x \in F$, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve du théorème. $\square$

Le corollaire suivant englobe les caractéristiques, relatives à la compacité, des $\mathbb{K}$-**e.v.n** de dimensions finies. Étant donné qu'il contient le théorème 8.18, certains auteurs le présentent (sans distinction avec le théorème 8.18) sous le nom du « Théorème de F. Riesz ».

Corollaire 8.19 (F. Riesz). *Soit E un $\mathbb{K}$-**e.v.n**. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) E est de dimension finie.

(ii) La boule unité fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ de E est compacte.

(iii) Les parties compactes de E sont exactement ses parties fermées et bornées.

(iv) E est localement compact.

Démonstration. L'équivalence entre les deux points (i) et (ii) du corollaire est fournie par le théorème 8.18. L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) est fournie par le second point du corollaire 8.15. Les deux implications (iii) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (iv) sont triviales. Pour compléter la preuve de l'équivalence des quatre points du corollaire, il suffit de montrer par exemple l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii). Montrons cette dernière implication. Supposons que E est localement compact et montrons que la boule unité fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ de E est compacte. D'après notre supposition, le vecteur nul 0_E de E possède au moins un voisinage compact. Soit V un tel voisinage compact de 0_E. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(0_E, r) \subset V$. Ce qui entraîne que $\overline{B(0_E, r)} \subset \overline{V}$. Mais comme $\overline{B(0_E, r)} = \overline{B}(0_E, r)$ (voir l'exercice 8.5) et que $\overline{V} = V$ (car V est un fermé, étant donné qu'il est compact), on a en fait $\overline{B}(0_E, r) \subset V$. Ainsi, $\overline{B}(0_E, r)$ est une partie fermée de E, incluse dans le compact V ; ce qui entraîne (en vertu du corollaire 6.10) que $\overline{B}(0_E, r)$ est compacte. En remarquant enfin que la boule unité fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ de E s'obtient comme image de $\overline{B}(0_E, r)$ (qui est compacte) par l'homothétie de E de rapport[6] $\frac{1}{r}$ (qui est une application continue) ; on en conclut (en vertu du corollaire 6.21) que $\overline{B}(0_E, 1)$ est compacte, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve du corollaire. $\square$

6. C'est-à-dire l'application $h : E \to E$, définie par : $h(x) = \frac{1}{r}x$ ($\forall x \in E$). Elle est lipschitzienne, donc continue.

Exercices

Pour tout ce qui suit $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

⋆ **Exercice 8.1.** Soit E un **e.v.n** sur $\mathbb{K}$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a :
$$\|x - y\| \geqslant \Big| \|x\| - \|y\| \Big| .$$
2. En déduire que l'application
$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$
est continue (où $\mathbb{R}$ est muni de sa norme usuelle).

⋆ **Exercice 8.2.** Soient E un $\mathbb{K}$-**e.v.n** et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— Montrer que chacune des deux applications
$$\begin{array}{rcl} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad et \qquad \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$
est continue.

☞ Remarquer que ces applications sont linéaires.

⋆ **Exercice 8.3.** Soit E un $\mathbb{K}$-**e.v.n**.

— Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E alors $\overline{H}$ l'est également.

⋆ **Exercice 8.4.** Soient E un $\mathbb{K}$-**e.v.n** et H un sous-espace vectoriel propre[7] de E.

— Montrer que H est d'intérieur vide.

Exercice 8.5. Soit E un $\mathbb{K}$-**e.v.n**.

— Montrer que pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, on a :
$$\overline{B(a, r)} = \overline{B}(a, r) \qquad \text{et} \qquad \overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a, r)}} = B(a, r).$$

⋆ **Exercice 8.6.** Soit E un $\mathbb{K}$-**e.v.n**.

— Montrer que tout sous-espace vectoriel F <u>de dimension finie</u> de E est un fermé.

⋆ **Exercice 8.7.** Soit E un $\mathbb{K}$-**e.v.n** de Banach.

— Montrer que E est ou bien de dimension <u>finie</u> ou bien de dimension <u>infinie non dénombrable</u>.

☞ Utiliser le théorème de Baire en se servant des résultats des deux exercices 8.4 et 8.6.

Exercice 8.8. Soit $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et soit $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ l'application qui associe à tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ le maximum des valeurs absolues de ses coefficients.

7. C'est-à-dire que $H \neq E$.

1. Montrer brièvement que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer de deux façons différentes que le $\mathbb{R}$-**e.v.n** $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas de Banach (pour la première façon, vous utilisez la définition même d'un espace de Banach et pour la seconde, vous utilisez le résultat de l'exercice 8.7).

Exercice 8.9. Soient E un $\mathbb{R}$-**e.v.n** et f une forme linéaire non identiquement nulle sur E. Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est continue sur } E \iff \operatorname{Ker} f \text{ est un fermé de } E.$$

☞ Pour montrer l'implication inverse, vous pouvez procéder par l'absurde en supposant que $\operatorname{Ker} f$ est fermé mais que f n'est pas continue et suivre les étapes suivantes :

— Montrer (en utilisant la discontinuité de f) qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E, vérifiant : $|f(x_n)| > n\|x_n\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. En particulier $f(x_n) \neq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

— Par suite, considérer la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E, définie par : $y_n := x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_n)}x_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Vérifier que $(y_n)_n$ est une suite de $\operatorname{Ker} f$ et qu'elle converge vers x_0.

— Conclure (en utilisant l'hypothèse « $\operatorname{Ker} f$ est un fermé de E ») que $x_0 \in \operatorname{Ker} f$; ce qui donne une contradiction avec $f(x_0) \neq 0$.

Exercice 8.10. Soient E un $\mathbb{R}$-**e.v.n** et $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue[8] et non identiquement nulle. Considérons $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que l'on a : $d(x_0, \operatorname{Ker} f) > 0$.
2. (a) Montrer que pour tout $y \in \operatorname{Ker} f$, on a : $|f(x_0)| \leqslant |||f||| \cdot \|x_0 - y\|$.

   (b) En déduire que l'on a :

$$|||f||| \geqslant \frac{|f(x_0)|}{d(x_0, \operatorname{Ker} f)}.$$

Exercice 8.11. Soient E un $\mathbb{R}$-**e.v.n** et f un endomorphisme de E. On définit

$$A_f := \{x \in E : \|f(x)\| = 1\}.$$

— Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est continue} \iff A_f \text{ est fermé.}$$

⋆ **Exercice 8.12.** On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \int_0^1 |f(t)|\,dt \\ \|f\|_\infty &:= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \end{aligned}\right. \qquad (\forall f \in E).$$

1. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

8. Bien entendu, $\mathbb{R}$ est muni de sa norme usuelle qui n'est rien d'autre que la valeur absolue.

2. Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas de Banach.

☞ Utiliser la suite $(f_n)_{n \geqslant 2}$ de E, définie par :

$$\begin{array}{rrcl} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ at+b & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } t \in]\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \end{array} \qquad (\forall n \geqslant 2)$$

(où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis de sorte que f_n soit continue sur $[0,1]$ (i.e., $f_n \in E$)).

⋆ **Exercice 8.13.** Soient $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ l'application définie par :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi(f) : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(f)(x) := \frac{1}{2}\left[1 + \int_0^1 x e^{xt} f(t)\,dt\right] \end{array} \qquad (\forall f \in E).$$

— Montrer que φ possède un unique point fixe dans E.

Exercice 8.14. Montrer que l'unique application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation intégrale :

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin\left(x^2 + t^2\right) f(t)\,dt \qquad (\forall x \in [0,1])$$

est l'application identiquement nulle.

Exercice 8.15. Soit φ l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, défini par :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \int_0^x f(t)\,dt \end{array}.$$

— Montrer que l'endomorphisme φ^2 ne possède pas de point fixe non trivial dans E (le point fixe trivial est 0_E).

⋆ **Exercice 8.16.** On munit $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. la norme de la convergence uniforme). Soit $\varphi : E \to E$, définie par :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi(f) : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(f)(x) := x(1-x)f(x) \end{array} \qquad (\forall f \in E).$$

— Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}_c(E, E)$ et calculer $|||\varphi|||$.

⋆ **Exercice 8.17.** On munit $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. la norme de la convergence uniforme). Soient φ et Ψ les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(1) - f(0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrcl} \Psi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)\,dx \end{array}.$$

— Montrer que φ et Ψ appartiennent à $\mathscr{L}_c(E, \mathbb{R})$, puis calculer la norme de chacune d'entre elles.

Exercice 8.18. Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et N_1 et N_2 les deux applications de E dans $\mathbb{R}^+$, définies par :

$$\left.\begin{aligned} N_1(f) &:= \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + |f(0)| \\ N_2(f) &:= \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \end{aligned}\right. \qquad (\forall f \in E). \tag{8.1}$$

— Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

☞ Pour montrer l'équivalence de N_1 et N_2, utiliser le théorème des accroissements finis.

Exercice 8.19. Soient $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\|\cdot\|_\infty$ la norme de $\mathbb{R}[X]$ définie par : $\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ ($\forall P \in \mathbb{R}[X]$). Considérons l'application :

$$\begin{array}{rrcl} N: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & P & \longmapsto & N(P) := \max_{k\in\mathbb{N}} |P^{(k)}(0)| \end{array}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que N est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \alpha \cdot N$) mais que N n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
3. (a) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & (\mathbb{R}[X], N) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & P & \longmapsto & \varphi(P) := \int_0^1 P(t)\,dt \end{array}$$

   est linéaire et continue.

   (b) Déterminer la valeur exacte de $|||\varphi|||$.

☞ La formule de Taylor est d'une grande utilité pour toutes les questions de cet exercice.

Exercice 8.20. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_1$, définie par :

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt \qquad (\forall f \in E)$$

et on considère φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = g \end{array}, \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rrcl} g: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) := \int_0^x f(t)\,dt \end{array}.$$

1. Montrer que φ est continue et que $|||\varphi||| \leqslant 1$.
2. Montrer que l'on a précisément $|||\varphi||| = 1$.

   ☞ Considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E dont le terme général $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est défini par :

$$f_n(x) := ne^{-nx} \qquad (\forall x \in [0,1]).$$

   N.B : On peut également considérer la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E dont le terme général $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est défini par :

$$h_n(x) := n(1-x)^{n-1} \qquad (\forall x \in [0,1]).$$

Exercice 8.21. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. la norme induite sur E de la norme de la convergence uniforme de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$) et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & (E, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := \int_0^1 x f'(x)\,dx \end{array}.$$

1. Montrer que φ est linéaire et continue et que $|||\varphi||| \leqslant 2$.
2. Montrer que l'on a précisément : $|||\varphi||| = 2$.
   ☞ Considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E dont le terme général $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est défini par :
   $$f_n(x) \;:=\; 2x^n - 1 \qquad (\forall x \in [0,1]).$$

Exercice 8.22 (Examen de l'année 2017-2018).
Soient E le $\mathbb{R}$-**e.v.n** $E := \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_\infty$ sa norme de la convergence uniforme, qui est définie par : $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ ($\forall f \in E$). Considérons $N : E \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$N(f) \;:=\; |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \qquad\qquad (\forall f \in E).$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que l'on a $\|\cdot\|_\infty \leqslant N$ (c'est-à-dire : $\forall f \in E : \|f\|_\infty \leqslant N(f)$).
   - Qu'est ce que cette inégalité entraîne à propos des topologies de E engendrées par les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ?
3. Soit
   $$\begin{array}{rccl} \varphi : & (E, N) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := f(0) - f(\frac{1}{2}) + f(1) \end{array}.$$
   (a) Montrer que φ est linéaire et continue.
   (b) Montrer que l'on a précisément $|||\varphi||| = 1$.

Exercice 8.23. Soit E un $\mathbb{R}$-**e.v.n** et soient f et g deux endomorphismes de E, vérifiant l'identité :

$$f \circ g - g \circ f \;=\; \mathrm{id}_E \qquad (\star)$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$f \circ g^n - g^n \circ f \;=\; n g^{n-1} \qquad (\star\star)$$
2. (a) En utilisant $(\star\star)$, montrer que g ne peut être nilpotent [9].
   (b) En déduire, en se servant toujours de $(\star\star)$ et du résultat de (2)(a), que l'un au moins des deux endomorphismes f et g est discontinu.

9. On dit que g est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^k \equiv 0$.

(c) Conclure que E est forcément de dimension infinie.

— Retrouvez ce résultat plus simplement en utilisant seulement de l'algèbre linéaire.

☞ Procéder par l'absurde et utiliser la notion de « trace d'un endomorphisme ».

✠ ✠ ✠

Quelques sujets d'examens des années précédentes

Interrogation de l'année 2017-2018

Durée : 1 heure

Barème sur 15

Proposée le 8 février 2018 par l'auteur

Exercice 1 (3 points) : Soient X et Y deux espaces topologiques, avec Y **séparé** et soit $f : X \to Y$ une application **continue** et **injective**.

— Montrer que X est séparé.

Exercice 2 (6 points) : Pour ce qui suit, on note par d_{us} la distance usuelle de $\mathbb{R}^+$ (i.e. la distance induite sur $\mathbb{R}^+$ de la distance usuelle de $\mathbb{R}$). Soit

$$\begin{array}{rccl} d : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) := \dfrac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \end{array} .$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que d et d_{us} sont topologiquement équivalentes mais qu'elles ne sont pas équivalentes.
3. Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{R}^+, d)$ n'est pas complet.

Exercice 3 (6 points) : Soient (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X.

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccl} f : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}$$
est lipschitzienne (où $\mathbb{R}$ est muni de sa distance usuelle).
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, le sous-ensemble U_ε de X, défini par :
$$U_\varepsilon \ := \ \{x \in X : \ d(x,A) < \varepsilon\}$$
est un ouvert de X.
3. Conclure que toute partie fermée de X peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts.

Examen de l'année 2017-2018
Durée : 1 heure 30 minutes
Barème sur 20
Proposé le 25 février 2018 par l'auteur

Questions de cours (5 points) : Pour ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps commutatifs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et **e.v.n** est l'abréviation de l'expression « espace vectoriel normé ».

1. Citer les propriétés vues en cours des $\mathbb{K}$-**e.v.n** de dimensions finies.
2. Que peut-on dire sur la dimension d'un $\mathbb{K}$-**e.v.n** de Banach ?
3. Donner (sans démonstration) un exemple d'un $\mathbb{K}$-**e.v.n** qui n'est pas de Banach.
4. Rappeler l'énoncé du théorème de Baire puis utiliser le pour montrer (immédiatement) que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable.

Exercice 1 (7 points) : Soit E un espace topologique.

1. (a) Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a :
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$
   (b) Dire (sans démonstration) comment cette propriété se généralise par récurrence.
2. Donner un exemple d'un espace topologique E et d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E tel que :
$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \neq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$
3. On suppose dans cette question que E est séparé.
   (a) Montrer que si A est une partie compacte de E et x est un point de E qui n'appartient pas à A alors il existe un ouvert U de E tel que :
$$A \subset U \quad \text{et} \quad x \notin \overline{U}.$$
   (b) En déduire que si E est compact alors pour tout $x \in E$ et tout ouvert O de E contenant x, il existe un fermé F de E tel que :
$$x \in \overset{\circ}{F} \subset F \subset O.$$
   ☞ : Appliquer le résultat de la question précédente pour $A = \complement_E O$.

Exercice 2 (8 points) : Soient E le $\mathbb{R}$-**e.v.n** $E := \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_\infty$ sa norme de la convergence uniforme, qui est définie par : $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad (\forall f \in E)$. Considérons $N : E \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :
$$N(f) := |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt \qquad (\forall f \in E).$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer qu'on a $\|\cdot\|_\infty \leqslant N$ (c'est-à-dire : $\forall f \in E : \|f\|_\infty \leqslant N(f)$).
   — Qu'est ce que cette inégalité entraîne à propos des topologies de E engendrées par les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ?
3. Soit
$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & (E, N) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := f(0) - f(\tfrac{1}{2}) + f(1) \end{array}.$$
   (a) Montrer que φ est linéaire et continue.
   (b) Montrer que l'on a précisément $|||\varphi||| = 1$.

Examen de remplacement de l'année 2017-2018

Durée : 1 heure 30 minutes

Barème sur 20

Proposé le 7 mars 2018 par l'auteur

Exercice 1 (4 points) : Soit (E, τ) un espace topologique fini et séparé.

— Montrer que τ est forcément la topologie discrète de E.

Exercice 2 (6 points) : Soient E un espace topologique séparé et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties compactes emboîtées et toutes non vides de E. On pose $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

1. Montrer que K est non vide et en déduire qu'il est compact.
2. Montrer que si Ω est un ouvert de E contenant K alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$K_n \subset \Omega \qquad (\forall n \geqslant n_0).$$

Exercice 3 (10 points) : Soient $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\|\cdot\|_\infty$ la norme de $\mathbb{R}[X]$ définie par : $\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ $(\forall P \in \mathbb{R}[X])$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} N: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & P & \longmapsto & N(P) := \max_{k \in \mathbb{N}} |P^{(k)}(0)| \end{array}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que N est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \alpha \cdot N$) mais que N n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
3. (a) Montrer que l'application linéaire :
$$\begin{array}{rccl} \varphi: & (\mathbb{R}[X], N) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & P & \longmapsto & \varphi(P) := \int_0^1 P(t)\, dt \end{array}$$
est continue.
   (b) Déterminer la valeur exacte de $|||\varphi|||$.

Examen de rattrapage de l'année 2017-2018

Durée : 1 heure 30 minutes

Barème sur 20

Proposé le 17 septembre 2018 par l'auteur

Exercice 1 (5 points) : Soit τ la famille constituée de parties U de $\mathbb{R}$ qui satisfont l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :

(i) $0 \notin U$;

(ii) $]-1,1[\subset U$.

1. Montrer que τ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Caractériser les parties fermées de l'espace topologique $(\mathbb{R},\tau)$.

   (b) Caractériser les parties de $\mathbb{R}$ qui sont ouvertes et fermées à la fois dans $(\mathbb{R},\tau)$.
3. Montrer que l'espace topologique $(\mathbb{R},\tau)$ n'est pas séparé.

Exercice 2 (8 points) :

Partie I :

Soit $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x,y) \ := \ \ln(1+|x-y|) \qquad (\forall x,y \in \mathbb{R}).$$

1. Montrer que d constitue une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que d est topologiquement équivalente à la distance uselle de $\mathbb{R}$.

   ☞ : Vous pouvez utiliser l'inégalité : « $\ln(1+t) \leqslant t$ $(\forall t \geqslant 0)$ ».

Partie II :

On munit $\mathbb{R}$ de la distance d' définie par :

$$d'(x,y) \ := \ |e^x - e^y| \qquad (\forall x,y \in \mathbb{R}).$$

1. Déterminer explicitement la boule ouverte $B_{d'}(0,1)$.
2. Montrer que l'intervalle $]-\infty,0]$ est une partie fermée et bornée mais non compacte de l'espace métrique $(\mathbb{R},d')$.
3. Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{R},d')$ n'est pas complet.

Exercice 3 (7 points) : On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ (constitué des fonctions réelles continues sur $[0,1]$) de ses deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies par :

$$\|f\|_1 \ := \ \int_0^1 |f(t)|\,dt \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty \ := \ \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \qquad (\forall f \in E),$$

et on considère φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (E, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (E, \|\cdot\|_\infty) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = g \end{array} , \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rccc} g: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) := \int_0^{x/2} f(t)\, dt \end{array} .$$

1. Montrer que φ est continue et que l'on a : $|||\varphi||| \leqslant 1$.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E dont le terme général $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) est défini par :

$$f_n(x) \ := \ (1-x)^n \qquad (\forall x \in [0,1]).$$

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\varphi(f_n)\|_\infty$.

   (b) En déduire que l'on a précisément : $|||\varphi||| = 1$.

Interrogation de l'année 2016-2017

Durée : 1 heure

Barème sur 15

Proposée le 2 février 2017 par l'auteur

Exercice 1 (5 points) : Soient E un ensemble infini et p un point fixé de E. On considère τ la famille des parties O de E qui satisfont l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :

(i) $p \notin O$.

(ii) $p \in O$ et $\complement_E O$ est fini.

1. Montrer que τ est une topologie sur E.
2. On prend dans cette question $E = \mathbb{N}$ et $p = 0$.
   (a) Décrire soigneusement les ouverts et les fermés de l'espace topologique (E, τ).
   (b) Soient $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $B = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 2 (5 points) : Soit (E, τ) un espace topologique.

1. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) Tout singleton de E est un fermé.
   (ii) $\forall x, y \in E$, avec $x \neq y$, il existe un voisinage de x qui ne contient pas y.
2. En déduire que si E est séparé alors tout singleton de E est un fermé.

Exercice 3 (5 points) : Soit (E, d) un espace métrique et soit $d' : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, définie par $d' := \ln(1 + d)$.

1. Montrer que d' est une distance sur E.
2. Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes.
3. On prend dans cette question $E = \mathbb{R}$ et d sa distance usuelle.
   (a) Montrer que d et d' ne sont pas équivalentes.
   (b) Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{R}, d')$ est complet.

☞ : Pour l'exercice 3, vous pouvez utiliser l'inégalité « $\ln(1 + x) \leqslant x \quad (\forall x \geqslant 0)$ » en cas du besoin.

Examen de l'année 2016-2017

Durée : 2 heures

Barème sur 20

Proposé le 11 mars 2017 par l'auteur

Questions de cours (3 points) :

1. Citer les propriétés vues en cours des espaces vectoriels normés de dimension finie.
2. (a) Montrer brièvement que dans un espace vectoriel normé, toute partie compacte est un fermé borné.

   (b) Quelle est la condition nécessaire et suffisante que doit vérifier un espace vectoriel normé pour qu'on ait équivalence entre « une partie compacte » et « une partie fermée bornée ».

Exercice 1 (5 points) :
Soient X et Y deux espaces topologiques, avec Y **séparé** et soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications **continues**.

1. Montrer que l'ensemble
$$F := \{x \in X : \; f(x) = g(x)\}$$
est un **fermé** de X.
2. Soit $A \subset X$ une partie **dense** dans X.
— Montrer (en s'appuyant sur le résultat de la première question) que si f et g coïncident sur A alors elles coïncident sur X.

Exercice 2 (6 points) :
Soient (E, d) un espace métrique et $f : E \to \mathbb{R}$ une application **continue**, vérifiant :

$$|f(x) - f(y)| \; \geqslant \; d(x, y) \qquad (\forall x, y \in E) \qquad (I)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$F_n \; := \; \left\{x \in E : \; f(x) \leqslant \frac{1}{n}\right\}$$

et on suppose que ces parties F_n de E sont **toutes non vides**.

1. Montrer que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de parties **fermées emboitées** de E.
2. On suppose dans cette question que E est **complet** et que f est **positive** (i.e. $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in E$).

   (a) Montrer qu'on a : $\delta(F_n) \leqslant \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

   (b) En déduire qu'il existe un unique $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 0$.

3. On suppose dans cette question que E est **compact**.

   — Montrer qu'il existe $x_1 \in E$ tel que $f(x_1) \leqslant 0$.

Exercice 3 (6 points) :

Soit $E := \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On définit $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$N(f) \; := \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| + |f(0)| \qquad\qquad (\forall f \in E).$$

1. Montrer que N est une norme sur E.

2. Montrer qu'on a pour tout $f \in E$: $\|f\|_\infty \leqslant N(f)$.

   ☞ Utiliser le théorème des accroissements finis.

3. Montrer que N n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

4. Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & (E, N) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := \int_0^1 x^2 f'(x)\, dx \end{array}.$$

   (a) Montrer que φ est linéaire et continue.

   (b) Calculer $|||\varphi|||$.

Examen de rattrapage de l'année 2016-2017

Durée : 1 heure 30 minutes

Barème sur 20

Proposé le 16 septembre 2017 par l'auteur

Exercice 1 (8 points) :

Soit (X, τ) un espace topologique. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est considéré comme espace métrique (muni de sa distance usuelle).

1. Écrire soigneusement la définition de la continuité d'une application $h : X \to \mathbb{R}$ en un point $a \in X$ en utilisant la structure topologique de X et la structure métrique de $\mathbb{R}$.
2. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux applications **continues** et soient U et F les deux sous-ensembles de X définis par :

$$U := \{x \in X : \; f(x) < g(x)\},$$
$$F := \{x \in X : \; f(x) \leqslant g(x)\}.$$

   (a) Montrer que l'application $f - g : X \to \mathbb{R}$ est continue.

   (b) En déduire que U est un ouvert de X et que F est un fermé de X.

   (c) Montrer que $\overline{U} \subset F$.

   (d) Montrer, à l'aide d'un contre exemple, que l'égalité $\overline{U} = F$ n'a pas toujours lieu.

Exercice 2 (7 points) :

Soient (E, d) un espace métrique **compact** et $f : E \to E$ une application vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x, y \in E : \quad d(x, y) \leqslant d(f(x), f(y)) \qquad (\star)$$

Étant donné $a \in E$, on considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E, définie par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$

1. Justifier le fait que $(x_n)_n$ possède une sous-suite convergente de E. Pour la suite, on notera $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ cette sous-suite convergente de $(x_n)_n$ (où $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels).
2. Soit

$$\psi(n) := \varphi(n+1) - \varphi(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

   (a) Montrer que la suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers a.

(b) En déduire que $f(E)$ est dense dans E.

Exercice 3 (5 points) :

Dans ce qui suit, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni de sa norme $\|\cdot\|_1$, définie par :

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx \qquad (\forall f \in E).$$

Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & (E, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (E, \|\cdot\|_1) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}, \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rccl} \varphi(f) : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(f)(x) := f\left(\frac{x}{2}\right) \end{array}.$$

1. Montrer que φ est linéaire et continue sur E et que l'on a : $|||\varphi||| \leqslant 2$.
2. Montrer que l'on a précisément $|||\varphi||| = 2$.

Interrogation n°1 de l'année 2015-2016

Barème sur 15

Proposée par M^r Benmeziane

Exercice 1 (6 points) :
On munit l'ensemble $E :=]0, +\infty[$ de la topologie τ donnée par :

$$\tau \ := \ \left\{\varnothing; \ \ \theta_\alpha :=]\alpha, +\infty[, \alpha \geqslant 0\right\}.$$

1. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).
2. Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$\textbf{(i)}\ A =]0, 1[\ ; \qquad \textbf{(ii)}\ A = [1/2, +\infty[\ ; \qquad \textbf{(iii)}\ A = \mathbb{N}.$$

3. Montrer que l'espace topologique (E, τ) n'est pas séparé.

Exercice 2 (4 points) :
Soit (E, d) un espace métrique et soient A une partie de E et x un élément de E. Montrer l'équivalence suivante :

$$x \in \overline{A} \iff \forall r > 0 : \ B(x, r) \cap A \neq \varnothing.$$

Exercice 3 (5 points) :
Soit E un ensemble muni de deux distances équivalentes d_1 et d_2 et soit A une partie de E. On considère f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) := 2\, d_1(x, A) + 3\, d_2(x, A) \end{array},$$

où $\mathbb{R}$ est considéré comme un espace métrique (muni de sa distance usuelle).
— Montrer que f est uniformément continue.
☞ Vous pouvez montrer que f est lipschitzienne.

Interrogation n°2 de l'année 2015-2016

Barème sur 15

Proposée par M$^{\text{r}}$ Benmeziane

Exercice 1 (6 points) :

Soit (E, d) un espace métrique et soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E telles que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

1. Montrer que si la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy alors la suite $(y_n)_n$ est également de Cauchy.
2. Montrer que si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont toutes les deux convergentes alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Exercice 2 (5 points) :

On munit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ de la distance d définie par :

$$d(x, y) := |e^x - e^y| \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

— Étudier la complétude de l'espace métrique (E, d).

(*Indication supprimée* !).

Exercice 3 (4 points) :

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ dont nous rappelons les définitions :

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \int_0^1 |f(x)|\,dx \\ \|f\|_\infty &:= \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \end{aligned}\right. \qquad (\forall f \in E).$$

— Montrer que ces deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

(*Indication supprimée* !).

Examen de l'année 2015-2016

Durée : 2 heures

Barème sur 20

Proposé par Mr Benmeziane

Exercice 1 (5 points) :

On munit l'ensemble $E :=]2,4[$ de la topologie τ donnée par :

$$\tau \ := \ \big\{\theta_\alpha :=]3-\alpha, 3+\alpha[, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\big\}.$$

1. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E,τ).
2. Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$\textbf{(i)}\ A = \left]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right[\ ; \quad \textbf{(ii)}\ A = \{3\}\ ; \quad \textbf{(iii)}\ A = \left]2, \frac{5}{2}\right].$$

Exercice 2 (7 points) :

Soient (E,d) un espace métrique **compact** et $f : E \to E$ une application vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x, y \in E : \quad d(x,y) \ \leqslant \ d(f(x), f(y)).$$

Soient aussi a un élément de E et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E définie par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de Cauchy $\big($bien entendu, $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs$\big)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$\psi(n) \ := \ \varphi(n+1) - \varphi(n).$$

   (a) Montrer que la suite $(x_{\psi(n)})_n$ converge vers a.

   (b) En déduire que $f(E)$ est dense dans E.

Exercice 3 (8 points) :

Soient E un $\mathbb{R}$-**e.v.n** et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

Partie I : Montrer l'implication :

$$\varphi \text{ est continue} \ \Longrightarrow \ \operatorname{Ker}\varphi \text{ est un fermé de } E.$$

Partie II : Dans cette partie, on se propose de montrer l'implication inverse de l'implication précédente. Pour ce faire, on procède par l'absurde en supposant que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un fermé de E mais que φ n'est pas continue. Nous allons chercher donc une contradiction !

1. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E qui vérifie la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad |\varphi(x_n)| \; > \; n\|x_n\|.$$

Pour la suite, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$y_n \; := \; \frac{1}{\varphi(x_n)} \cdot x_n \quad \text{et} \quad z_n \; := \; y_1 - y_n.$$

2. Calculer : $\varphi(y_n)$; $\varphi(z_n)$; $\lim_{n\to+\infty} y_n$ et $\lim_{n\to+\infty} z_n$.
3. En déduire une contradiction, puis conclure.

Examen de remplacement de l'année 2015-2016

Durée : 2 heures

Barème sur 20

Proposé par M[r] Benmeziane

Exercice 1 (5 points) :

On munit l'ensemble $E :=]-2, 6[$ de la topologie τ donnée par :

$$\tau \ := \ \left\{\theta_\alpha :=]2-\alpha, 2+\alpha[, 0 \leqslant \alpha \leqslant 4\right\}.$$

1. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).
2. Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$\textbf{(i)}\ A =]0,4[\ ; \quad \textbf{(ii)}\ A = \{2\}\ ; \quad \textbf{(iii)}\ A =]-2,0]\,.$$

Exercice 2 (7 points) :

Soit (E, d) un espace métrique et soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux applications continues. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$F_n \ := \ \{x \in E : \ nf(x) + g(x) \leqslant 0\}\,.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie F_n de E est fermée.
2. Supposons dans cette question que :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & E \text{ est compact;} \\ \text{(ii)} & \forall n \in \mathbb{N} : \ F_n \neq \emptyset; \\ \text{(iii)} & \forall x \in E : \ f(x) \geqslant 0. \end{array}$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$F_{n+1} \ \subset \ F_n.$$

   (b) En déduire que l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est non vide.

   (c) Si $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, montrer qu'on a $f(x_0) = 0$.

Exercice 3 (8 points) :

Soient E un $\mathbb{R}$-**e.v.n** et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle.

1. Montrer l'implication :

$$\varphi \text{ est continue} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Ker} \varphi \text{ est un fermé de } E.$$

On se propose maintenant de montrer l'implication inverse. **Supposons donc pour toute la suite que $\operatorname{Ker}\varphi$ est une partie fermé de E** et montrons (à travers les questions qui vont suivre) que φ est continue.

2. Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que $\varphi(a) = 1$.
3. Montrer que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0_E$, on a $\lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n) = 0$.

   ☞ Raisonner par l'absurde et introduire $y_n := a - \frac{1}{\varphi(x_n)} x_n$ (pour certains $n \in \mathbb{N}$, bien choisis).
4. En déduire que φ est continue.

Interrogation n°1 de l'année 2014-2015

Barème sur 15

Proposée par M$^{\text{r}}$ Benmeziane

Exercice 1 (6 points) :

Soit $E := [0, 1[$ et τ la famille de parties de E, donnée par :

$$\tau := \left\{\theta_\alpha := [0, \alpha[, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\right\}.$$

1. Montrer que τ constitue une topologie sur E.
2. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).
3. Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$\textbf{(i)}\ A = \left[0, \frac{1}{2}\right] \ ; \quad \textbf{(ii)}\ A = \left\{\frac{2}{3}\right\} \ ; \quad \textbf{(iii)}\ A = \left[\frac{1}{2}, 1\right[.$$

4. Montrer que l'espace topologique (E, τ) n'est pas séparé.

Exercice 2 (3 points) :

Soient E, F et G trois espaces topologiques et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

— Montrer que si les applications f et g sont continues alors l'application composée $g \circ f$ est également continue.

Exercice 3 (3 points) :

Soient E un espace topologique et A une partie propre* et non vide de E.

— Montrer que si A est à la fois un ouvert et un fermé de E alors sa frontière est vide.

Exercice 4 (3 points) :

Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application continue et injective.

— Montrer que si F est séparé alors E l'est également.

---

*) Une partie propre de E veut dire une partie de E, autre E lui même.

Interrogation n$^\circ$2 de l'année 2014-2015

Barème sur 15

Proposée par M^r^ Benmeziane

Exercice 1 (5 points) :

Soit (E, d) un espace métrique et soient A une partie de E et x un point de E. Montrer que l'on a :

$$d(x, A) \; = \; d(x, \overline{A}).$$

Exercice 2 (5 points) :

Soit E un ensemble non vide, muni de deux distances d_1 et d_2 qui sont équivalentes. Montrer l'équivalence :

$$(E, d_1) \text{ est complet } \iff (E, d_2) \text{ est complet.}$$

Exercice 3 (5 points) :

Soit (E, d) un espace métrique complet et soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n := d(x_n, y_n)$.

— Montrer que la suite réelle $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

Examen de l'année 2014-2015

Durée : 2 heures

Barème sur 20

Proposé par M^r Benmeziane

Exercice 1 (5 points) :

Soit $E :=]-1, 1[$ et τ la famille de parties de E, donnée par :

$$\tau \ := \ \{\theta_\alpha :=]-\alpha, \alpha[, -1 \leqslant \alpha \leqslant 1\}.$$

1. Montrer que τ constitue une topologie sur E.
2. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).
3. Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$\textbf{(i)}\ A = \{0\}\ ; \quad \textbf{(ii)}\ A = \left[0, \frac{1}{2}\right[\ ; \quad \textbf{(iii)}\ A = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

Exercice 2 (7 points) :

Les parties I, II et III de cet exercice sont complètement indépendantes.

Partie I :

Soient $E :=]0, +\infty[$ et $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x, y) \ := \ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \qquad \left(\forall (x, y) \in E^2\right).$$

1. Montrer que d est une distance sur E.
2. Étudier la complétude de l'espace métrique (E, d).
   (*Indication supprimée* !).

Partie II :

Soient (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E.

— Montrer qu'on a équivalence entre :

(i) La suite $(x_n)_n$ est convergente.

(ii) La suite $(x_n)_n$ possède une sous-suite convergente.

Partie III :

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie compacte de E. Soit aussi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A, possédant **une unique** valeur d'adhérence $\ell \in E$.

— Montrer que $(a_n)_n$ converge vers ℓ.

Exercice 3 (8 points) :

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ (constitué des fonctions réelles continues sur $[0,1]$) de sa norme $\|\cdot\|_1$, définie par :

$$\|f\|_1 \ := \ \int_0^1 |f(t)|\, dt \qquad (\forall f \in E)$$

et on considère φ l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = g \end{array}, \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rccl} g : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) := \int_0^x f(t)\, dt \end{array}.$$

1. Montrer que φ est continue et que $|||\varphi||| \leqslant 1$.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de E dont le terme général $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est défini par :

$$f_n(x) \ := \ n e^{-nx} \qquad (\forall x \in [0,1]).$$

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\varphi(f_n)\|_1$.

   (b) En déduire que $|||\varphi||| = 1$.

Examen de remplacement de l'année 2014-2015

Durée : 2 heures

Barème sur 20

Proposé par M^r Benmeziane

Exercice 1 (5 points) :

Soit $E :=]-\infty, 0[$ et τ la famille de parties de E, donnée par :

$$\tau := \{\theta_\alpha :=]-\infty, \alpha[, \alpha \leqslant 0\}.$$

1. Montrer que τ constitue une topologie sur E.
2. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).
3. Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

(i) $A =]-\infty, -1[$; **(ii)** $A = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; **(iii)** $A = \mathbb{Z}_-^*$.

Exercice 2 (9 points) :

Les parties I, II et III de cet exercice sont complètement indépendantes.

Partie I :

Soient $E :=]0, +\infty[$ et $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x, y) := \left|\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln y}\right| \qquad \left(\forall (x, y) \in E^2\right).$$

1. Montrer que d est une distance sur E.
2. Étudier la complétude de l'espace métrique (E, d).
(*Indication supprimée* !).

Partie II :

Soient (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E.

— Montrer qu'on a équivalence entre :

(i) La suite $(x_n)_n$ est convergente.

(ii) La suite $(x_n)_n$ possède une sous-suite convergente.

Partie III :

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie compacte de E. Soit aussi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de A, possédant **une unique** valeur d'adhérence $\ell \in E$.

— Montrer que $(a_n)_n$ converge vers ℓ.

Exercice 3 (6 points) :

Dans ce qui suit, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ $\big($constitué des fonctions réelles qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,1]\big)$ est muni d'une norme quelconque, notée $\|\cdot\|$. Soit φ l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := f' \end{array}$$

et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E dont le terme général $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est défini par :

$$f_n(x) \ := \ e^{nx} \qquad\qquad (\forall x \in [0,1]).$$

1. Exprimer $\|\varphi(f_n)\|$ en fonction de $\|f_n\|$.
2. En déduire que φ n'est pas continue sur E.

Examen de rattrapage de l'année 2014-2015

Durée : 2 heures

Barème sur 20

Proposé par Mr Benmeziane

Exercice 1 (5 points) :

Soit $E :=]0,+\infty[$ et τ la famille de parties de E, donnée par :

$$\tau \ := \ \{E;\, \theta_\alpha :=]0,\alpha[, \alpha \geqslant 0\}.$$

1. Montrer que τ constitue une topologie sur E.
2. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E,τ).
3. Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$\textbf{(i)}\ A=]0,1[\ ; \qquad \textbf{(ii)}\ A=\left\{\frac{2}{3}\right\}\ ; \qquad \textbf{(iii)}\ A=\mathbb{N}^*.$$

Exercice 2 (6 points) :

Soient (E,d_E) et (F,d_F) deux espaces métriques et soient $f: E\to F$, $g: E\to F$ et $h: E\to F$ trois applications de E dans F.

1. Supposons que f et g sont continues et considérons A le sous-ensemble de E défini par :

$$A \ := \ \{x\in E:\ f(x)=g(x)\}.$$

— Montrer que A est dense dans E si et seulement si $A=E$.

2. Supposons qu'on ait pour toutes suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de E :

$$\lim_{n\to+\infty} d_E(x_n,y_n)=0 \ \Longrightarrow\ \lim_{n\to+\infty} d_F(h(x_n),h(y_n))=0.$$

— Montrer que h est uniformément continue.

Exercice 3 (9 points) :

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E:=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ (constitué des fonctions réelles continues sur $[0,1]$) de sa norme $\|\cdot\|_1$, définie par :

$$\|f\|_1 \ := \ \int_0^1 |f(t)|\,dt \qquad\qquad (\forall f\in E)$$

et on considère φ l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \varphi(f)=g \end{array}, \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rccl} g: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x):=\int_0^x f(t)\,dt \end{array}.$$

1. Montrer que φ est continue et que $|||\varphi||| \leqslant 1$.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de E dont le terme général $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est défini par :

$$f_n(x) \ := \ n(1-x)^{n-1} \qquad (\forall x \in [0,1]).$$

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\varphi(f_n)\|_1$.

   (b) En déduire la valeur précise de $|||\varphi|||$.

Bibliographie et Sitographie

Références en français

[1] E. Burroni. La topologie des espaces métriques, *Ellipses*, 2005.

[2] J. Chaillou & J. Henry. PROBLÈME DE TOPOLOGIE (avec des solutions détaillées), *Masson et C^ie^*, Paris, 1971.

[3] G. Choquet. Cours de topologie, *Broché*, 2000.

[4] G. Christol, A. Cot & C-M. Marle. Topologie, *Ellipses / Édition marketing S.A.*, 1997.

[5] J. Dixmier. Topologie Générale, *Presses Universitaires de France*, Paris, 1981.

[6] G. Flory. Topologie et Analyse, Tome 1 : Topologie (exercices avec solutions), *Broché*, 2017.

[7] B. Gostiaux. Cours de mathématiques spéciales, Tome 2 : Topologie, analyse réelle, *Presses Universitaires de France*, Paris, 1993.

[8] M. Hazi. Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier, *Office des Publications Universitaires*, 1993.

[9] ———. Introduction aux espaces normés, *Office des Publications Universitaires*, 1994.

[10] ———. Topologie au delà des travaux dirigés, *Office des Publications Universitaires*, 2006.

[11] S. Lipschutz. TOPOLOGIE, Cours et problèmes, *Broché*, 1999.

[12] H. Queffélec. TOPOLOGIE, cours et exercices corrigés, *Dunod*, Paris, 2007.

[13] E. Ramis, C. Deschamps & J. Odoux. Cours de mathématiques spéciales, Tome 3 : Topologie et éléments d'Analyse, *Masson*, Paris, 1991.

[14] Y. Sonntag. TOPOLOGIE et ANALYSE FONCTIONNELLE, Cours de licence avec 240 exercices et 30 problèmes corrigés, *Ellipses*, 1998.

[15] C. Wagschal. Topologie et Analyse Fonctionnelle, *Hermann Éditeurs*, Paris, 2012.

Références en arabe

[1] Ency-Education. http://univ.ency-education.com/ens-lessons-sc_exactes.html
(ce site contient plusieurs documentations en Sciences Exactes, en particulier en Topologie).

[2] Syriamath. https://www.syriamath.net/library
(ce site contient plusieurs livres intéressants de Mathématiques en arabe, dont quelques livres de Topologie).

[3] سيدني أ. موريس، طبولوجيا بدون دموع
ترجمة : عليا النّعيمات و جمال مصطفى
http://www.topologywithouttears.net/topbookarabic.pdf.

Références en anglais

[1] I.T. Adamson. A General Topology Workbook, *Birkhäuser*, Boston, 1996.

[2] S.G. Krantz. A guide to Topology, *Mathematical Association of America*, 2009.

[3] S.A. Morris. Topology without tears, http://www.topologywithouttears.net/.

[4] J. Munkres. Topology, *Pearson New International Edition*, 2014.

[5] G.F. Simmons. Introduction to Topology and Modern Analysis, *Robert E. Krieger Publishing Company, Inc*, Malabar, Florida, 1983.

[6] L.A. Steen & J.A. Seebach, Jr. Counterexamples in Topology, *Dover Publications, Inc*, New York, 1995.