

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1

Notions de Systèmes Asservis

1. Introduction	04
2. Chaîne de régulation automatique	04
2.1. Système en boucle ouverte	04
2.2. Système en boucle fermée	05
3. Modélisation	07
4. Caractéristiques dynamiques d'un système asservi	08
a. Entrées « types » (signaux canoniques) :	08
b. Performances d'un système asservi	09

Chapitre 2

Descriptions Mathématiques des Systèmes Physiques12

1. Classification des systèmes	12
2. Description des systèmes continus linéaires invariants (S.L.C.I.)	12
2.1. Définition	12
2.2. Systèmes linéaires	13
3. Représentation de SLCI	14
4. Résolution des équations différentielles	15
5. Transformée de Laplace :	15
5.1. Définition	15
5.2. Propriétés et théorèmes :	15
6. Fonction de Transfert.....	16
6.1. Définition	16
6.2. Equation caractéristique :	17
6.3. Théorème.....	18
6.4. Equation caractéristique d'un système de premier ordre :	18
6.5. Equation caractéristique d'un système de second ordre :	18

Chapitre 3

Schéma Bloc (Schéma Fonctionnel)19

1. Définition	19
2. Formalisme	19
2.1. Transformation des schémas blocs	20
2.2.1 Structure en boucle ouverte	20
2.2 Structure en boucle fermée	21
2.3. Application	22

Chapitre 4

Graphe De Fluence (ou De Transfert)	28
1. Définitions	28
2. Réalisation des graphes	29
3. Règle de Mason	29

Chapitre 5

Système de 1^{er} Ordre	32
Définition	32
1. Réponse d'un système de 1 ^{er} ordre à quelques signaux canoniques	32
1.1. Réponse à un échelon	32
1.2. Réponse à une impulsion $e(t) = \delta(t) = 1$ pour $t = 0 \Rightarrow$ $y(t) = \frac{kE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$	33
2.3. Applications	34
2. Système de 1 ^{er} ordre généralisé	36
2.1. Définition.....	36
3.2. Exercice	37
4. Réponse indicielle	37

Chapitre 6

Système de Second Ordre	40
1. Définition	40
2. Paramètres	40
3. Transformée de Laplace	40
4. Fonction de transfert et équation caractéristique	40
4.1. Fonction de transfert	40
4.2. Equation caractéristique	40
5. Réponse indicielle d'un système de second ordre	41
6. Placement des pôles	45
7. Dépassement et temps de pic ($0 < m < 1$)	46
7.1. Dépassement	46
7.2. Temps de pic.....	46
7.3. Allures	46
8. Temps de stabilisation	47

Chapitre 7

Etude Harmonique des Systèmes Asservis Elémentaires	50
1. Introduction	50
2. Système de 1 ^{er} ordre	52
3. Système de 1 ^{er} ordre généralisé	54
3.1. Représentations de Bode pour un système de 1 ^{er} ordre généralisé	55
3.2. Application :	56
4. Système de second degré	58
* Allures	59
* Diagrammes de Bode, Black et Nyquist pour un système de 2 ^{ème} pour m variables	60

Chapitre 8

Analyse et Synthèse des Systèmes Asservis Linéaires par la Méthode Temporelle ...	62
1. Généralités	62
1.1. Rappel	62
1.2. But de l'entrée temporelle	62
2. Stabilité	62
1.1. Condition de stabilité :	63
1.2. Critère de Routh :	63
3. Rapidité d'un système asservi.....	67
3.1. Définition :	67
3.2. Rappel sur le système de 2 ^{ème} ordre	68
3.2.1. Critère algébrique d'amortissement : Critère de Naslin	70
3.2.2. Application	71
4. Précision d'un système asservi :	71
4.1. Système à retour unitaire	72
4.2. Calcul de $\varepsilon(\infty)$ pour différents systèmes	73
4.2.1. Système à 2 entrées	73
4.2.2. Système à retour non unitaire :	74

Chapitre 9

Etude Harmonique des Systèmes d'Ordre élevé (n>2)	75
1. Introduction	75
2. Critères géométriques	75
2.1. Critère de Nyquist.....	75
* Critère de Rivers sur le plan de Nyquist	75
• Degré de stabilité : Marge de gain et marge de phase	78
2.1.2. Application au plan de Bode	79
2.1.3. Application au plan de Black	79

Chapitre 1

Notions de Systèmes Asservis

1. Introduction

Pour l'automaticien un système a pour processus correspond a un ensemble de relations causales entre des grandeurs d'entrées (causes) et des grandeurs de sortie (les effets). On représente un système technique et ses interconnexions par des schémas blocs.



Fig.1.1: Schéma bloc élémentaire

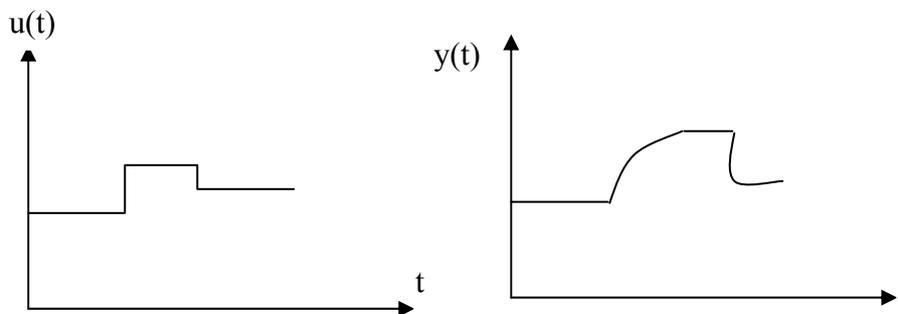


Fig.1.2: Allures d'entrée et de sortie.

2. Chaîne de régulation automatique

2.1. Système en boucle ouverte

Une cascade de sous système constitue une boucle ouverte et une boucle fermée comporte souvent :

- un actionneur
- un processus à contrôler
- un capteur

La boucle ouverte concernant le pilotage d'un navire est représenté sur la figure 1.2

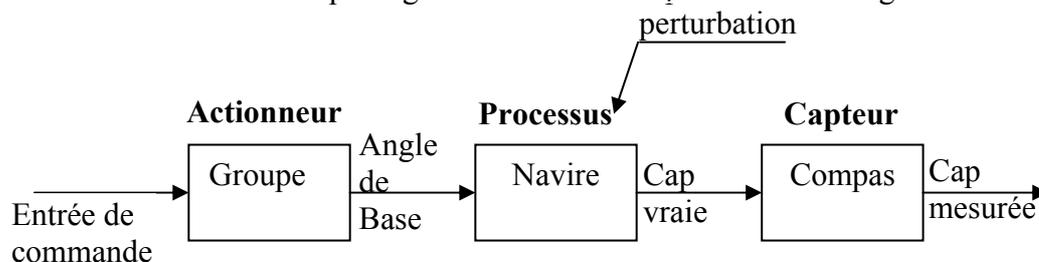


Fig.1.3 : Schéma d'une boucle ouverte

⇒ On remarque pour le système en boucle ouverte que le signal de commande (entrée) est indépendant du signal de sortie.

2.2. Système en boucle fermée

a . Définition

Un objectif majeur de l'automatique est la conception des lois de commande destinées à élaborer le signal de commande $u(t)$ et ceci pour maîtriser un certain nombre de sorties de grandeurs physiques :

- Le courant ou la tension de sortie d'une source.
 - La vitesse de rotation d'un moteur.
 - La température d'un local.
 - Le pilotage d'un navire.
- Ces lois sont mises en œuvre par des systèmes concrets analogiques numériques représentés par des schémas blocs.
- Un bloc de commande a pour sortie le signal de commande $u(t)$ il a pour entrée d'une part le signal de consigne (référence) d'autre part le signal de sortie mesuré $y(t)$.
- Le système global constitué du processus à contrôler et de système de commande constitue un système en boucle fermée.

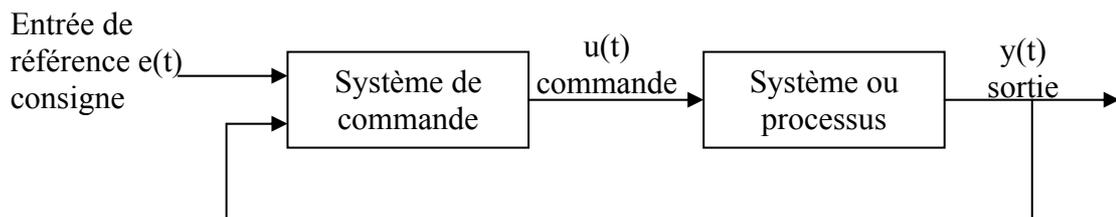


Fig.1.4 : Système en boucle fermée

On remarque pour les systèmes en boucle fermée que le signal de commande dépend d'une façon ou d'une autre du signal de sortie. Donc il existe un bouclage entre la sortie et la prise de décision « **contre réaction** ».

b. Organisation fonctionnelle d'un système bouclé

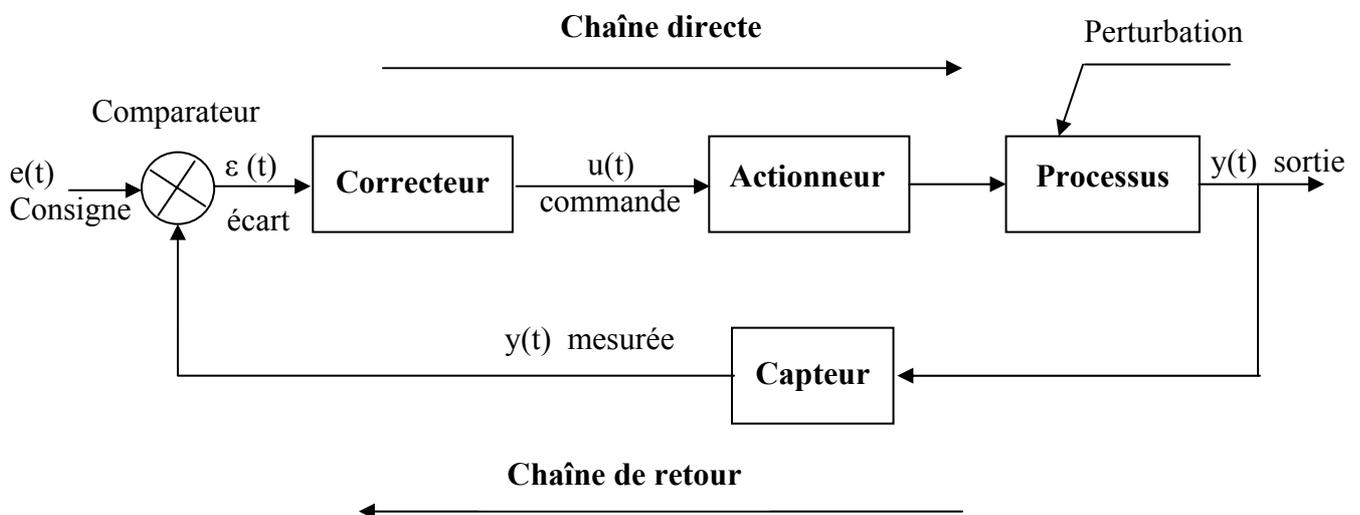


Fig.1.5 : Système en boucle fermée

c. Principaux éléments d'une chaîne d'asservissement

- Partie commande ou régulateur : le régulateur e compose d'un comparateur qui détermine l'écart entre la consigne et la sortie mesurée et d'un correcteur élabore à partir d'un signal d'erreur $\varepsilon(t)$ l'ordre de commande de $u(t)$: C'est l'organe intelligent du système.
- Actionneur : c'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité
- Capteur : c'est l'organe qui prélève sur le système la grandeur asservie et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur.

d. Informations

- **Entrée consigne** : La consigne et l'entrée de référence, c'est la grandeur régulante du système.
- **Sortie régulée (asservie)** : la sortie régulée représente le phénomène que doit réguler. C'est la grandeur physique pour laquelle la sortie a été conçue.
- **Perturbation** : on appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie un système régulé doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment de la perturbation.
- **Ecart (erreur)** : c'est la différence entre la consigne et la sortie. Cette mesure ne peut être réalisée que sur les grandeurs comparables. On la réalisera donc en général entre la consigne et la mesure de sortie

e. Régulation et asservissement

- **Régulation** : On appelle régulation un système asservi(en BF) qui doit maintenir constante la sortie (conformément à la consigne et indépendamment des perturbations (ex :climatiseur, régulation de température...))
- **Asservissement** : On appelle asservissement un système asservi dont la sortie dépend (doit suivre) le plus fidèlement la consigne (consigne variable) (position : asservissement de position).

f. Buts et motivations d'un système asservi

Un système automatique est un système capable d'effectuer plusieurs opérations sans intervention de l'homme, et qui ne peuvent lui être confié pour les raisons suivantes :

- Précision
 - Caractère pénible des tâches à effectuer dans certains environnements.
 - Complexité.
 - Répétitivité
- L'automatisation est également souvent une réponse de besoin d'amélioration de la productivité d'un produit.

3. Modélisation

Un système qui est souvent représenté par son schéma physique peut le plus souvent être composé en des parties plus simples, ayant un nombre réduit de signaux d'entrée et de sortie.

On fait appel alors aux connaissances physiques, électromécaniques, chimiques ou bien d'autres branches scientifiques pour écrire les équations qui régissent entre les entrées (causes) et les sorties (effets) : c'est le schéma fonctionnel.

Après avoir décrit chaque élément, composant, partie ou sous système on aboutit à un système d'équations algébriques ou différentielles : Modèle mathématique.

a. Schéma physique

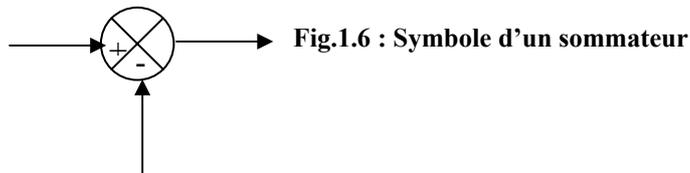
Le schéma physique est un des représentations qui nous permettent d'analyser le système. Ce type de schéma utilise la normalisation de chaque technologie.

- **Schéma électrique** : circuit RLC.
- **Schéma mécanique** : masse, ressort, amortisseur...

b. Schéma fonctionnel :

Dans le schéma fonctionnel on représente les fonctions par des blocs et les grandeurs physiques par des flèches qui les relient.

Lorsque la grandeur physique est obtenue par une sommation, on la représente par le symbole (+) et par un cercle.



c. Modèle mathématique :

Pour réaliser une commande automatique il est nécessaire d'établir les relations existantes entre les entrées et les sorties. L'ensemble des relations s'appelle **modèle mathématique d'un système**.

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + v_S(t)$$

$$\text{Résistance : } u_R(t) = R i(t); \quad \text{Bobine : } u_L(t) = L \frac{di}{dt}; \quad \text{condensateur : } v_{S(t)} = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv_S}{dt} \\ u_R(t) &= RC \frac{dv_S(t)}{dt} \\ u_L(t) &= L \frac{d^2 v_S(t)}{dt^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow e(t) = v_S(t) + RC \frac{dv_S}{dt} + L \frac{d^2 v_S(t)}{dt^2}$$

4. Caractéristiques dynamiques d'un système asservi

Les caractéristiques dynamiques permettent de quantifier les performances d'un système asservi. Elles sont appréciées à partir de la réponse des systèmes des entrées types.

b. Entrées « types » (signaux canoniques) :

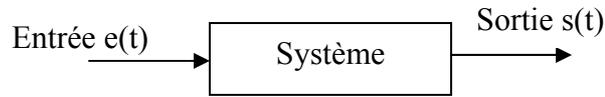


Fig.1.7 : Modélisation d'un système.

Fonctions	Equations	Réponse s(t)	Allures
Dirac ou impulsion (percussion)	$e(t) = E \delta(t)$ tel que : $\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$	Réponse impulsionnelle	
échelon de position	$e(t) = E u(t)$ tel que: $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$	Réponse indicielle	
échelon de vitesse (rampe)	$e(t) = at u(t)$	Réponse de vitesse	
échelon d'accélération	$e(t) = \frac{a}{2} t^2 u(t)$	Réponse d'accélération	
sinusoïdale	$e(t) = a \sin(\omega t)$	Réponse sinusoïdale	

Tab.1 : Signaux canoniques

Remarque : si $E = 1$ l'échelon est dit unitaire.

b. Performances d'un système asservi :

✓ Précision :

La précision quantifie l'erreur lorsque l'équilibre est atteint avec $e(t)$ et $s(t)$ sont de même nature, autrement l'erreur se trouve à la sortie du comparateur.

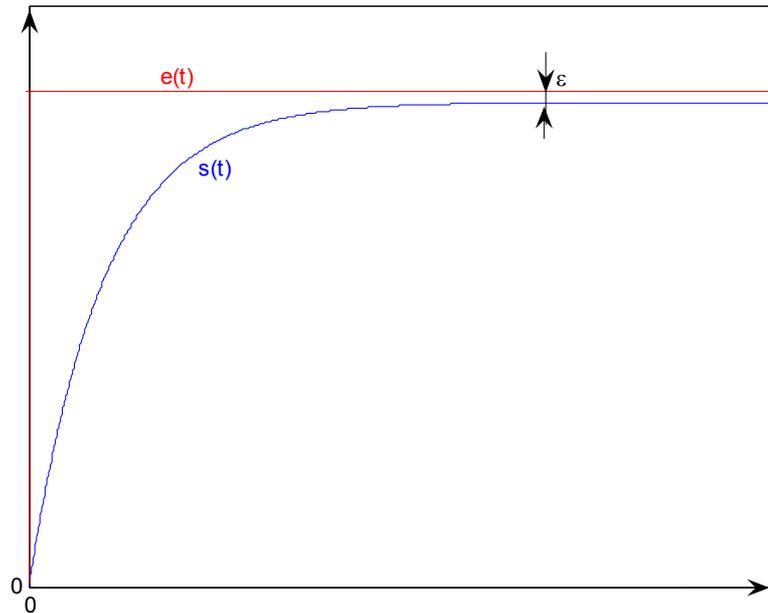


Fig.1.8

⇒ Un système est précis si la sortie suit l'entrée à toutes circonstances.

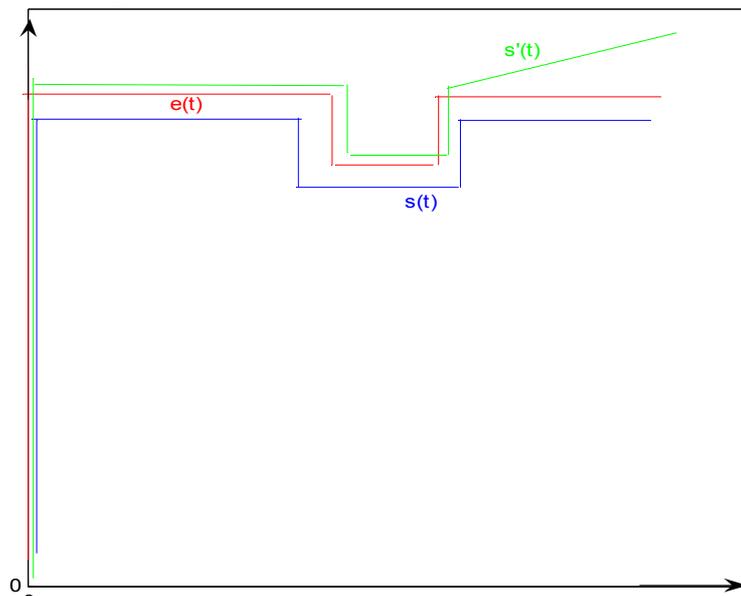


Fig.1.9

Le signal $s(t)$: précis

Le signal $s'(t)$: s n'est pas précis

✓ **Rapidité :**

La rapidité quantifie le temps pour atteindre l'équilibre on l'appelle **le temps de réponse**.

Le temps mis par la réponse du système pour atteindre à moins de 5%, la valeur finale est retenue comme critère de rapidité t_s à $\pm 5\%$.

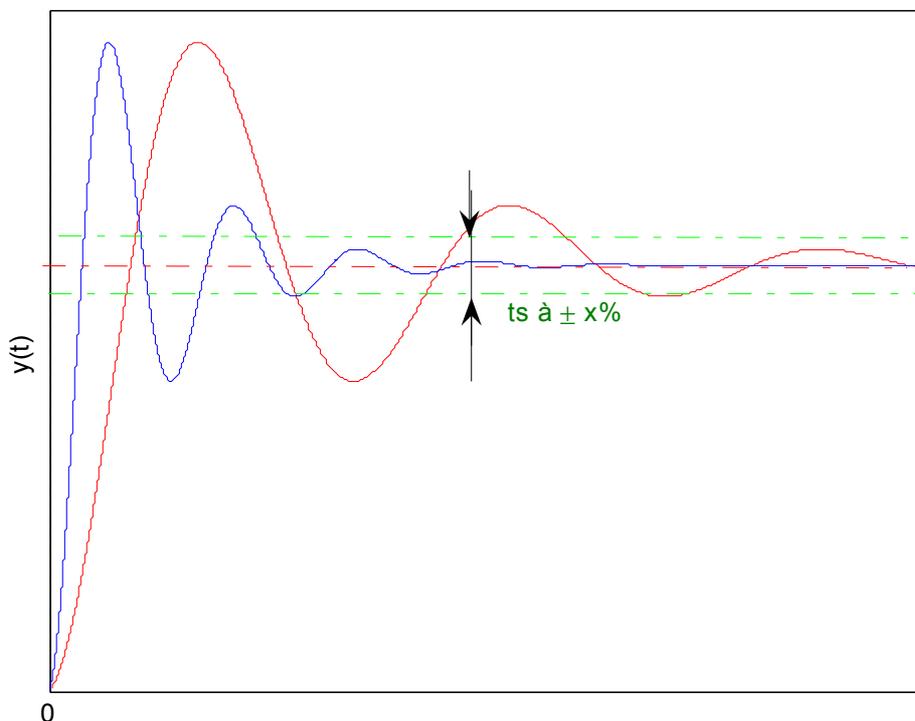


Fig.1.10

Le signal $s(t)$ est plus rapide que le signal $s'(t)$.

On dit alors qu'un système a une rapidité satisfaisante s'il se stabilise à son niveau constant en un temps jugé satisfaisant.

✓ **Stabilité :**

- La stabilité d'un système est la capacité de converger vers une valeur constante si l'entrée est constante.
- Ce système tend à revenir à son état d'équilibre permettant quand on lui applique une perturbation de courte durée.

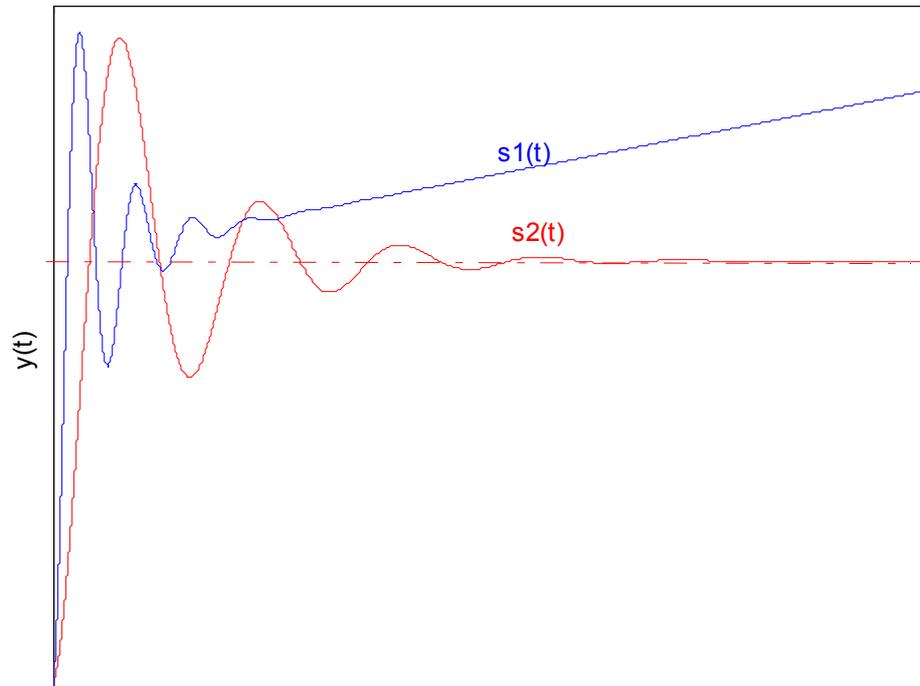


Fig.1.11

Le signal $s_1(t)$: instable

Le signal $s_2(t)$: stable

Chapitre 2

Descriptions Mathématiques des Systèmes Physiques

1. Classification des systèmes

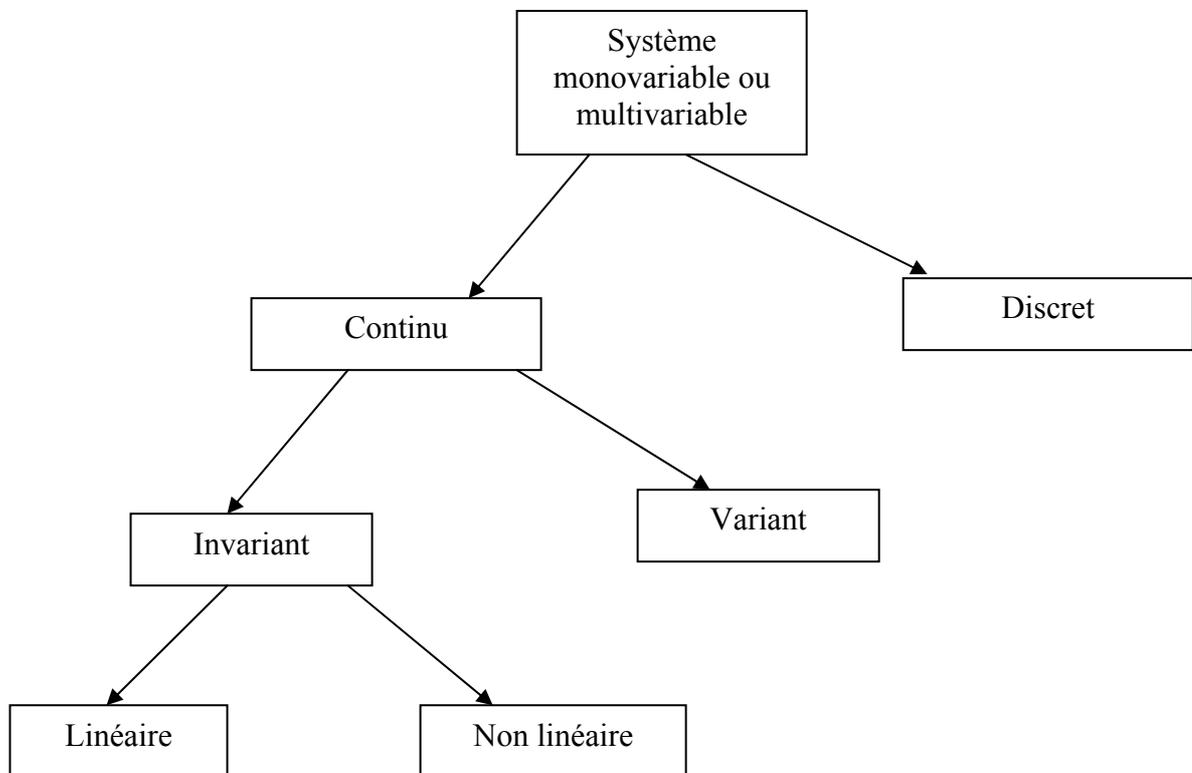


Fig.2.1 : Classifications des systèmes.

Les systèmes qui nous intéressent sont les systèmes continus linéaires invariants.

2. Description des systèmes continus linéaires invariants (S.L.C.I.)

2.1. Définition

a. Système continu

Si les signaux d'entrées et de sorties sont des fonctions continues

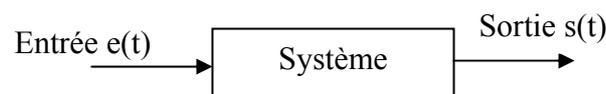


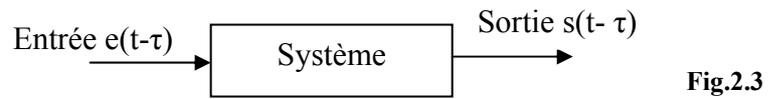
Fig.2.2

b. Système causal

Un système est dit causal si le signal d'entrée est nul pour un intervalle de temps négatif.

c. Système invariant :

On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques de son comportement ne varient pas au cours du temps.



2.2. Systèmes linéaires

* **Au sens mathématique :** $t \rightarrow f(t)$

$$f(\lambda_1 t + \lambda_2 t) = \lambda_1 f(t) + \lambda_2 f(t)$$

* **Au sens physique**

Une fonction est linéaire au sens physique si elle est linéaire au sens mathématique, plus l'invariance temporelle.

* **Linéarité mathématique**



• *Principe de superposition*

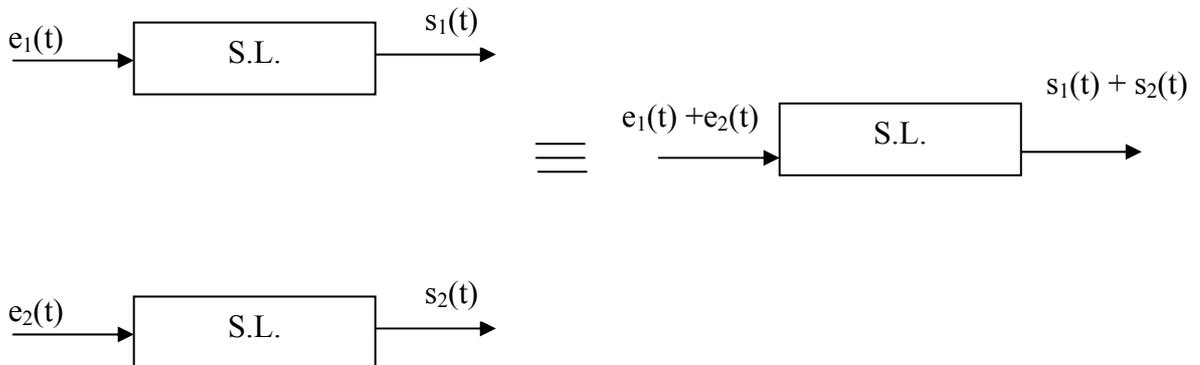


Fig.2.4

• *Principe de proportionnalité*



Fig.2.5

*** Invariance temporelle**

$$e(t - \tau) \rightarrow S.L. \rightarrow s(t - \tau)$$

$$e(t + \tau) \rightarrow S.L. \rightarrow s(t + \tau)$$

Exemple : circuit R, L, C.

3. Représentation de SLCI

On considère un système physique représenté par son schéma bloc. Ce système est linéaire lorsqu'il est décrit par une équation différentielle à coefficients constants.

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^ns(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2e(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^me(t)}{dt^m}$$

Pour les systèmes réels il faut que $m < n$

Exemples

1) circuit électrique :

$$e(t) = Ri(t) + s(t)$$

$$e(t) = RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) : \text{Système linéaire (S.L.)}$$

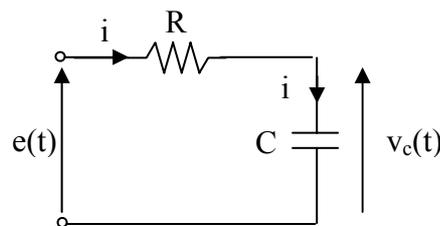


Fig.2.6 : Circuit RC.

2) système mécanique

$$F_e = Kx + M \frac{dx}{dt} + f \frac{d^2x}{dt^2} : \text{Système linéaire (S.L.)}$$

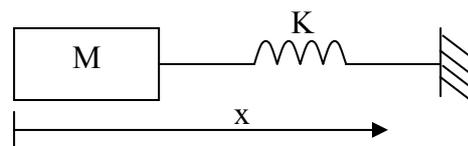


Fig.2.7 : Système électromécanique.

3) système électromécanique :

$$C_M = C_r + f \frac{d\theta}{dt} + J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

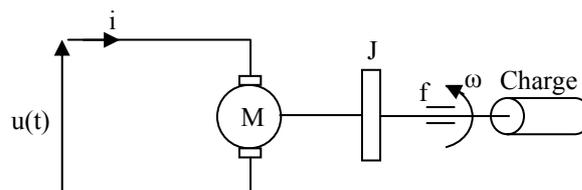


Fig.2.8 : Système électromécanique.

4. Résolution des équations différentielles

Pour résoudre une équation différentielle on utilise :

➤ **Méthode classique**

Equation différentielle :

- ✓ Equation différentielle sans second membre : réponse équation libre $s_1(t)$
- ✓ Solution particulière : réponse forcée $s_2(t)$

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t).$$

Solution homogène : On pose $e(t) = 0$, on pose aussi $\frac{de(t)}{dt} = 0$

Solution particulière : on pose $s(t)$ de la même manière que $e(t)$.

➤ **Méthode de la transformée de Laplace**

Cette méthode est la plus simple et la plus utilisée.

5. Transformée de Laplace :

5.1. Définition

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$ est :

$$TL[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Cette transformation permet de passer du domaine temporel au domaine de Laplace.

5.2. Propriétés et théorèmes :

<i>Propriétés et théorèmes</i>	
Théorème de la valeur initiale	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0^+)$
Théorème de la valeur finale	$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(+\infty)$
Théorème du retard temporel	$TL[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} F(p)$
Théorème de l'avance	$TL[e^{-\alpha t} f(t)] = F(p+\alpha)$
Linéarité	$TL[a_1 f_1 + a_2 f_2] = a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$
Dérivation	$TL[f^n(t)] = p^n F(p) - p^{(n-1)} f(0^+) - p^{(n-2)} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$
Sans conditions initiales	$TL[f^n(t)] = p^n F(p)$
L'intégration	$TL\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(p)}{p}$

Tab.2.1

Exemple : Circuit RC (voir figure 2.6)

$$e(t) = Ri(t) + s(t)$$

$$e(t) = RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

$$E(p) = RC p S(p) + S(p)$$

$$E(p) = (RC p + 1)S(p)$$

→ **Application :**

Donner :

- équation différentielle,
- entrée temporelle,
- condition initiale nulle

* **Objectif :**

Recherche de la réponse temporelle du système.

* **Démarche :**

- calcul de la fonction de transfert H(p)
- calcul de l'entrée dans le domaine de Laplace E(p)
- calcul de la sortie dans le domaine de Laplace Y(p)
- calcul de la sortie temporelle en appliquant la transformée de Laplace inverse y(t)

6. Fonction de Transfert

6.1. Définition

Soit le système décrit par l'équation différentielle suivante :

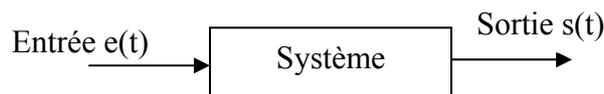


Fig.2.9

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

La transformée de Laplace (si les conditions initiales sont nulles)

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_2 p^2 S(p) + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_2 p^2 E(p) + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

$$(a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0) E(p)$$

$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = H(p)}$$

L'équation de transfert est dite aussi équation d'isomorphe qui est défini par le quotient des grandeurs de sortie et d'entrée :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

Remarque : La fonction de transfert caractérise la dynamique du système. Dans un système physique réel le degré de D(p), n, est supérieur au degré de N(p), m.

6.2. Equation caractéristique :

$$D(p) = a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

- Les solutions de l'équation caractéristique $D(p) = 0$ sont appelées les **racines** ou les **pôles** du système.
- Les solutions de l'équation $N(p) = 0$ sont appelées les **zéros** du système.

$$\begin{aligned} * \quad D(p) = 0 &\Leftrightarrow a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{i=0}^n (p - p_i) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad N(p) = 0 &\Leftrightarrow b_m p^m + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - z_m)(p - z_{m-1}) \dots (p - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{j=0}^m (p - z_j) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{\prod_{j=0}^m (p - z_j)}{\prod_{i=0}^n (p - p_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\prod_{j=0}^m (p - z_j)}{\prod_{i=0}^n (p - p_i)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S(p) = \frac{\prod_{j=0}^m (p - z_j)}{\prod_{i=0}^n (p - p_i)} E(p)}$$

Remarques

- Les « p_i » peuvent être des réels ou des complexes ;
- Si les « p_i » sont réels différents $\Rightarrow s(t) = \sum_{i=0}^n C_i e^{p_i t} \Rightarrow \underline{\lim} s(t) = \underline{\lim} \sum_{i=0}^n C_i e^{p_i t}$
 - Si les $p_i < 0 \Rightarrow s(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow +\infty$: système **stable**.
 - Si les $p_i > 0 \Rightarrow s(t) \rightarrow +\infty$ si $t \rightarrow +\infty$: système **instable**.

6.3. Théorème

Un système est dit stable si les parties réelles de ces pôles sont à partie réelle négatives.

6.4. Equation caractéristique d'un système de premier ordre :

Un système est dit de 1^{er} ordre s'il est décrit par une équation différentielle de type :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = ke(t) \Rightarrow \tau p Y(p) + Y(p) = kE(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}$$

K : gain statique

τ : constante du temps.

6.5. Equation caractéristique d'un système de second ordre :

Un système est dit de second ordre s'il est décrit par une équation différentielle de second ordre.

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = k\omega_0^2 e(t)$$

k : gain statique $k = s(\infty) / e(\infty)$

m : coefficient d'amortissement

ω_0 : pulsation propre (naturelle).

$$p^2 S(p) + 2m\omega_0 p S(p) + \omega_0^2 S(p) = k\omega_0^2 E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Chapitre 3

Schéma Bloc (Schéma Fonctionnel)

3. Définition

Un schéma fonctionnel est une représentation simplifiée d'un processus mettant en évidence les différentes fonctions mise en œuvre.

Par exemple dans le cas d'un système asservi ; on peut faire la description de la figure suivante.

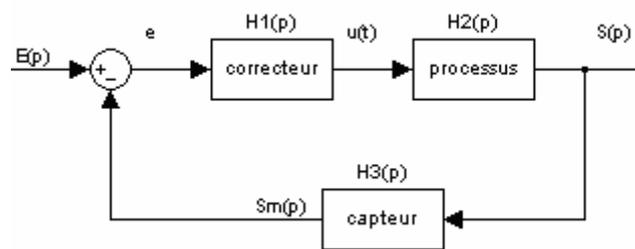


Fig.3.1 : Schéma de base d'un système asservi

Chaque élément du schéma de base est caractérisé par une transmittance $H_i(p)$

Dans le but de réaliser l'analyse et la synthèse d'un système asservi ; il apparaît intéressant de représenter chaque bloc fonctionnel par sa transmittance (son modèle mathématique).

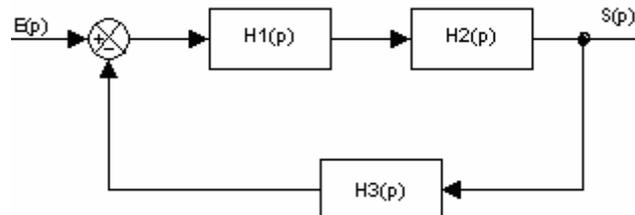


Fig. 3.2 : Schéma fonctionnel d'un système asservi.

4. Formalisme

On représente le système d'équations original par un schéma dont le formalisme est le suivant :

- les branches représentent les variables
- les blocs représentent les transmittances.
- les sommateurs additionnent algébriquement les variables.
- les jonctions servent à prélever les valeurs des variables. $S(p) = e_1(p) + e_2(p) + e_3(p)$

- **Bloc :**

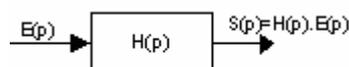


Fig. 3.3 : Schéma d'un bloc

- Sommateur:

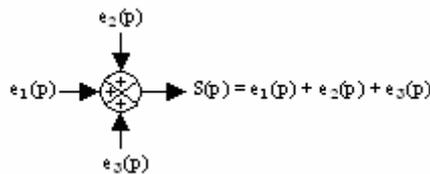


Fig. 3.4 : Sommateur

- Comparateur

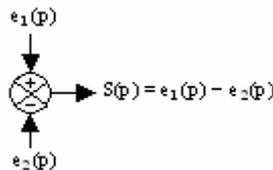


Fig. 3.5 : Comparateur

- Capteur :

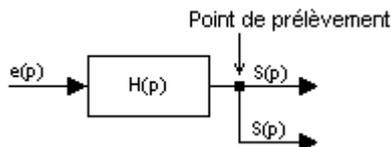


Fig. 3.6 : Capteur

2.2. Transformation des schémas blocs

Il peut être intéressant de simplifier les schémas fonctionnels en regroupant les fonctions mises en œuvre (les transmittances).

2.2.1 Structure en boucle ouverte

* Transmittance en série



Fig. 3.7 : Transmittance en série

$$\left. \begin{aligned} U(p) &= H_1(p) \cdot E(p) \\ S(p) &= H_2(p) \cdot U(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot E(p)$$

* Transmittance en parallèle

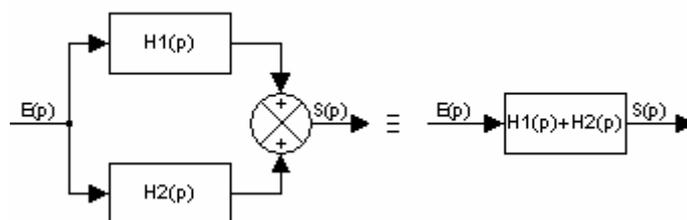


Fig. 3.8 : Transmittance en parallèle.

2.2. Structure en boucle fermée

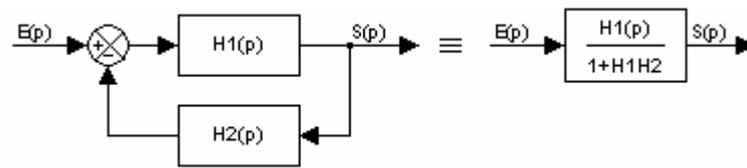


Fig. 3.9 : Transmittance en boucle fermée.

$$\left. \begin{aligned} S(p) &= H_1(p) \cdot \varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) &= E(p) - H_2(p) \cdot S(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(p) = H_1(p) \cdot [E(p) - H_2(p) \cdot S(p)]$$

$$\Rightarrow S(p) \cdot [1 + H_1(p) \cdot H_2(p)] = H_1(p) \cdot E(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{H_1(p)}{[1 + H_1(p) \cdot H_2(p)]} E(p)$$

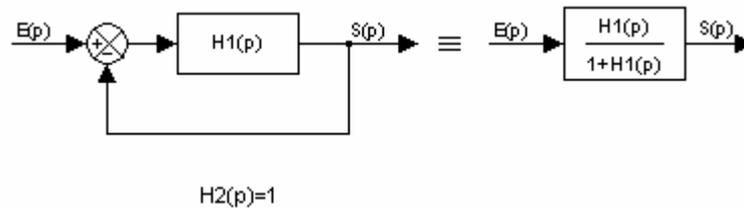


Fig. 3.10 : Transmittance équivalente en boucle fermée.

* Déplacement des points de prélèvement

- En amont d'un bloc

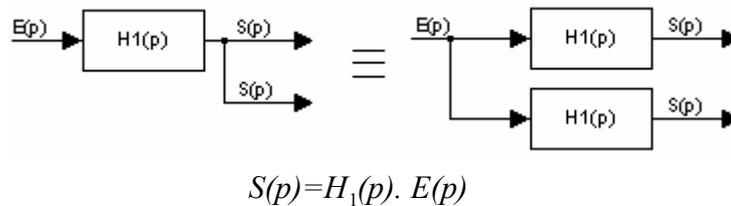


Fig. 3.11

- En aval d'un bloc

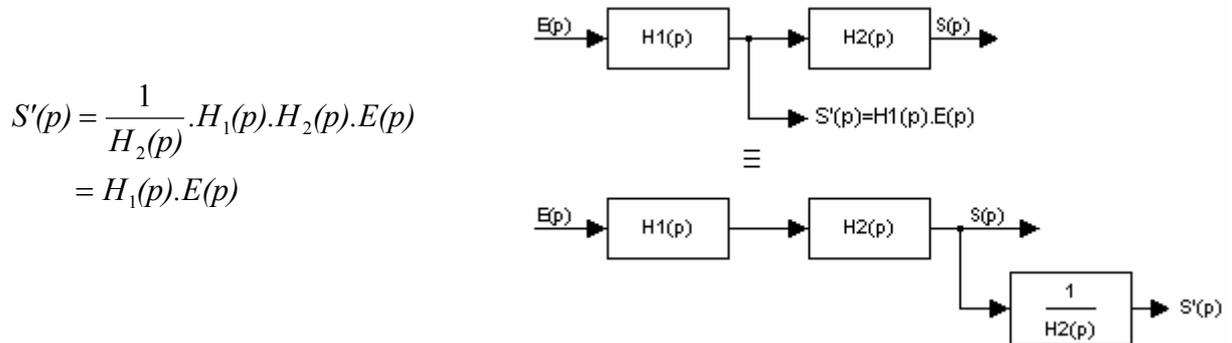


Fig. 3.12

* Déplacement des sommateurs

- Redispotion des sommateurs



Fig. 3.13

$$S(p) = U_1 \pm U_2 \pm U_3 = U_1 \pm U_3 \pm U_2$$

- Déplacement d'un sommateur en aval d'un bloc

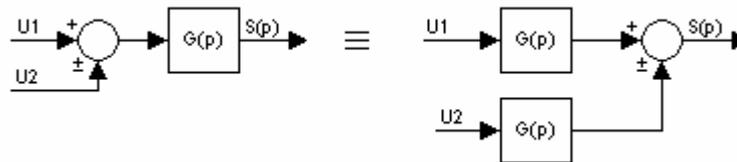


Fig. 3.14

$$S(p) = G(p)[U_1(p) \pm U_2(p)] = G(p)U_1(p) \pm G(p)U_2(p)$$

- Déplacement d'un sommateur en amont d'un bloc

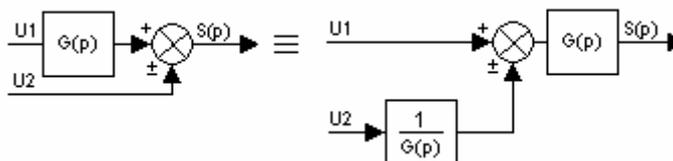


Fig. 3.15

$$\begin{aligned}
 S(p) &= G(p)[U_1(p) \pm U_2'(p)] \\
 S(p) &= G(p)U_1(p) \pm U_2(p) &= G(p)U_1(p) \pm G(p)\left[U_2(p) \cdot \frac{1}{G(p)}\right] \\
 & &= G(p)U_1(p) \pm U_2(p)
 \end{aligned}$$

2.4. Application

Chercher les fonctions de transfert des schémas blocs suivants en utilisant les règles de réduction des boucles.

- Boucles concentriques

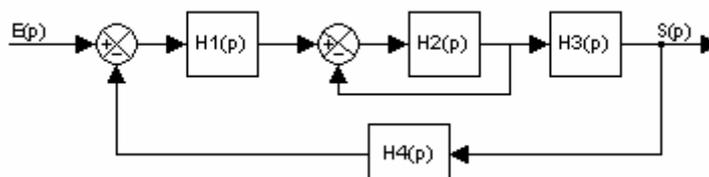


Fig. 3.16

• Boucles imbriquées

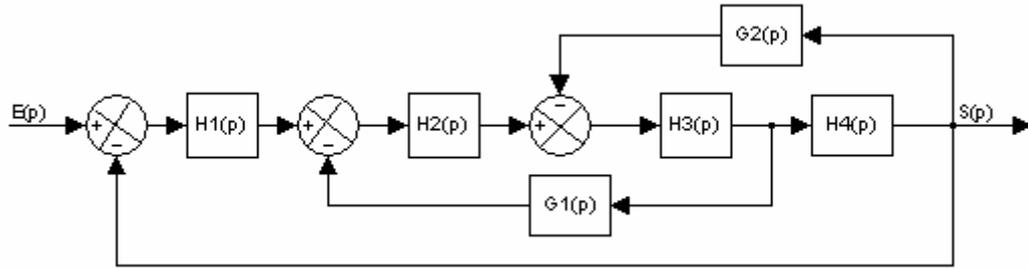


Fig. 3.17

Correction

1.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

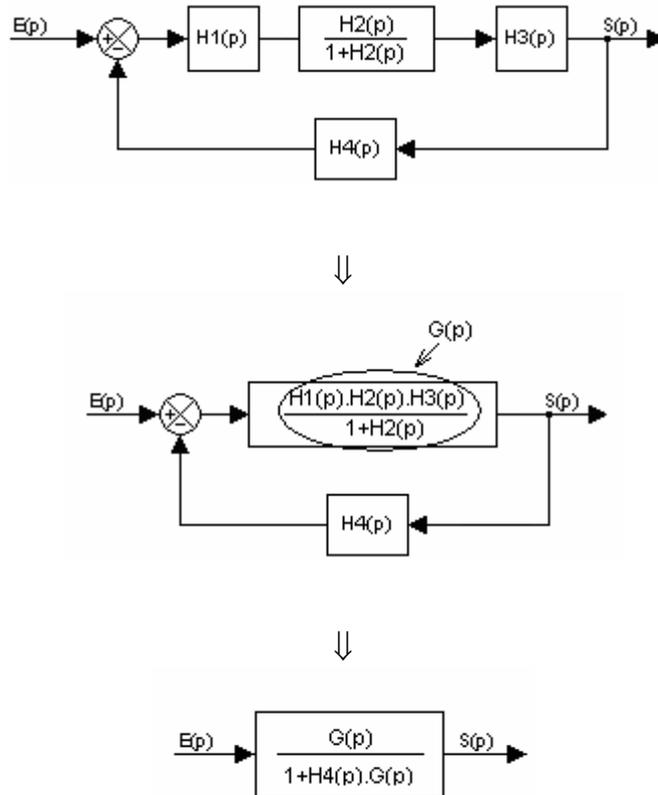


Fig. 3.18

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_2(p)}}{1+H_4(p) \cdot \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_2(p)}} \Rightarrow H(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_2(p)+H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$$

2.

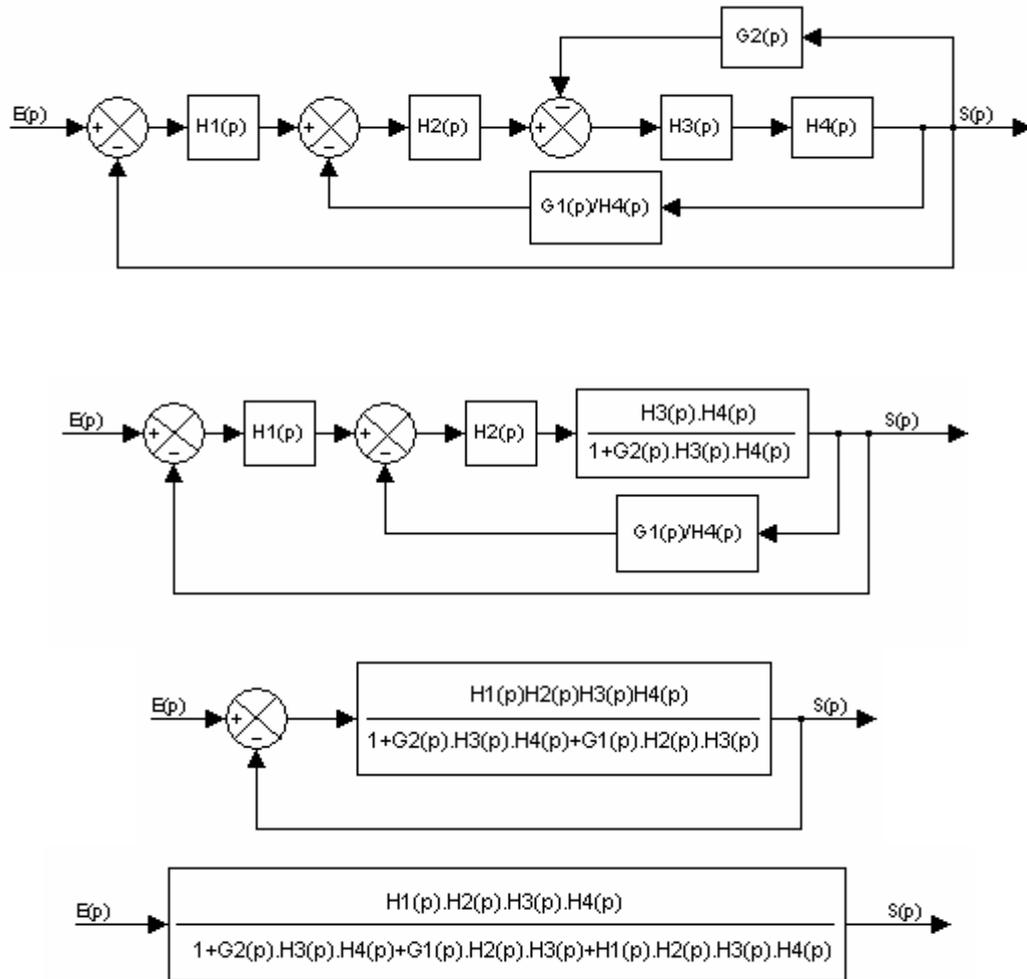


Fig. 3.19

$$H(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}{1 + G_2(p)H_3(p)H_4(p) + G_1(p)H_2(p)H_3(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$$

Exercice 1

1. Calculer la fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte de chaque schéma bloc.

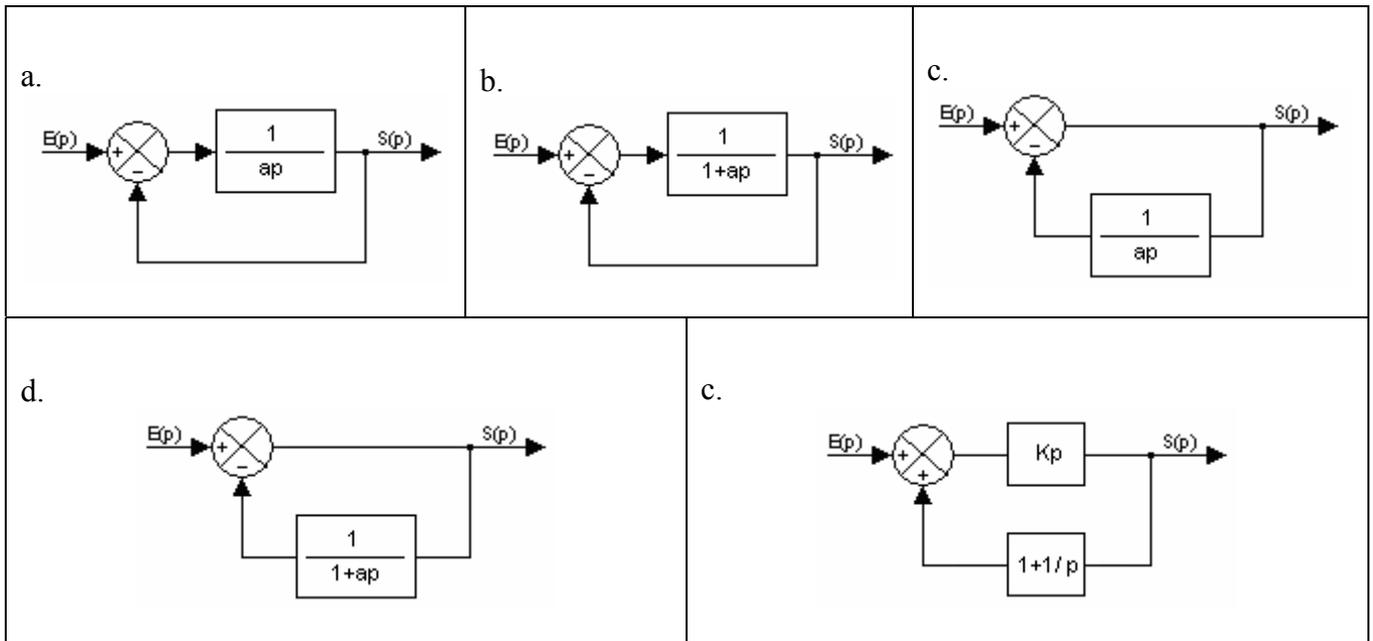


Fig. 3.20

2. Calculer $H(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée de chaque schéma bloc.

Correction

Posons $T(p)$ et $H(p)$ respectivement les fonctions de transferts en boucle ouverte et boucle fermée des schémas fonctionnels.

<p>a. $\begin{cases} T(p) = \frac{1}{ap} \\ H(p) = \frac{1/ap}{1+1/ap} = \frac{1}{ap+1} \end{cases}$</p>	<p>b. $\begin{cases} T(p) = \frac{1}{1+ap} \\ H(p) = \frac{1}{2+ap} \end{cases}$</p>	<p>c. $\begin{cases} T(p) = \frac{1}{ap} \\ H(p) = \frac{1}{1+1/ap} = \frac{ap}{1+ap} \end{cases}$</p>
<p>d. $\begin{cases} T(p) = \frac{1}{1+ap} \\ H(p) = \frac{1}{1+1/(1+ap)} = \frac{1+ap}{2+ap} \end{cases}$</p>	<p>e. $\begin{cases} T(p) = kp(1+1/p) = k(p+1) \\ H(p) = \frac{kp}{1-kp(1+1/p)} = \frac{kp}{1-k(p+1)} \end{cases}$</p>	

Fig. 3.21

Exercice 2

Soit le schéma suivant :

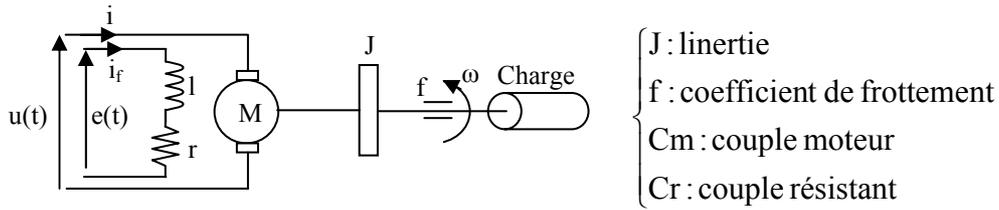


Fig. 3.22 : Système mécanique.

1. Donner le schéma fonctionnel du système.
2. Calculer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$

Correction

1. Schéma fonctionnel :

Equations électriques

$$\begin{cases} U = Ri + L \frac{di}{dt} + E \\ E = k\Omega \\ C_m = ki \end{cases}$$

Equation mécanique

$$C_m = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + C_r \Rightarrow C_m = J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega + C_r$$

$$* U = Ri + L \frac{di}{dt} + E \Rightarrow U(p) = (R + Lp)I(p) + E(p) \Rightarrow I(p) = \frac{U(p) - E(p)}{R + Lp}$$

$$* C_m = J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega + C_r \Rightarrow C_m(p) = (Jp + f)\Omega(p) + C_r \Rightarrow \Omega(p) = \frac{C_m(p) - C_r}{Jp + f}$$

$$* E = k\Omega \Rightarrow E(p) = k\Omega(p)$$

Le schéma fonctionnel est alors le suivant :

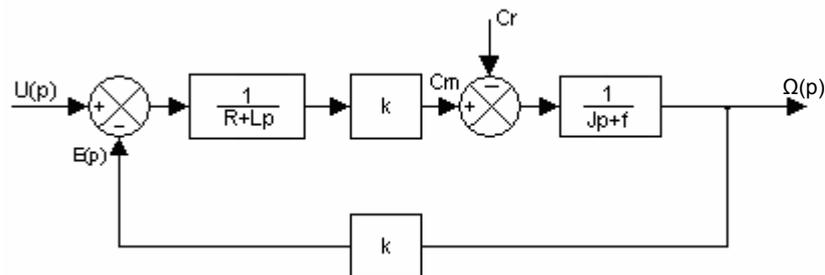


Fig. 3.23

2. Fonction de transfert : $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$

Posons $\left. \begin{aligned} H_1(p) &= \frac{\Omega(p)}{U(p)} \\ H_2(p) &= \frac{\Omega(p)}{C_r(p)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Omega(p) = H_1(p)U(p) + H_2(p)C_r(p)$

* $H_1(p) = ?$

$$H_1(p) = \left. \frac{\Omega(p)}{U(p)} \right|_{C_r(p)=0}$$

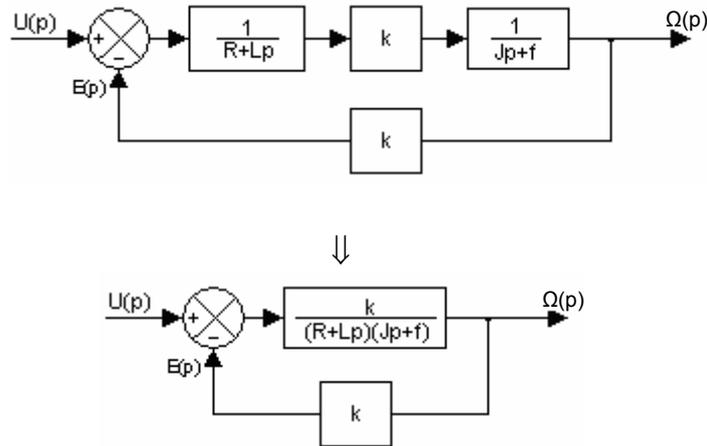


Fig. 3.24

$$H_1(p) = \frac{k^2}{k^2 + (R + Lp)(Jp + f)}$$

* $H_2(p) = ?$

$$H_2(p) = \left. \frac{\Omega(p)}{C_r(p)} \right|_{U(p)=0}$$

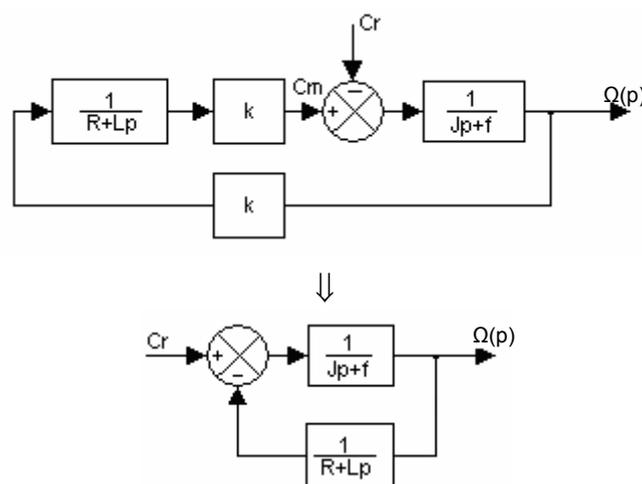


Fig. 3.25

$$H_2(p) = \frac{R + Lp}{k^2 + (R + Lp)(Jp + f)}$$

Chapitre 4

Graphe De Fluence (ou De Transfert)

1. Définitions

- Un graphe de transfert ou de fluence qui permet de simplifier l'écriture et la mise en équation des processus lorsque le nombre de variables augmente.
- Un graphe de transfert est constitué d'un ensemble de nœuds reliés entre eux par des branches orientées.
 - Les nœuds représentent les variables du système.
 - Chaque branche est affectée d'un coefficient correspondant à la transmittance qui relie entre deux nœuds (variables).

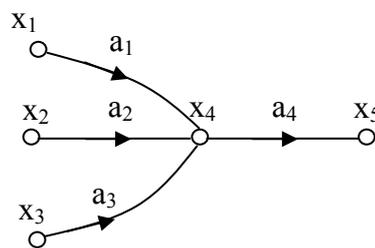


Fig.4.1 : Graphe de fluence.

Le graphe de la figure 4.1, appelé: graphe de fluence, est équivalent aux équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} x_4 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ x_5 = a_4x_4 = a_4(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) \end{cases}$$

- Un nœud auquel arrive plusieurs branches est appelé : puit (nœud secondaire).
Un nœud à partir duquel peuvent partir plusieurs branches est appelé : nœud source.

Exemples : dans la figure 4.1 :

- x_1, x_2, x_3 : nœuds sources
- x_5 : nœud puit

- Chaîne directe : est une liaison entre 2 variables réalisée en suivant les sens des flèches et en passant une seule fois par chaque nœud.

→ La transmittance d'une chaîne directe est le produit des transmittances rencontrées en les parcourant.

$$x_5 = a_1a_2a_3a_4x_1 \Rightarrow T = \frac{x_5}{x_1} = a_1a_2a_3a_4$$

- Boucle est un parcours suivant les flèches qui partant d'un nœud revient à ce même nœud sans passer 2 fois par le même nœud.

→ La transmittance d'une boucle est le produit des transmittances rencontrées lors de son parcours.

Exemple

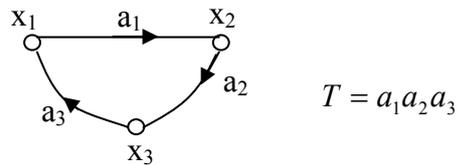


Fig.4.2 : Graphe de fluence.

4. Réalisation des graphes

- Transformations élémentaires

	$\begin{cases} x_2 = a_1 x_1 \\ x_3 = a_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = a_1 a_2 x_1$
	$x_2 = ax_1 + bx_1 = (a + b)x_1$
	$\begin{cases} x_3 = ax_2 + bx_1 \\ x_4 = cx_3 = acx_2 + bcx_1 \end{cases}$
	$\begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 = b(ax_1 + cx_3) = bax_1 + bcx_3 \end{cases}$ $\Rightarrow x_3(1 - bc) = abx_1$ $\Rightarrow x_3 = \frac{ab}{(1 - bc)} x_1$

Tab.4.1 : Transformations élémentaires.

5. Règle de Mason

La transmittance d'un graphe de transfert d'entrée x_e et de sortie x_s est déterminée comme suit :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i \Delta_i}{\Delta}$$

Δ : déterminant du graphe donné

$$\Delta = 1 - \sum B_i + \sum B_i B_j - \sum B_i B_j B_k + \dots$$

B_i : transmittance de la boucle n°i (B_i)

$\sum B_i B_j$: somme des produits des transmittances des boucles disjointes 2 à 2

$\sum B_i B_j B_k$: somme des produits des transmittances des boucles disjointes 3 à 3

N : nombre des parcours directs de l'entrée x_e à la sortie x_s avec un nœud ne doit être traversé qu'une seule fois.

P_i : La transmittance du parcours direct n°i, obtenu en faisant le produit des transmittances des boucles du parcours i.

Δ_i : déterminant du graphe obtenu en supprimant tous les nœuds traversés par le parcours i.

Remarque : A chaque parcours i correspond un Δ_i .

Exercices d'application

1.

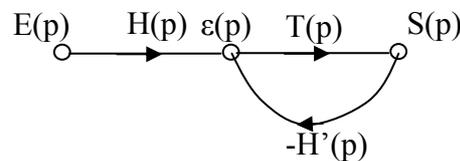


Fig.43

- Nombre de boucle = 1

$$B_1 = -T(p)H'(p)$$

- $\Delta = 1 - B_1 = 1 + T(p)H'(p)$

- Nombre de parcours = 1

$$P_1 = H(p)T(p)$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{T(p)H(p)}{1 + T(p)H'(p)}$$

3. Soit le schéma électrique suivant :

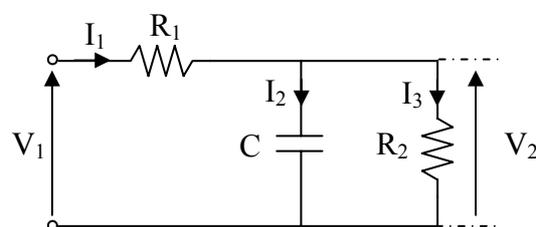


Fig.4.4 : Circuit électrique.

1/ Mettre le système en équations.

2/ Représenter le système par un graphe de transfert.

3/ Déterminer la transmittance $H(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)}$

Correction

$$1/ I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1} \Rightarrow I_1(p) = \frac{1}{R_1} [V_1(p) - V_2(p)]$$

$$V_2 = \frac{1}{C} \int i_2 dt \Rightarrow V_2(p) = \frac{1}{Cp} I_2(p)$$

$$I_2 = I_1 - \frac{V_2}{R_2} \Rightarrow I_2(p) = I_1(p) - \frac{V_2(p)}{R_2}$$

2/

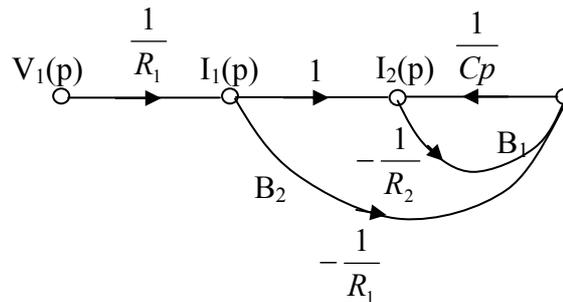


Fig.4.5

3/

- Nombre de boucle = 2

$$B_1 = -\frac{1}{R_2 Cp} ; B_2 = -\frac{1}{R_1 Cp}$$

- $\Delta = 1 - (B_1 + B_2) = 1 + \frac{1}{R_2 Cp} + \frac{1}{R_1 Cp}$

- Nombre de parcours = 1

$$P_1 = \frac{1}{R_1 Cp} ; \Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{\frac{1}{R_1 Cp}}{1 + \frac{1}{R_2 Cp} + \frac{1}{R_1 Cp}} = \frac{R_2 Cp}{R_1 R_2 C^2 p^2 + (R_1 + R_2) Cp}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{R_2}{R_1 R_2 Cp + (R_1 + R_2)}$$

Chapitre 5

Système de 1^{er} Ordre

1. Définition

Un système est dit de 1^{er} ordre s'il est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = ke(t) \Rightarrow \tau pY(p) + Y(p) = kE(p) \Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}}$$

K : gain statique

τ : constante du temps.

3. Réponse d'un système de 1^{er} ordre à quelques signaux canoniques

3.1. Réponse à un échelon

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow Y(p) = \frac{k}{1 + \tau p} E(p)$$

$$E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Y(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)} \quad \text{donc} \quad \boxed{y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

* si $t \rightarrow 0$; $y(t) \rightarrow 0$

** si $t \rightarrow \infty$; $y(t) \rightarrow k$

$k = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ Pour $e(t) = 1u(t)$

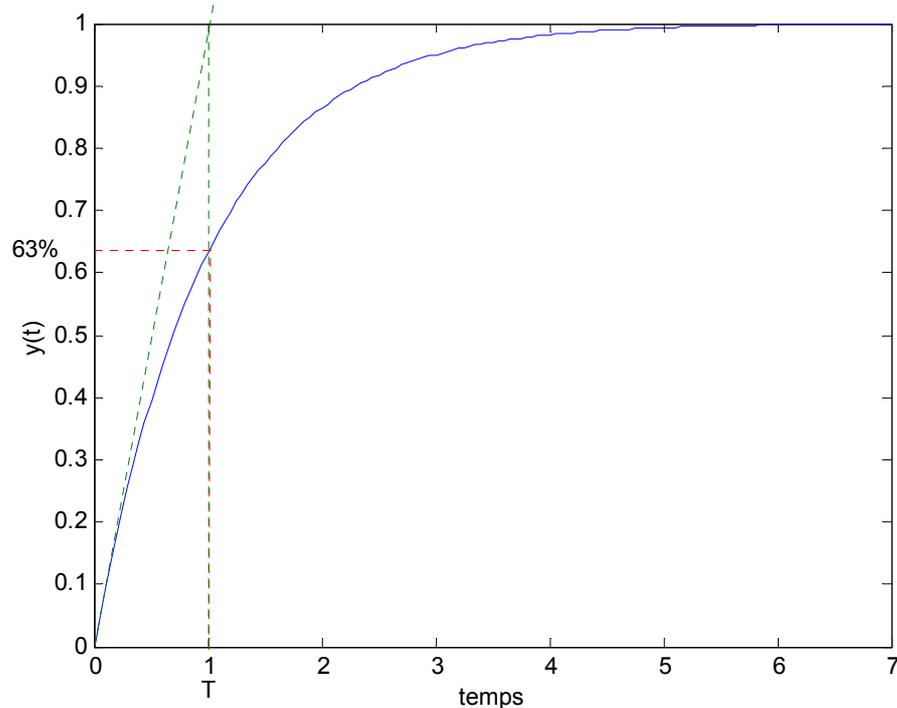


Fig.5.1 : Réponse indicielle d'un système de 1^{er} ordre (KE=1).

$$*** \quad e(t) = Eu(t) \Rightarrow Y(p) = \frac{kE}{p(1+\tau p)} \Rightarrow \boxed{y(t) = kE(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

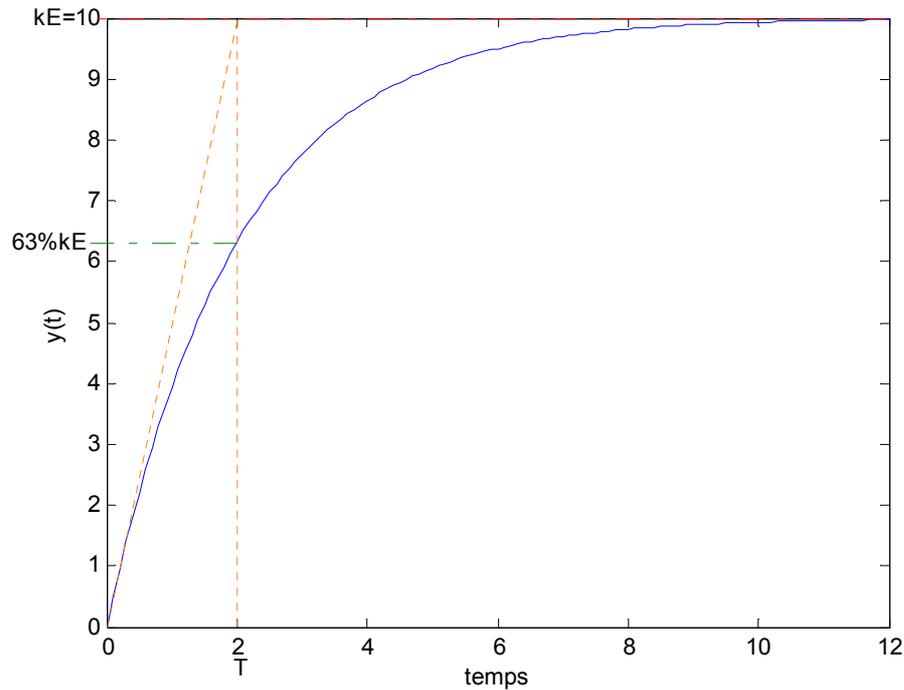


Fig.5.2 : Réponse indicielle d'un système de 1^{er} ordre (KE=10).

$$\boxed{y(\infty) = kE = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p)}$$

3.2. Réponse à une impulsion $e(t) = \delta(t) = 1$ pour $t = 0$

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k}{1+\tau p} \Rightarrow Y(p) = \frac{k}{1+\tau p} E(p)$$

$$E(p) = 1 \Rightarrow Y(p) = \frac{k}{1+\tau p} = \frac{k}{\tau} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\tau} + p} \right) \quad \text{donc} \quad \boxed{y(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

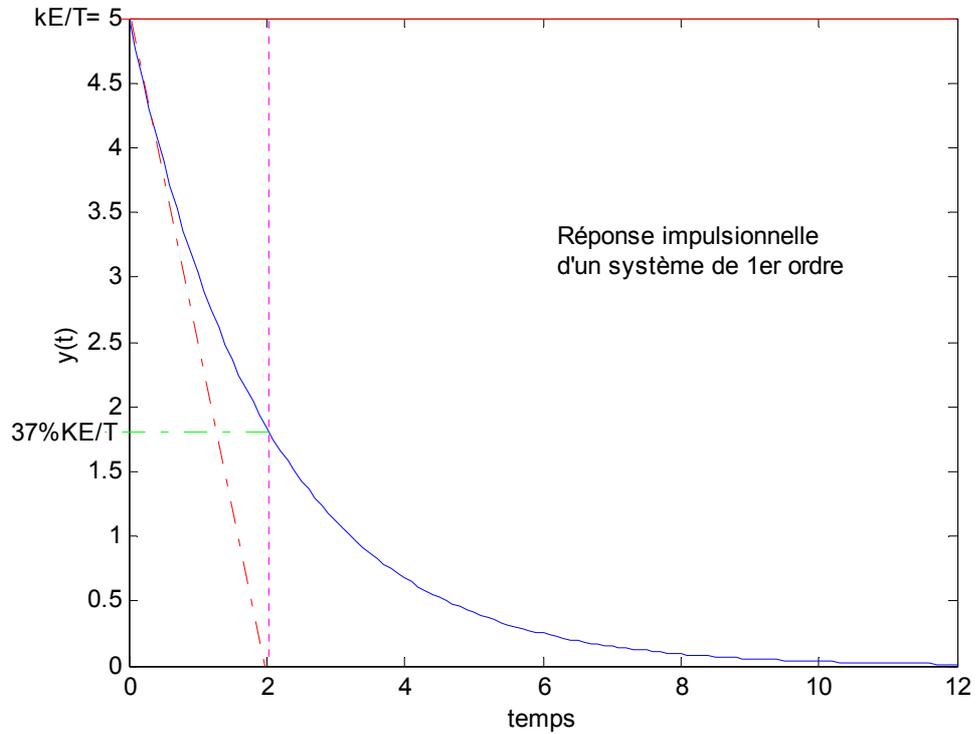


Fig.5.3 : Réponse impulsionnelle d'un système de 1^{er} ordre (KE=10).

* si $t \rightarrow 0$; $y(t) \rightarrow \frac{k}{\tau}$

** si $t \rightarrow \infty$; $y(t) \rightarrow 0$

*** $\delta(t) = E \Rightarrow Y(p) = \frac{kE}{1 + \tau p} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{kE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$

2.3. Applications

Exercice 1

Soit le montage RC suivant :

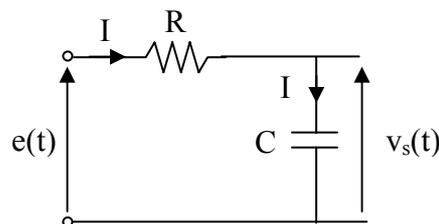


Fig.5.4 : Circuit RC série.

1. Déterminer $H(p) = \frac{V_s(p)}{E(p)}$
2. Dédire la nature du système ainsi que ses paramètres caractéristiques en fonction de R et C.
3. Pour $e(t) = 10u(t)$, $R = 100\Omega$ et $C = 1\mu F$; calculer et tracer $v_s(t)$.

Correction

$$1. e(t) = Ri(t) + v_s(t)$$

$$e(t) = RC \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) \Rightarrow E(p) = RC V_s(p) + V_s(p)$$

$$\text{Donc } H(p) = \frac{V_s(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

2. C'est un système de 1^{er} ordre avec $k=1$ et $\tau = RC$

$$3. V_s(p) = \frac{1}{1 + RCp} E(p) \text{ avec } E(p) = \frac{10}{p}; \tau = RC = 100 \times 10^{-6} = 10^{-4} \text{ s}$$

$$V_s(p) = \frac{10}{p(1 + 10^{-4}p)} \Rightarrow v_s(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{10^{-4}}}) \Rightarrow \boxed{v_s(t) = 10(1 - e^{-10^4 t})}$$

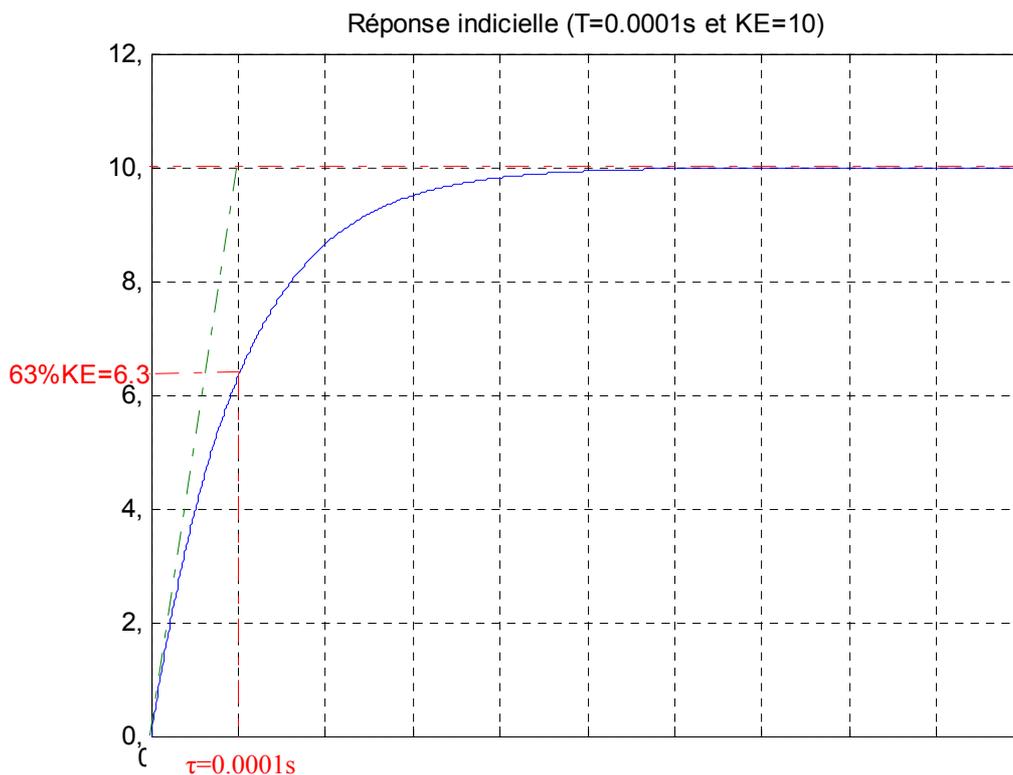


Fig.5.5 : Réponse indicielle (KE=10).

Exercice 2

1. Soit le montage RL suivant :

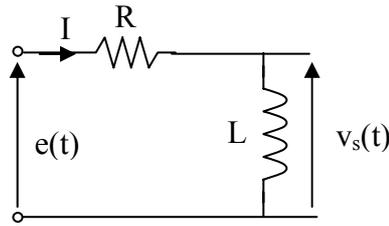


Fig.5.6 : Circuit RL série.

2. Déterminer $H(p) = \frac{V_s(p)}{E(p)}$

3. Représenter $v_s(t)$ pour $e(t) = 2u(t)$, $R = 100\Omega$ et $L = 1mH$

Correction

1. $e(t) = Ri(t) + v_s(t)$

$$v_s(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int v_s(t) dt$$

$$e(t) = \frac{R}{L} \int v_s(t) dt + v_s(t) \Rightarrow E(p) = \frac{R}{Lp} V_s(p) + V_s(p)$$

$$\Rightarrow E(p) = \left(\frac{R}{Lp} + 1 \right) V_s(p)$$

$$\Rightarrow \frac{V_s(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Lp}} = \frac{\frac{L}{R} p}{1 + \frac{L}{R} p}$$

$$\text{Donc } H(p) = \frac{V_s(p)}{E(p)} = \frac{\frac{L}{R} p}{1 + \frac{L}{R} p} \text{ avec } k=1 \text{ et } \tau_1 = \frac{L}{R} \text{ et } \tau_2 = \frac{L}{R}.$$

4. Système de 1^{er} ordre généralisé**4.1. Définition**

Un système de 1^{er} ordre généralisé est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\tau_2 \frac{dy}{dt} + y(t) = k \left[\tau_1 \frac{de(t)}{dt} + e(t) \right]$$

$$\Rightarrow \tau_2 p Y(p) + Y(p) = k [\tau_1 p E(p) + E(p)]$$

$$\Rightarrow Y(p) [\tau_2 p + 1] = k E(p) [\tau_1 p + 1]$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = k \left(\frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_2 p} \right)$$

Soit $\tau_1 = \alpha \tau_2$; alors $H(p) = k \left(\frac{1 + \alpha \tau_2 p}{1 + \tau_2 p} \right)$

3.2. Exercice

Déterminer et représenter la réponse à un échelon de vitesse (rampe) d'un système de 1^{er} ordre dont la fonction de transfert est : $H(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$.

5. Réponse indicielle

$$Y(p) = k \frac{1 + \alpha \tau_2 p}{1 + \tau_2 p} E(p)$$

$$Y(p) = k \frac{1 + \alpha \tau_2 p}{1 + \tau_2 p} \frac{E_0}{p} \Rightarrow Y(p) = \frac{kE_0}{p} + \frac{(\alpha - 1)\tau_2 kE_0}{1 + \tau_2 p}$$

$$y(t) = kE_0(\alpha - 1)\tau_2(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}) + kE_0 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$y(t) = kE_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \alpha e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

$$y(t) = kE_0 \left[1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

* si $t \rightarrow 0$; $y(t) = kE_0[1 + (\alpha - 1)] = kE_0\alpha$

** si $t \rightarrow \infty$; $y(t) = kE_0$

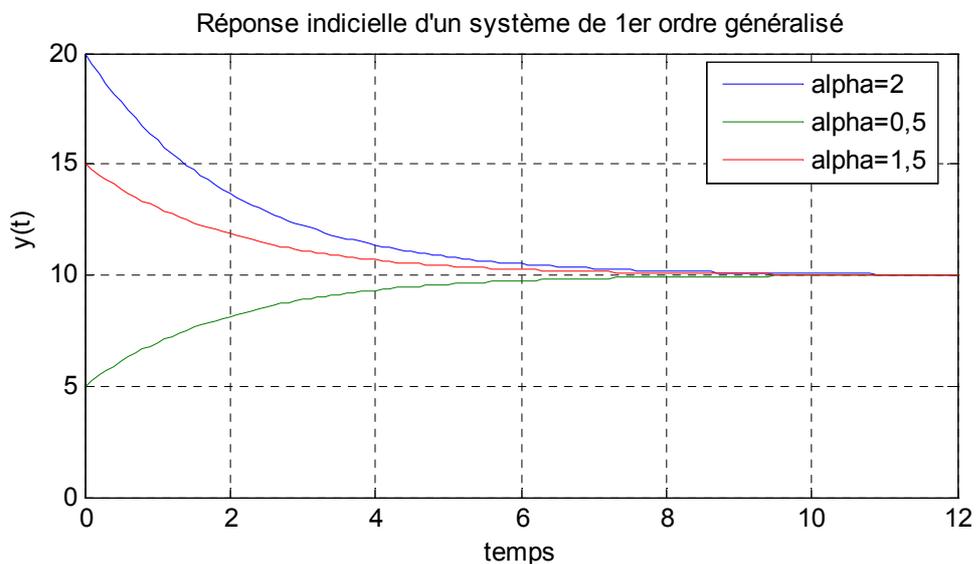


Fig.5.7 : Réponses indicielles d'un système 1^{er} ordre généralisé pour différentes valeurs de α .

Exercices d'application

Déterminer la fonction de transfert des montages suivants :

1. Système de 1^{er} ordre à avance de phase

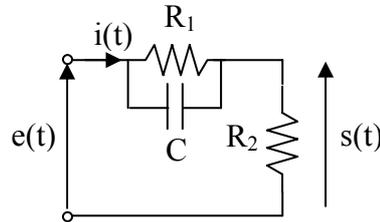


Fig.5.8

$$e(t) = v(t) + s(t)$$

$$E(p) = V(p)I(p) \text{ avec } Z(p) = \frac{R_1}{1 + R_1 C p}, I(p) = \frac{S(p)}{R_2} \text{ et } V(p) = Z(p)I(p)$$

$$E(p) = \left(\frac{Z(p)}{R_2} + 1 \right) S(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{R_2}{R_2 + Z(p)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1 + R_1 C p}} = \frac{R_2(1 + R_1 C p)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C p}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + R_1 C p}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C p}$$

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} ; \tau_1 = R_1 C ; \tau_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

$$\tau_2 = \alpha \tau_1 \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} > 1$$

Donc c'est un système de 1^{er} ordre à **avance de phase**.

2. Système à retard de phase

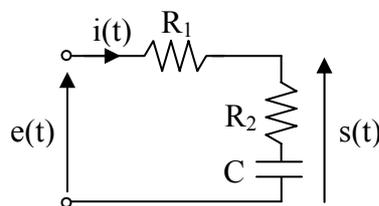


Fig.5.9

$$e(t) = R_1 i(t) + s(t)$$

$$I(p) = \frac{S(p)}{Z(p)} \text{ où } Z(p) = R_2 + \frac{1}{C p} = \frac{R_2 C p + 1}{C p}$$

$$E(p) = \left(\frac{R_1}{Z} + 1 \right) S(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Z}{R_1 + Z} = \frac{\frac{R_2 Cp + 1}{Cp}}{R_1 + \frac{R_2 Cp + 1}{Cp}} = \frac{1 + R_2 Cp}{1 + (R_1 + R_2) Cp}$$
$$\Rightarrow H(p) = \frac{1 + R_2 Cp}{1 + (R_1 + R_2) Cp}$$

$$\tau_1 = R_2 C ; \tau_2 = (R_1 + R_2) C$$

$$\tau_2 = \alpha \tau_1 \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

Donc c'est un système de 1^{er} ordre à **retard de phase**.

Chapitre 6

Systeme de Second Ordre

1. Définition

Un système de second ordre est un système décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = k\omega_0^2 e(t)$$

Cas général :

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

9. Paramètres

$$k : \text{gain statique} \quad k = \frac{s(\infty)}{e(\infty)}$$

m : coefficient d'amortissement : ξ

ω_0 : pulsation propre.

10. Transformée de Laplace

Condition initiale nulle

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} \rightarrow p^2 S(p)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} \rightarrow pS(p)$$

11. Fonction de transfert et équation caractéristique

4.1. Fonction de transfert

$H(p) = ?$

$$p^2 S(p) + 2m\omega_0 p S(p) + \omega_0^2 S(p) = k\omega_0^2 E(p) \quad \Rightarrow \quad \frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

4.2. Equation caractéristique

$$D(p) = p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2$$

12. Réponse indicielle d'un système de second ordre

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{k\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = k\omega_0^2 \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$S(p) = k\omega_0^2 \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} E(p) \text{ avec } E(p) = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow S(p) = k\omega_0^2 \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$\Rightarrow S(p) = k\omega_0^2 \left[\frac{a}{p} + \frac{b}{p-p_1} + \frac{c}{p-p_2} \right]$$

$$* a = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} \Big|_{p=0} = \frac{1}{p_1 p_2}$$

$$* b = \frac{1}{p(p-p_2)} \Big|_{p=p_1} = \frac{1}{p_1(p_1-p_2)}$$

$$* c = \frac{1}{p(p-p_2)} \Big|_{p=p_2} = \frac{1}{p_2(p_2-p_1)}$$

$$\Rightarrow S(p) = k\omega_0^2 \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p-p_1} + \frac{1}{p-p_2} \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = k\omega_0^2 \left[\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_1(p_1-p_2)} e^{p_1 t} + \frac{1}{p_2(p_2-p_1)} e^{p_2 t} \right] u(t)$$

$$\text{Donc } \boxed{s(t) = \frac{k\omega_0^2}{p_1 p_2} \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right] u(t)}$$

➤ $D(p) = 0$

$$\Delta = (m\omega_0)^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 (m^2 - 1)$$

$$\bullet \underline{m=0} \Rightarrow D(p) = p^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = j\omega_0 \\ p_2 = -j\omega_0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = j\omega_0 \\ p_2 = -j\omega_0 \end{array} \right\} \Rightarrow p_1 p_2 = \omega_0^2 \text{ et } p_1 - p_2 = 2j\omega_0$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{k\omega_0^2}{\omega_0^2} \left[1 - \frac{j\omega_0}{2j\omega_0} e^{j\omega_0 t} - \frac{j\omega_0}{2j\omega_0} e^{-j\omega_0 t} \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = k \left[1 - \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \right] \Rightarrow \boxed{s(t) = k[1 - \cos \omega_0 t]}$$

C'est un système juste oscillant.

Cas général : $\boxed{s(t) = kE_0[1 - \cos \omega_0 t]}$

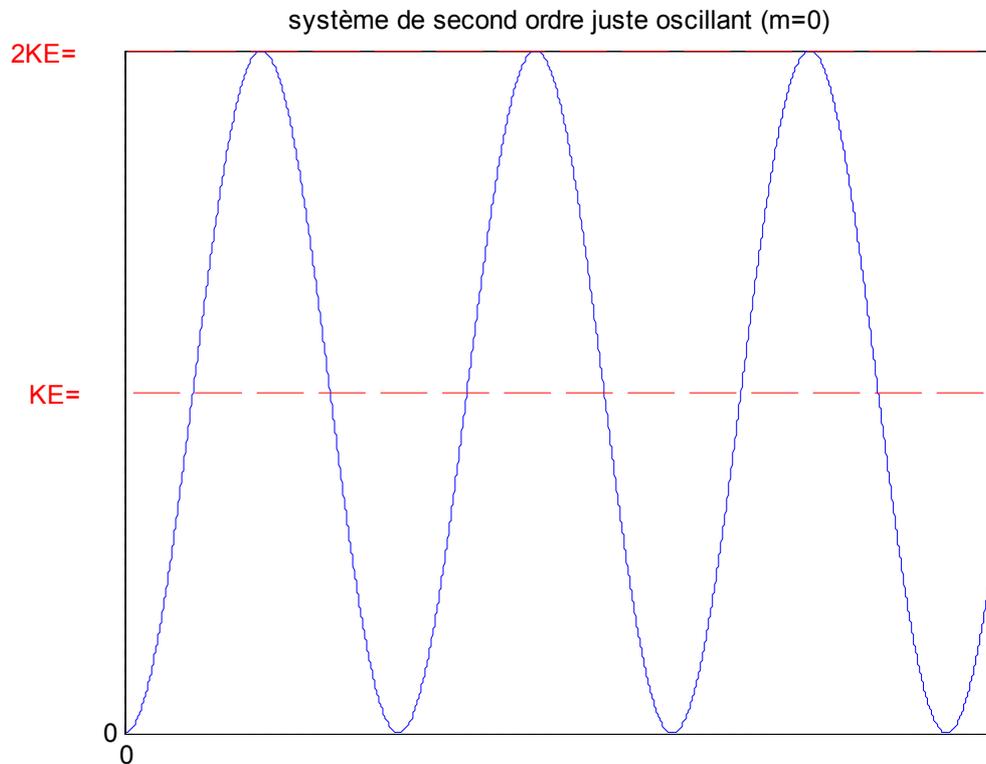


Fig.6.1: Réponse indicielle d'un système de 2nd ordre (m=0 : juste oscillant).

- **m=1** $\Rightarrow D(p) = p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow (p + \omega_0)^2 = 0$
 $\Rightarrow p_1 = p_2 = -\omega_0$

$$\boxed{s(t) = kE_0 \left(1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right)}$$

- **m>1** $\Rightarrow \Delta > 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} = \omega_0 (-m + \sqrt{m^2 - 1}) < 1 \\ p_2 = -m\omega_0 - \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} < 1 \end{cases}$

$$\boxed{s(t) = kE_0 \left[1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right]}$$

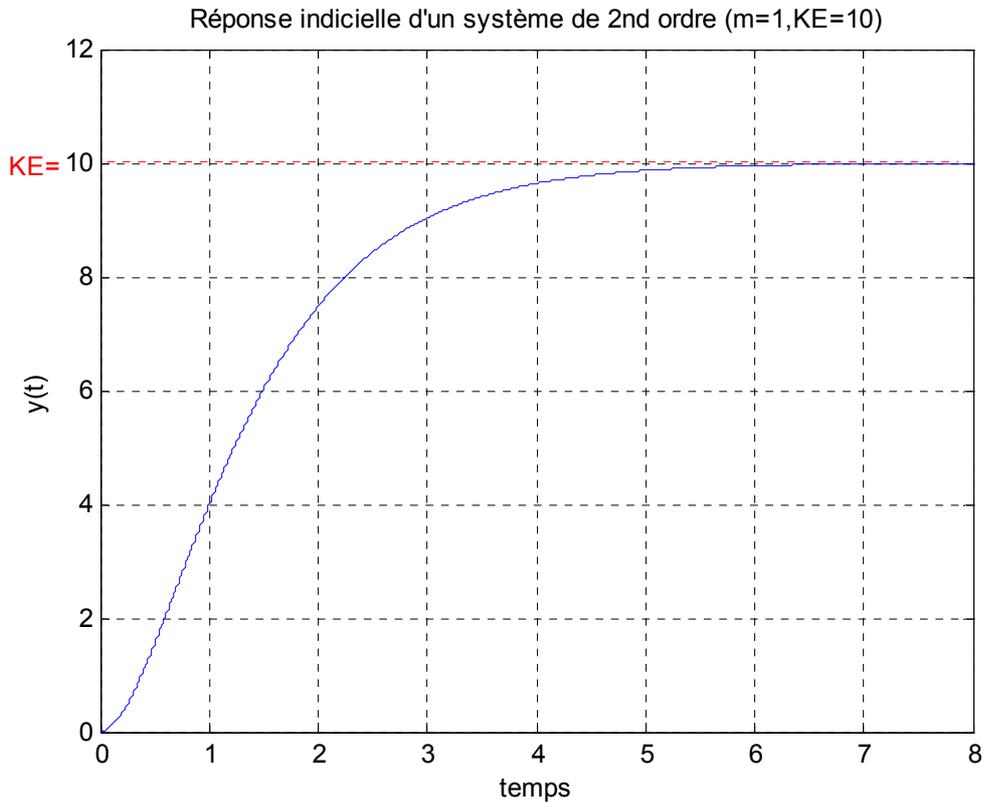


Fig.6.2: Réponse indicielle d'un système de 2nd ordre ($m>1$).

C'est un système hyperamorti.

- $0 < m < 1$ $\Delta = \omega_0^2 (m^2 - 1) < 0 \Rightarrow$ deux pôles complexes conjugués.

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0 \sqrt{1-m^2} \\ p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0 \sqrt{1-m^2} \end{cases}$$

$$s(t) = kE_0 \left[1 - e^{\frac{-m\omega_0 t}{\sqrt{1-m^2}}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t + \varphi) \right]$$

Avec $\begin{cases} \varphi = \arctg \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} \\ \omega_p = \omega_0 \sqrt{1-m^2} \end{cases}$

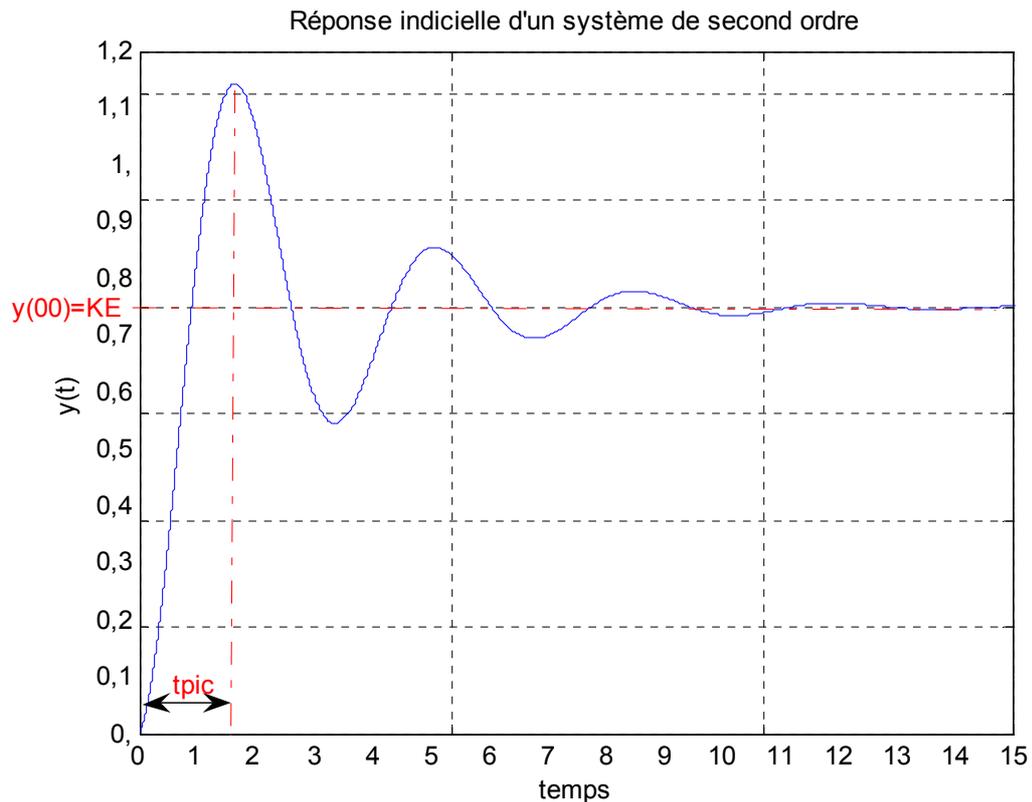


Fig.6.3: Réponse indicielle d'un système de 2nd ordre ($0 < m < 1$).

C'est un système oscillant amorti.

Exemple

Soit la fonction de transfert $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{4}{p^2 + 2}$

2. Déterminer m , ω_0 et k .
3. Représenter la réponse indicielle $s(t)$.

1. * $m=0$

* $\omega_0 = \sqrt{2} \text{ rd.s}^{-1}$

* $k.=2$

2. $S(p) = \frac{4}{(p^2 + 2)} \frac{E_0}{p}$

$s(t) = kE_0(1 - \cos\sqrt{2} t)$

Donc $s(t) = 2E_0(1 - \cos\sqrt{2} t)$.

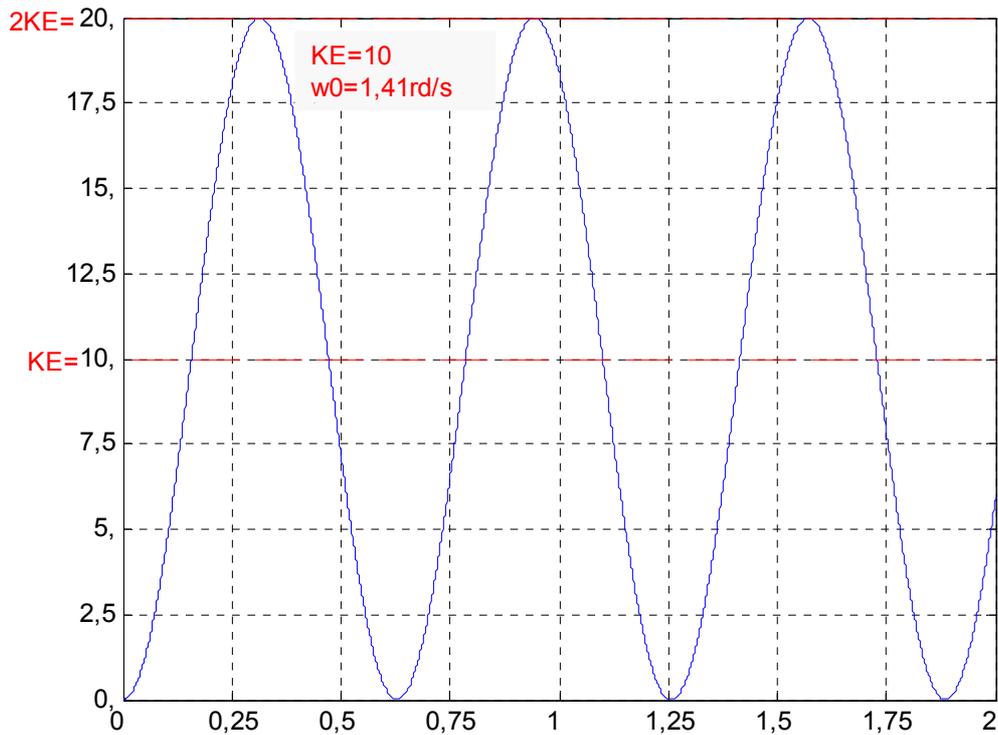


Fig.6.4: Réponse indicielle d'un système de 2nd ordre (m=0 : juste oscillant).

13. Placement des pôles

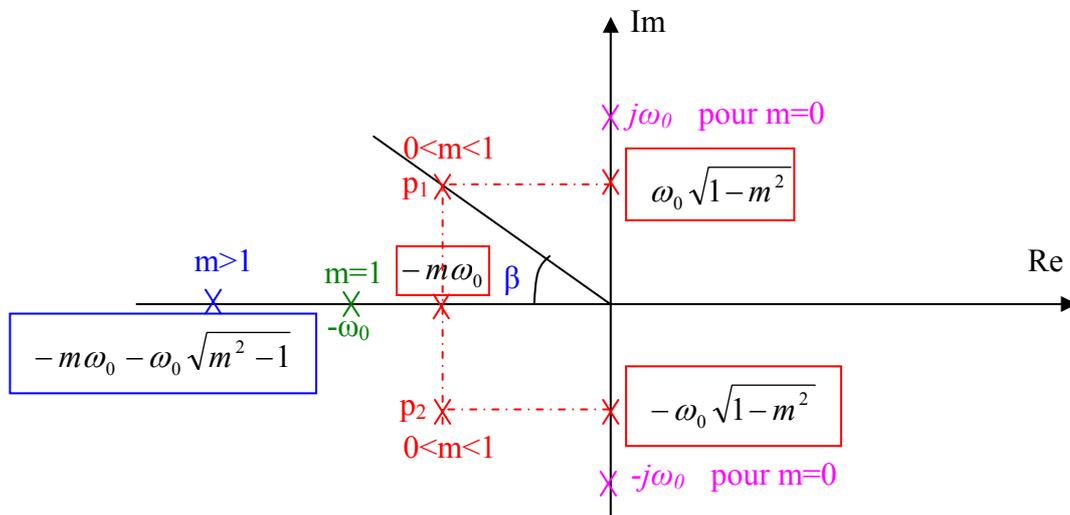


Fig.6.5: Lieux des pôles pour les différentes valeurs de « m »

$$\begin{cases} \cos \beta = \frac{m\omega_0}{\sqrt{(m\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-m^2)}} = \frac{m\omega_0}{\omega_0} = m \\ \sin \beta = \frac{\omega_0\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{(m\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-m^2)}} = \sqrt{1-m^2} \end{cases}$$

14. Dépassement et temps de pic (0 < m < 1)

14.1. **Dépassement**

$$D\% = 100 \frac{S_{\max} - S(\infty)}{S(\infty)}$$

Pour : $m=0 \rightarrow D\%=100\%$

$m=1 \rightarrow D\%=0$

$$D\% = 100e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$$

14.2. **Temps de pic**

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

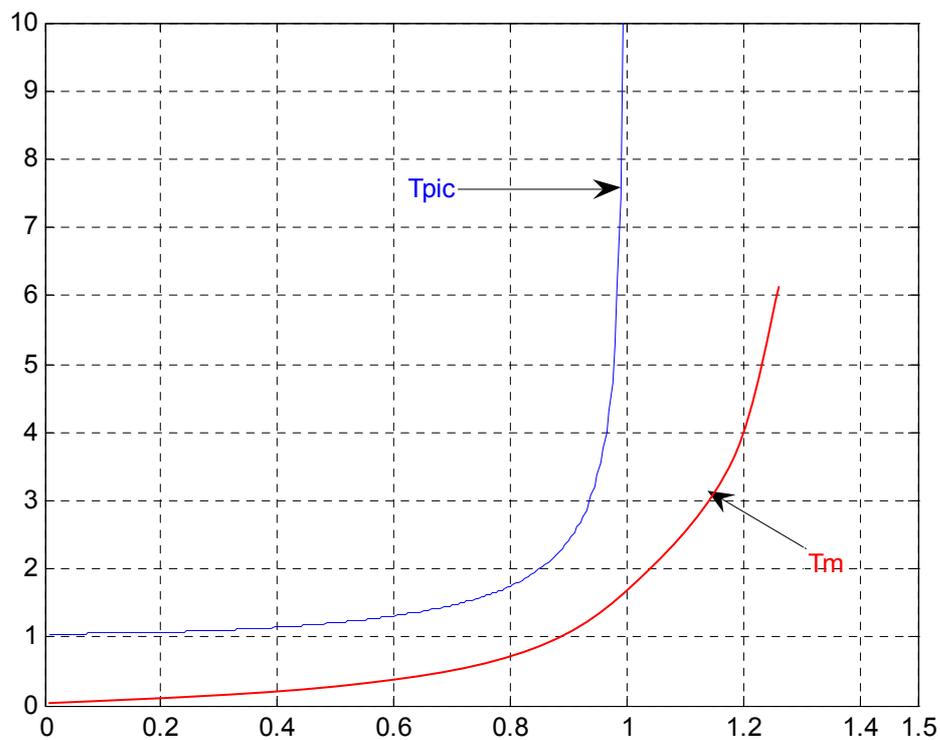
14.3. **Allures**

Fig.6.6: Allures de la variation du dépassement et temps de pic pour $0 < m < 1$.

15. **Temps de stabilisation**

$$t_s = \frac{4}{m\omega_0} \text{ à } \pm 2\%$$

$$t_s = \frac{3}{m\omega_0} \text{ à } \pm 5\%$$

Exercices

Ex 1

Soit le montage suivant :

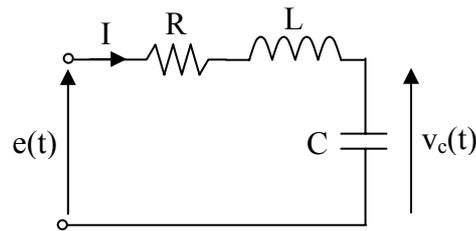


Fig.6.7: Circuit RLC série

1. Déterminer $H(p) = \frac{V_c(p)}{E(p)}$
2. Déterminer les paramètres caractéristiques du système en fonction de R, L et C.
3. Déterminer l'équation caractéristique.
4. Conclure sur la stabilité du système pour
5. Calculer $s(t)$ pour $e(t)=u(t)$.
6. Calculer $D\%$, T_p et T_s à $\pm 5\%$.

Ex 2

Soit un système décrit par sa fonction de transfert

$$H(p) = \frac{3}{p^2 + 2}$$

1. Déterminer m , ω_0 et k .
2. Déterminer $s(t)$ et la représenter pour $e(t)=2u(t)$.
3. Déduire la stabilité.

Ex 3

$$H(p) = \frac{3}{p^2 + 3p + 1}$$

Répondre aux mêmes questions de l'exercice 2.

Correction**Ex 2**

1. $m=0$
 $* \omega_0 = \sqrt{2} \text{ rd.s}^{-1}$
 $\rightarrow 2 k=3 \Rightarrow k=3/2$

2. $e(t) = 2u(t)$

$$S(p) = \frac{3}{(p^2 + 2)} \frac{2}{p} = \frac{6}{(p^2 + 2)p} \text{ donc } s(t) = 3(1 - \cos\sqrt{2}t)$$

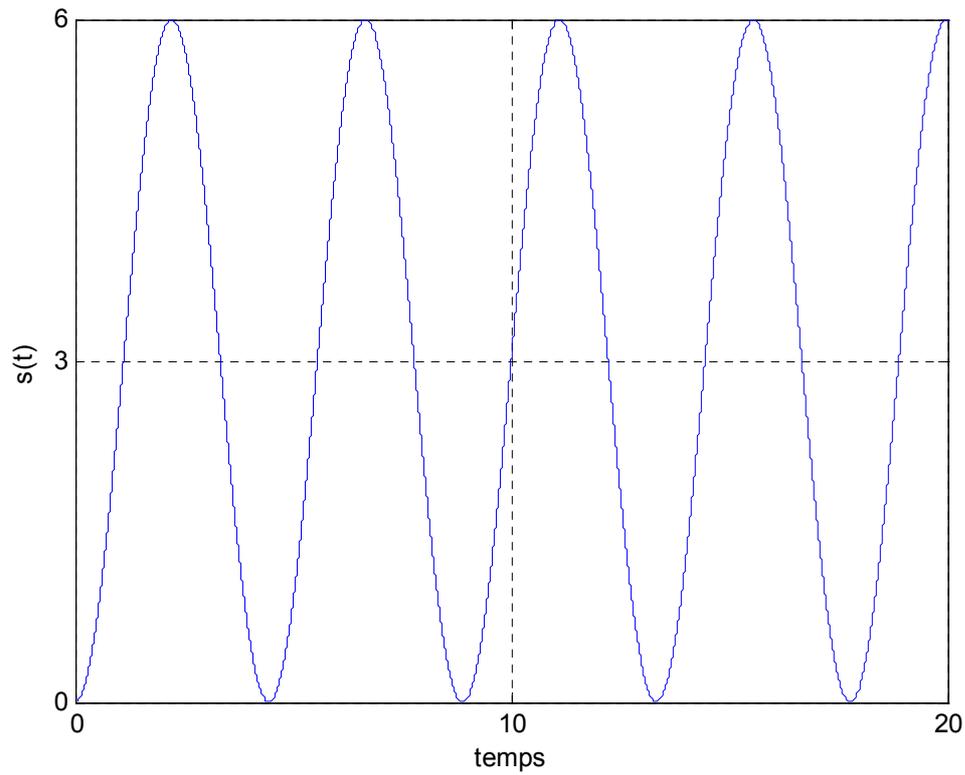


Fig.6.8

3.

$$\begin{cases} p_1 = j\sqrt{2} \\ p_2 = -j\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Système juste oscillant.}$$

Ex 3

$$H(p) = \frac{3}{p^2 + 3p + 1}$$

1. * $\omega_0 = \sqrt{1} = 1 \text{ rd.s}^{-1}$

* $2m\omega_0 = 3$ donc $m = 3/2$

→ $k\omega_0^2 = 3 \Rightarrow k=3$

2. $e(t) = 2u(t)$

$$s(t) = 6 \left[1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right]$$

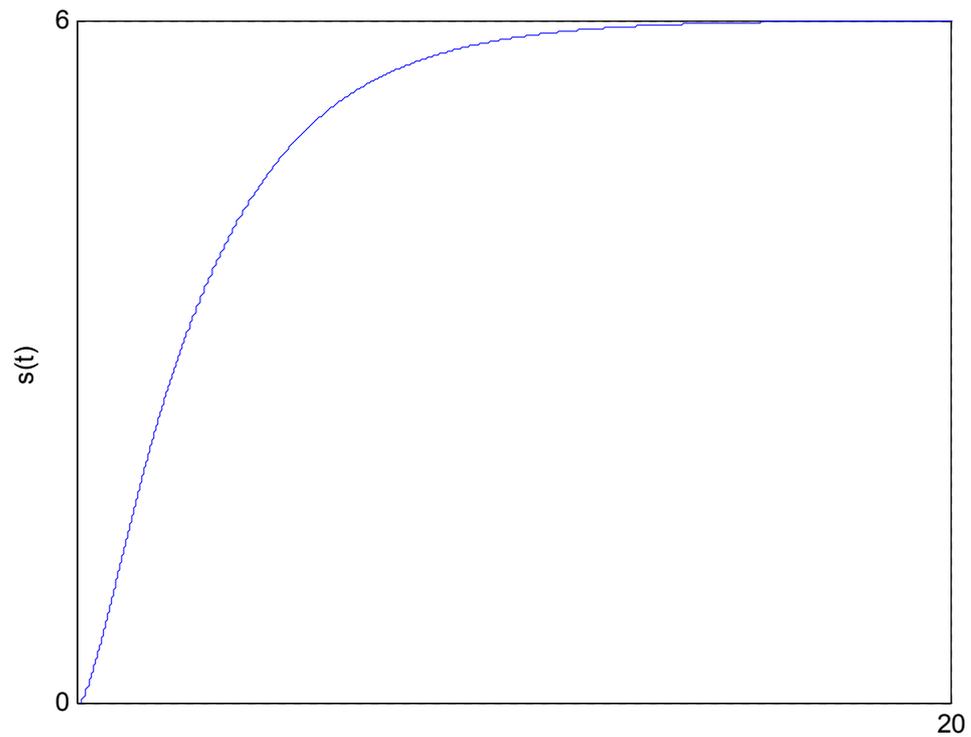


Fig.6.9

$$3. \Delta = 9 - 4 = 5$$

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} \\ p_2 = -m\omega_0 - \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ p_2 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Chapitre 7

Etude Harmonique des Systèmes Asservis Élémentaires

5. Introduction

L'étude harmonique d'un système correspond à une représentation fréquentielle mettant en évidence le gain et la phase de la fonction $F(j\omega)$ lorsque ω varie.

Il existe plusieurs représentations.

- Représentation sur le lieu de Bode.

$$F(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} \|F(j\omega)\| \\ \varphi = \arctg(F(j\omega)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{dB} = 20 \log|F(j\omega)| \\ \varphi = f(\omega) \end{cases}$$

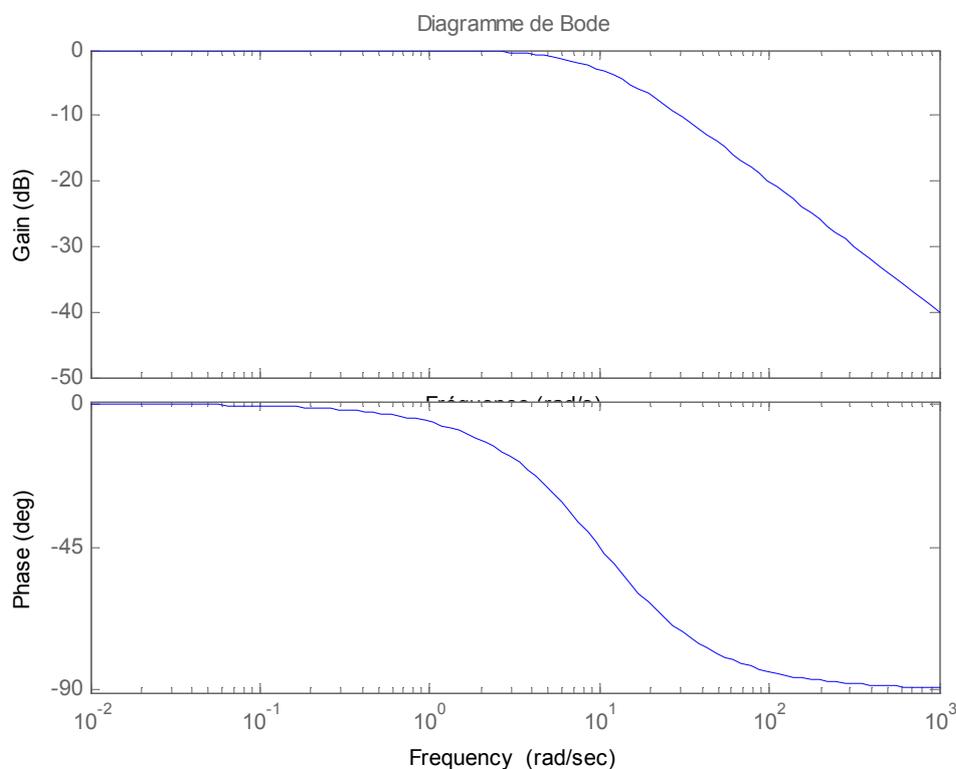


Fig.7.1: Allures de Bode pour un système de 1^{er} ordre.

Remarque

ω varie en échelle logarithmique.

- Les lieux de Nyquist

Ils représentent dans le plan complexe la partie imaginaire en fonction de la partie réelle et qui évolue en fonction de ω .

$$F(j\omega) = x + jy$$

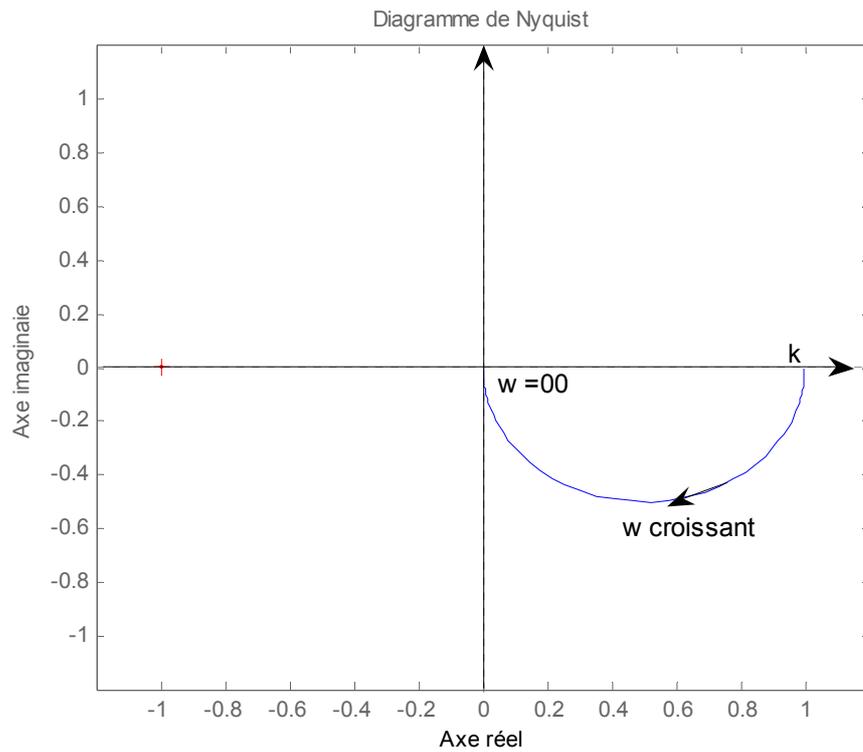


Fig.7.2: Allure de Nyquist pour un système de 1^{er} ordre.

$y=f(x)$ qui évolue en fonction de $\omega=0$ jusqu'à ∞ .

- Les lieux de Black : gradués et orientés en valeurs croissantes de ω avec $\varphi(\arg)$ en abscisse et FdB en ordonné.

$$\begin{cases} F_{dB} = 20 \log|F(j\omega)| \\ \varphi = \arg(F(j\omega)) \end{cases}$$

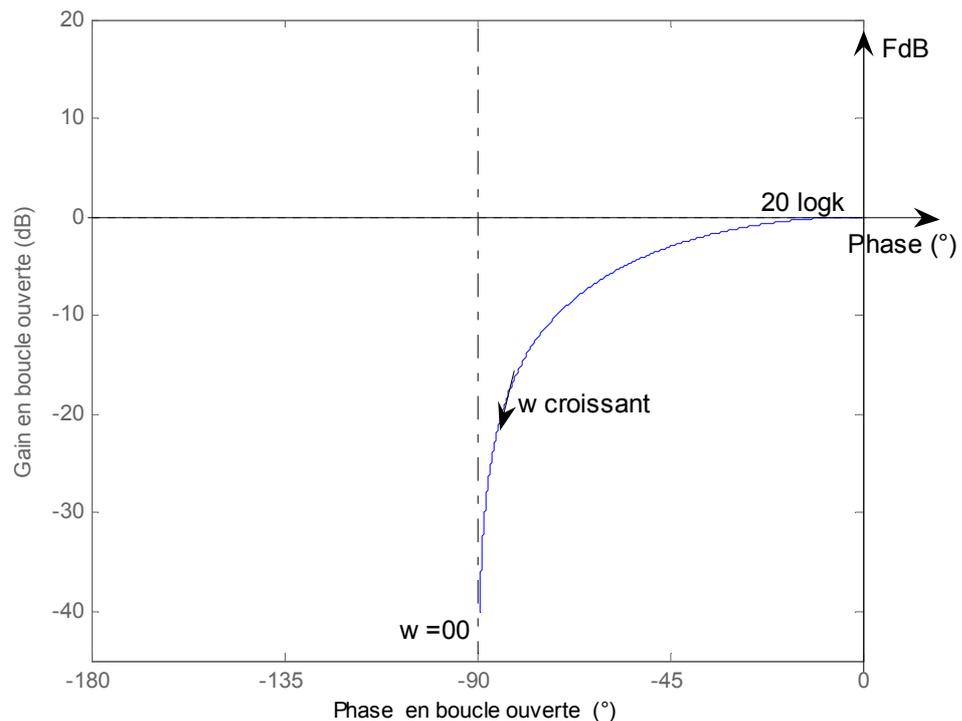


Fig.7.3: Allure de Nychols pour un système de 1^{er} ordre.

6. Système de 1^{er} ordre

$$F(p) = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{k}{1 + j\tau\omega}$$

$$\text{Bode : } \begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \\ \varphi = \arg(F(j\omega)) = -\arctg(\tau\omega) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{dB} = 20 \log \frac{k}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \\ \varphi = -\arctg(\tau\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{dB} = 20 \log k - 20 \log(1 + (\tau\omega)^2)^{1/2} \\ \varphi = -\arctg(\tau\omega) \end{cases}$$

ω	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow 1/\tau$	$\omega \rightarrow \infty$
F_{dB}	$20 \log k$	$20 \log k - 3$	$-20 \log(\tau\omega) \rightarrow \infty$
φ	0	$-\pi/4$	$-\pi/2$

Tab.7.1

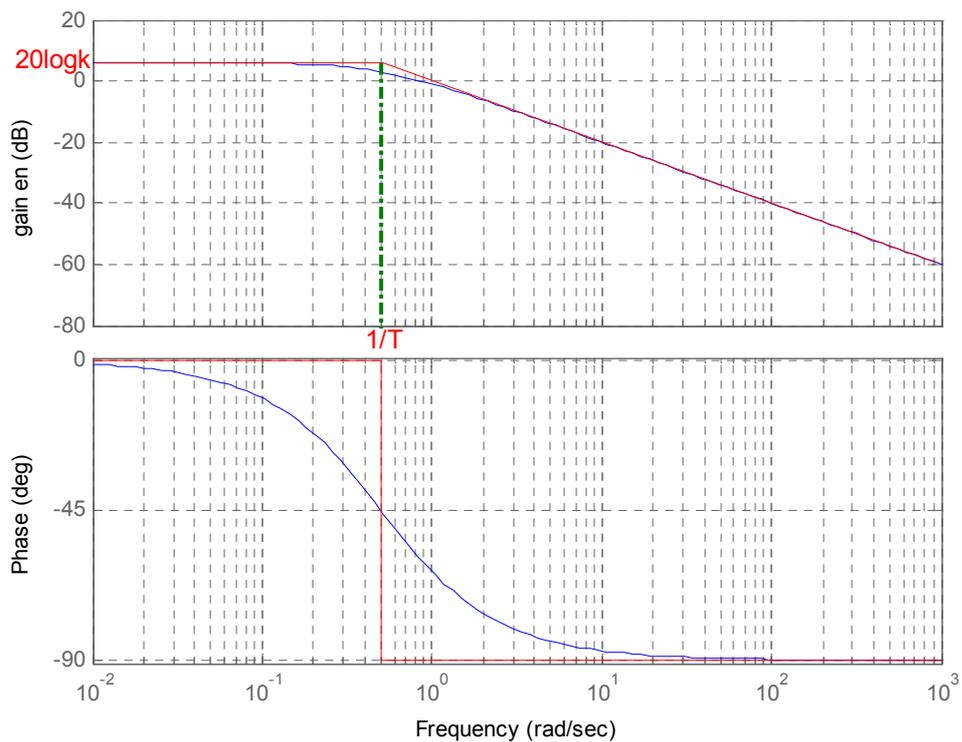


Fig.7.4: Diagramme de Bode pour un système de 1^{er} ordre.

$$\text{Nyquist : } F(p) = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{k}{1 + j\tau\omega} = \frac{k}{1 + (\tau\omega)^2} - j \frac{k\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2}$$

$$\begin{cases} X = \frac{k}{1 + (\tau\omega)^2} \\ -Y = \frac{k\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \end{cases} \Rightarrow Y = -\tau\omega X$$

$$Y^2 = (\tau\omega X)^2 = \left(\frac{k}{X} - 1\right)X^2 = kX - X^2$$

$$X^2 + Y^2 - kX = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{k}{2}\right)^2 + Y^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = 0 \text{ c'est un cercle : } C\left(A, \frac{k}{2}\right) \text{ avec } A\left(\frac{k}{2}, 0\right)$$

ω	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow 1/\tau$	$\omega \rightarrow \infty$
X	k	k/2	0
Y	0	-k/2	0

Tab. 7.2

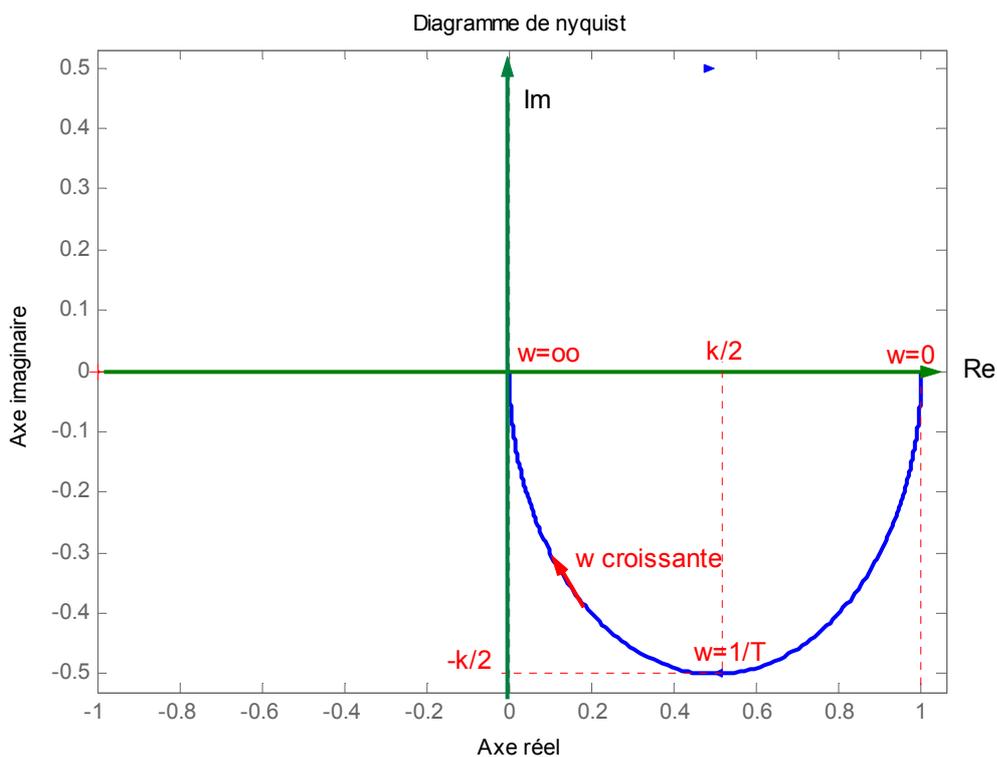


Fig.7.5: Allure de Nyquist pour un système de 1^{er} ordre.

Black : $F(p) = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{k}{1 + \tau j\omega}$

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \\ \varphi = \arg(F(j\omega)) = -\arctg(\tau\omega) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{dB} = 20 \log k - 20 \log(1 + (\tau\omega)^2)^{1/2} \\ \varphi = -\arctg(\tau\omega) \end{cases} \quad F_{dB} = f(\varphi)$$

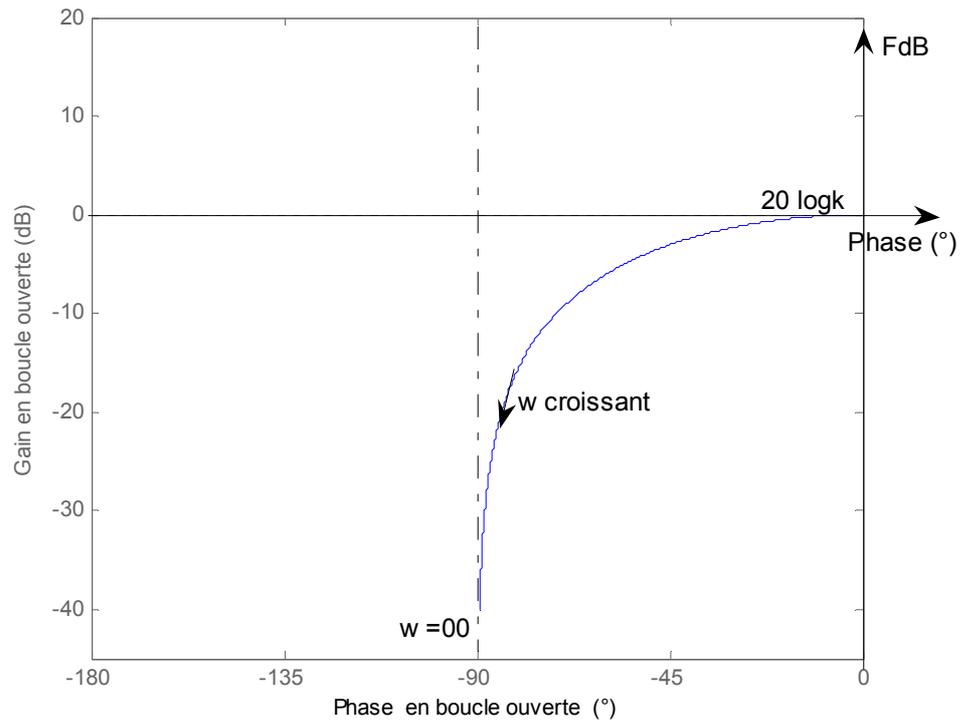


Fig.7.6: Allure de Black pour un système de 1^{er} ordre.

7. Système de 1^{er} ordre généralisé

$$F(p) = \frac{k(1 + \alpha\tau p)}{1 + \tau p} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{k(1 + j\alpha\tau\omega)}{1 + j\tau\omega} \Rightarrow F(j\omega) = F_1(j\omega).F_2(j\omega) \text{ avec}$$

$$\begin{cases} F_1(j\omega) = k / (1 + j\tau\omega) \\ F_2(j\omega) = 1 + j\alpha\tau\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = |F_1(j\omega)| |F_2(j\omega)| \\ \varphi = \arg(F(j\omega)) = \arg(F_1(j\omega)) + \arg(F_2(j\omega)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{dB} = F_{1dB} + F_{2dB} = 20 \log|F_1(j\omega)| + 20 \log|F_2(j\omega)| \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \text{arctg}(\alpha\tau\omega) - \text{arctg}(\tau\omega) \end{cases}$$

ω	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow 1/\alpha\tau$	$\omega \rightarrow \infty$
F_{2dB}	0	3	$+\infty$
φ_2	0	$\pi/4$	$\pi/2$

Tab.7.3

3.1. Représentations de Bode pour un système de 1^{er} ordre généralisé :

$\alpha < 1$:

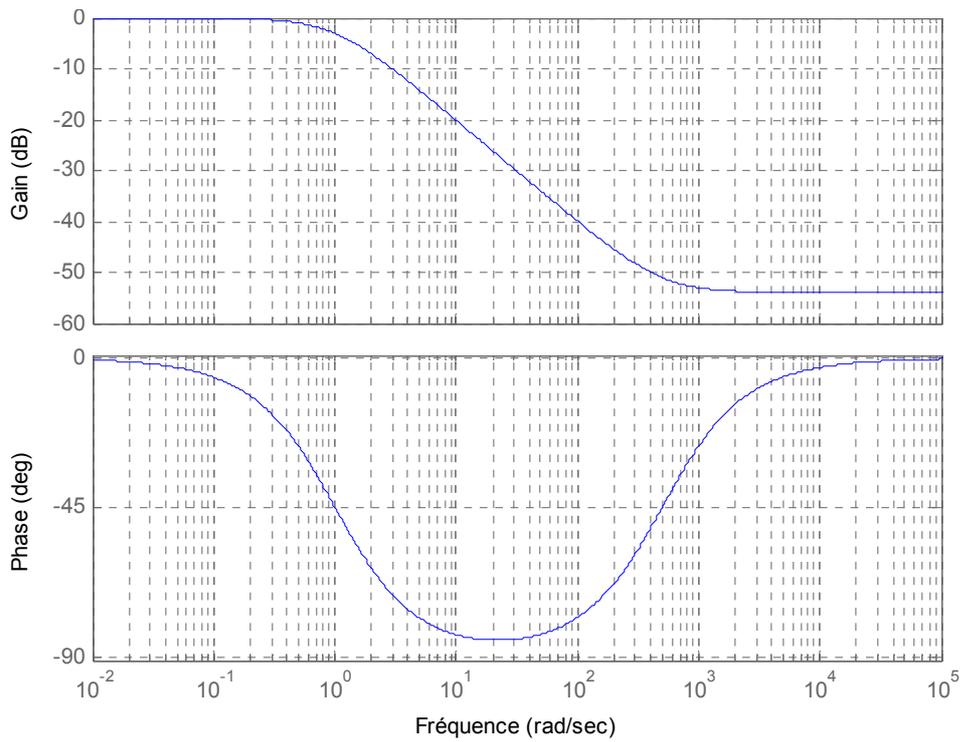


Fig.7.7: Diagramme de Bode (syst. De 1^{er} ordre généralisé $\alpha=0.002$).

$\alpha > 1$:

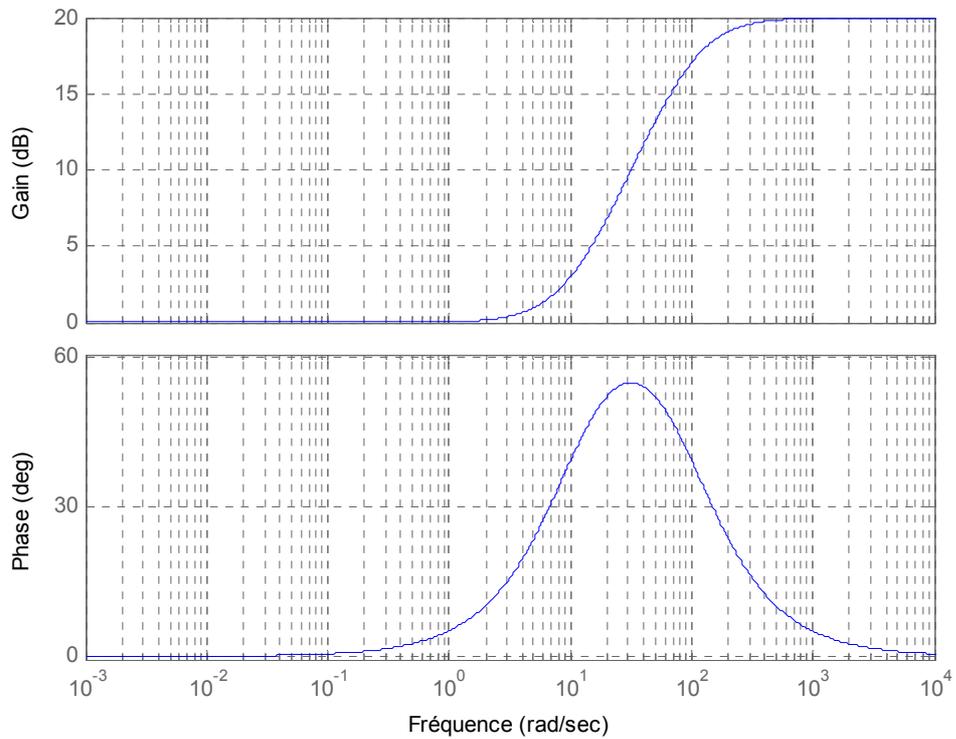


Fig.7.8 : Diagramme de Bode (syst. De 1^{er} ordre généralisé $\alpha=10$).

3.2 Application :

Tracer les diagrammes de Bode, Nyquist et Black pour les fonctions suivantes :

$$F(p) = \frac{1}{p}, F(p) = 1 + \tau p, F(p) = 1 - \tau p \text{ et } F(p) = \frac{1}{1 - \tau p}.$$

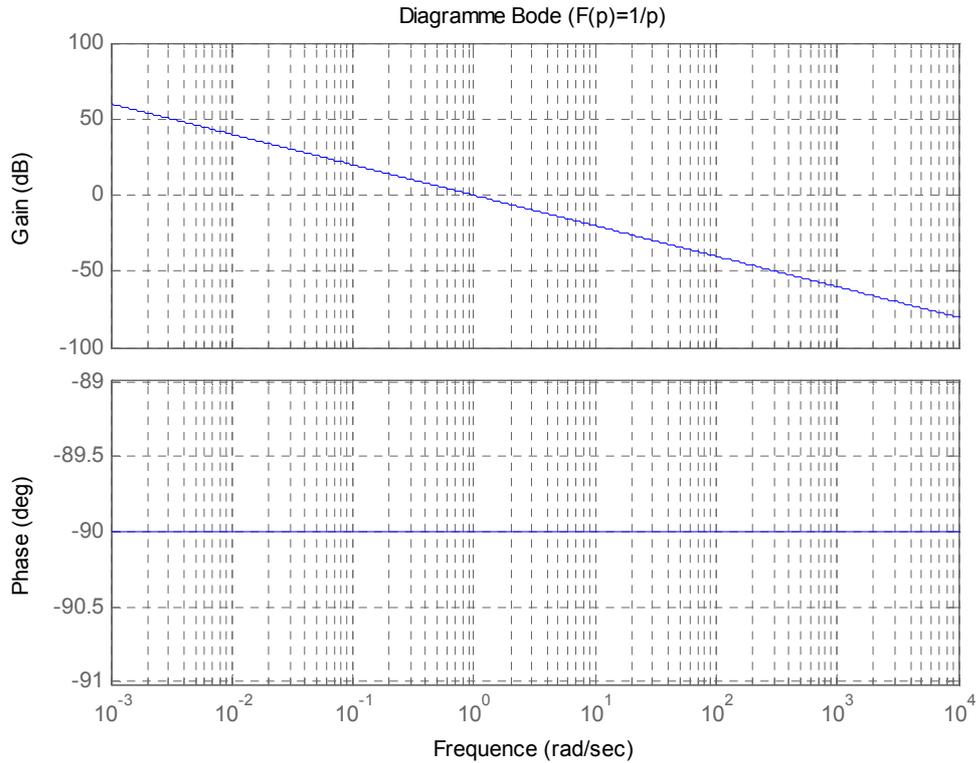


Fig.7.9

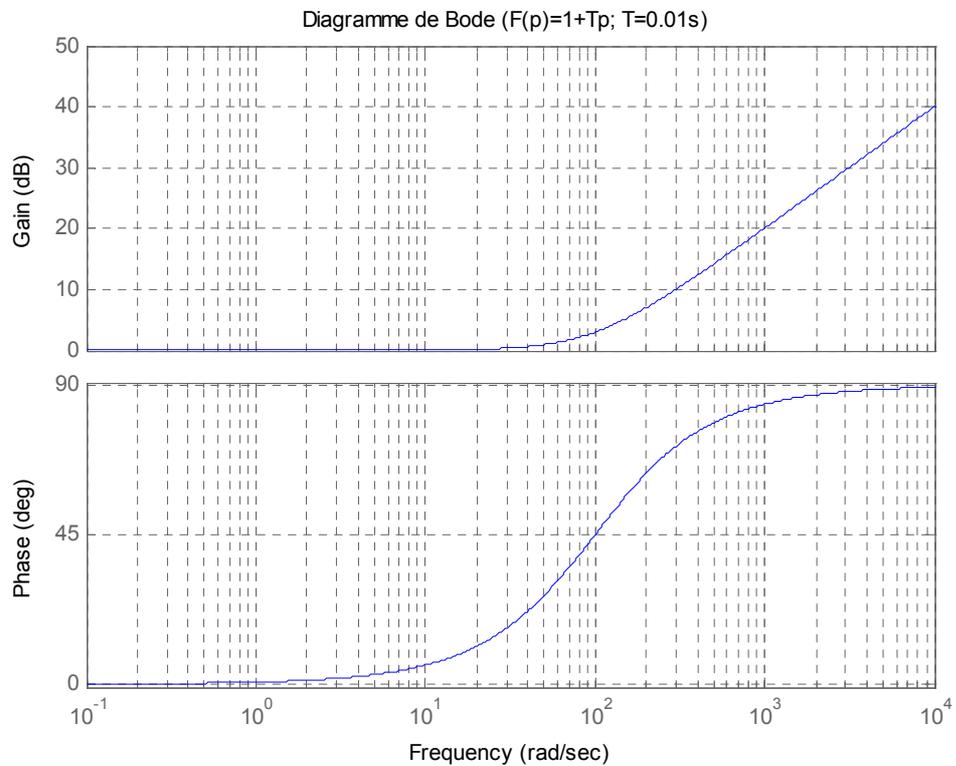


Fig.7.10

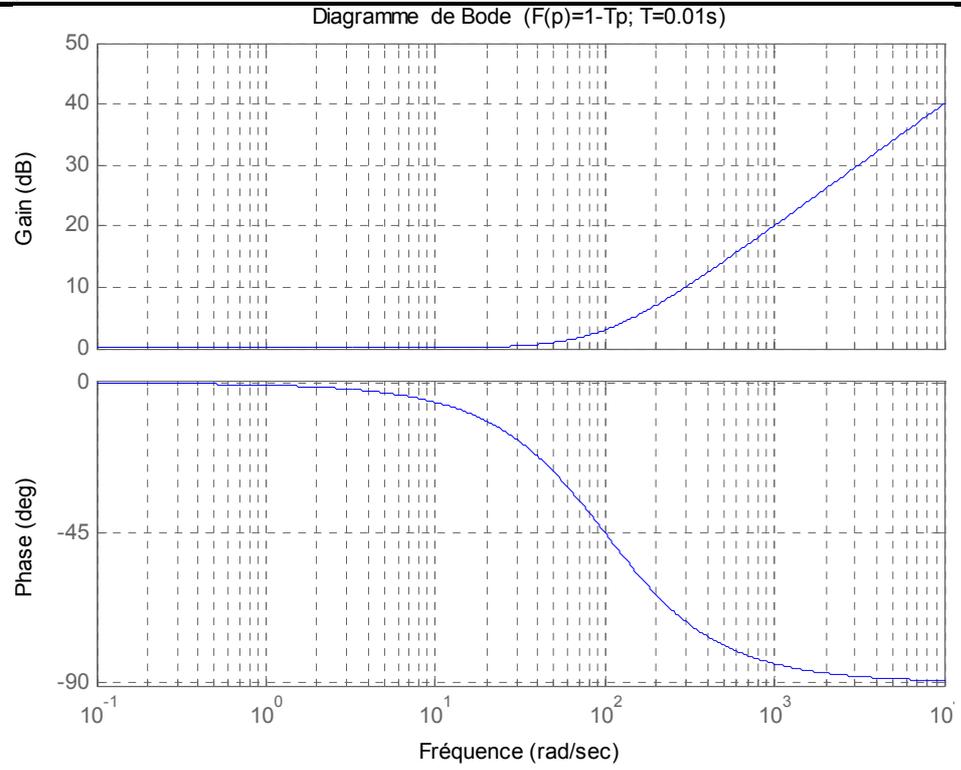


Fig.7.11

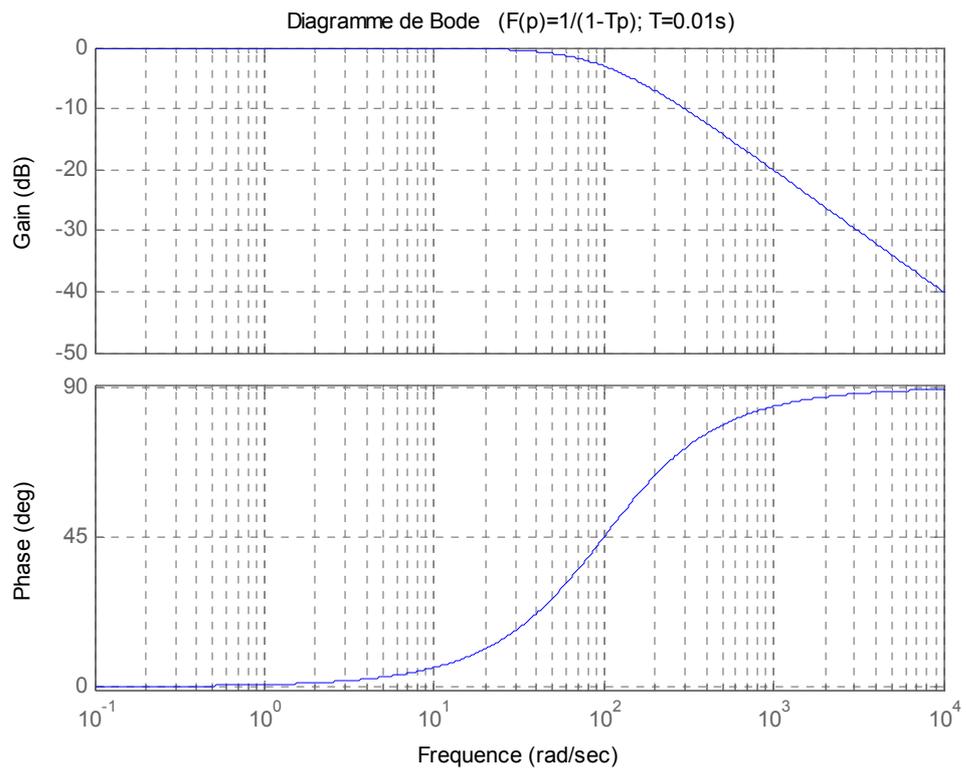


Fig.7.12

8. Système de second degré

$$H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}, \quad p_1 \text{ et } p_2 \text{ sont deux pôles,}$$

$$H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p_1 \left(\frac{p}{-p_1} + 1\right) \left(\frac{p}{-p_2} + 1\right) p_2} = \frac{k\omega_0^2}{p_1 p_2 \left(-\frac{p}{p_1} + 1\right) \left(-\frac{p}{p_2} + 1\right)}$$

$$\text{On pose : } p_1 = -\frac{1}{\tau_1} \text{ et } p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$$

$$H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p_1 p_2 (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

- $m > 1$

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} = \omega_0(-m + \sqrt{m^2 - 1}) < 1 \\ p_2 = -m\omega_0 - \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} < 1 \end{cases} \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2$$

- $m = 1$ $\Rightarrow D(p) = p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow (p + \omega_0)^2 = 0$
 $\Rightarrow p_1 = p_2 = -\omega_0$

- $m = 0$ $\Rightarrow D(p) = p^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = j\omega_0 \\ p_2 = -j\omega_0 \end{cases} \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2$

- $0 < m < 1$

$$\Delta = \omega_0^2 (m^2 - 1) < 0 \Rightarrow \text{Deux pôles complexes conjugués.}$$

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0 \sqrt{1 - m^2} \\ p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0 \sqrt{1 - m^2} \end{cases} \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2$$

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\tau_1 \omega)} \cdot \frac{1}{(1 + j\tau_2 \omega)} = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{dB} = F_{1dB} + F_{2dB} = 20 \log|F_1(j\omega)| + 20 \log|F_2(j\omega)| \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\text{arctg}(\tau_1 \omega) - \text{arctg}(\tau_2 \omega) \end{cases}$$

ω	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = 1/\alpha\tau$	$\omega \rightarrow \infty$
F_{1dB}	$20\log k$	$20\log k + 3$	$-\infty$
F_{2dB}	0	-3	$-\infty$
F_{dB}	$20\log k$	$20\log k - 6$	$-\infty$
φ_1	0	$-\pi/4$	$-\pi/2$
φ_2	0	$-\pi/4$	$-\pi/2$
φ	0	$-\pi/2$	$-\pi$

Tab. 4

* Allures

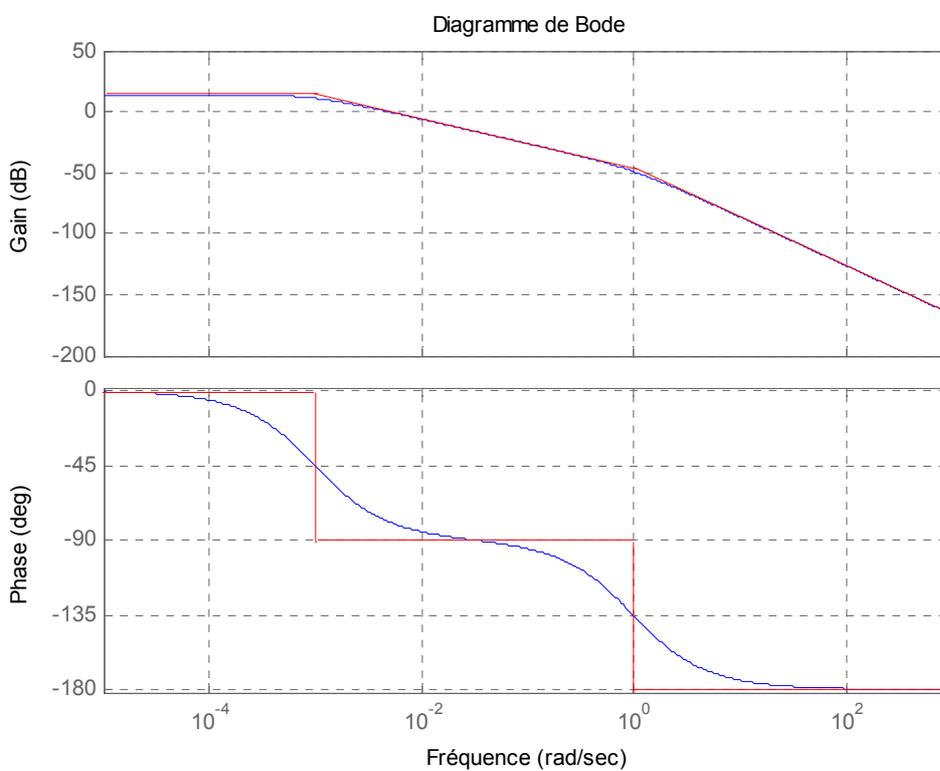


Fig.7.13

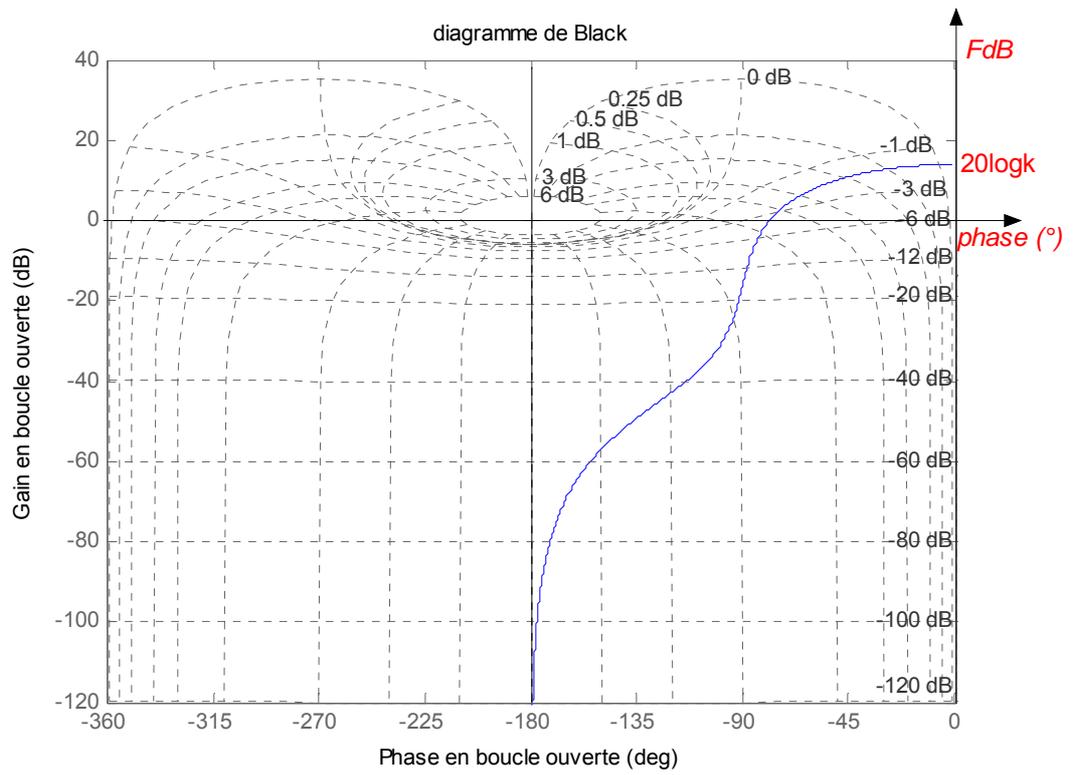


Fig.7.14

*** Diagrammes de Bode, Black et Nyquist pour un système de 2^{ème} pour m variables

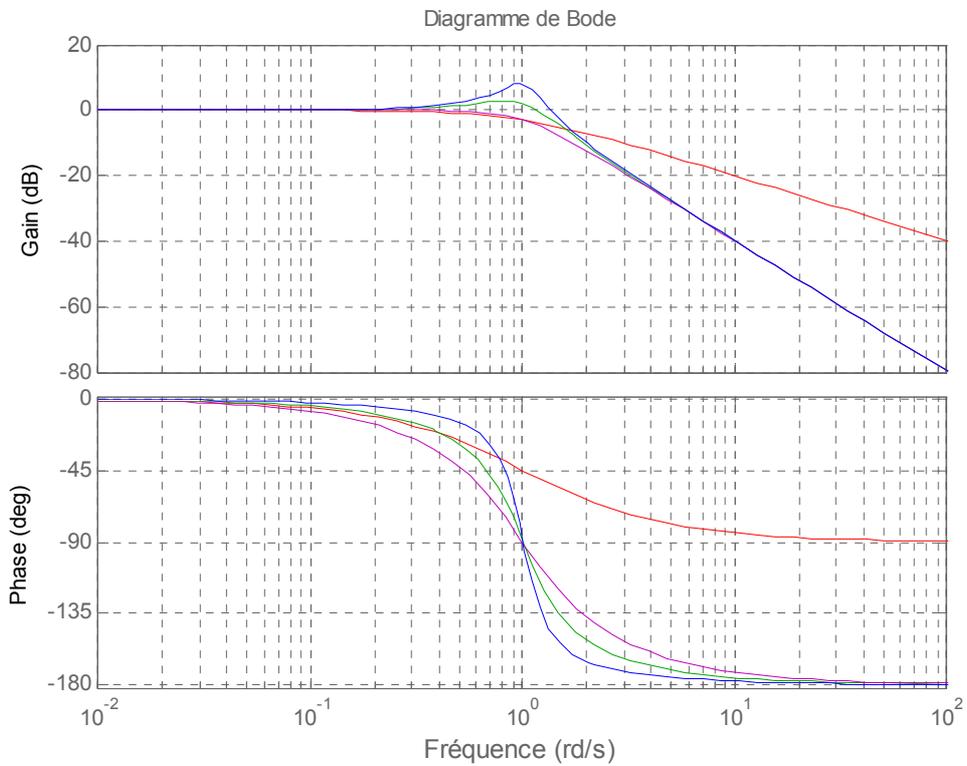


Fig.7.15

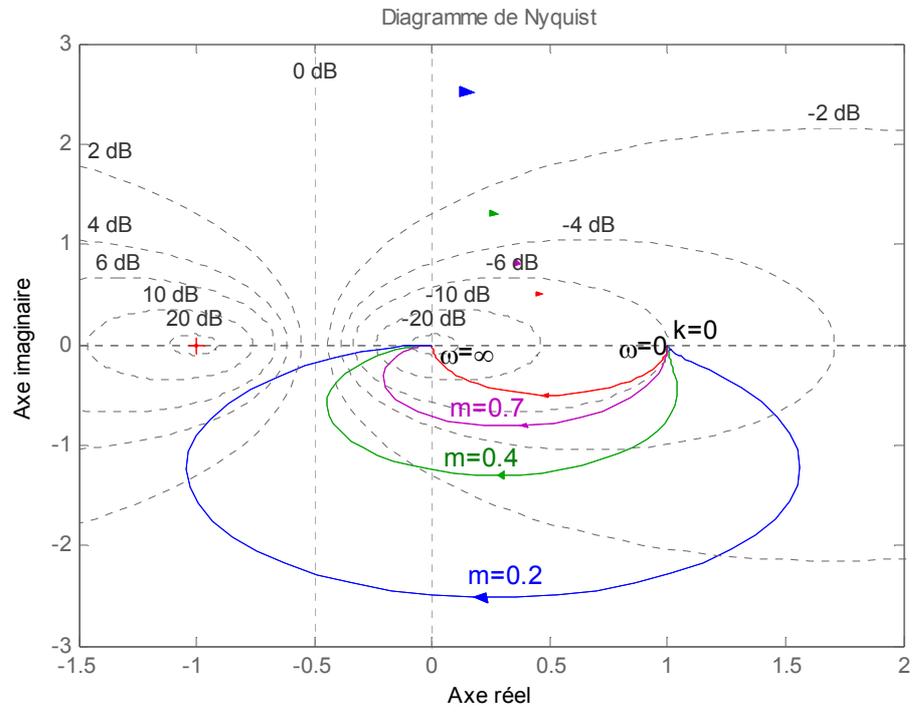


Fig.7.16

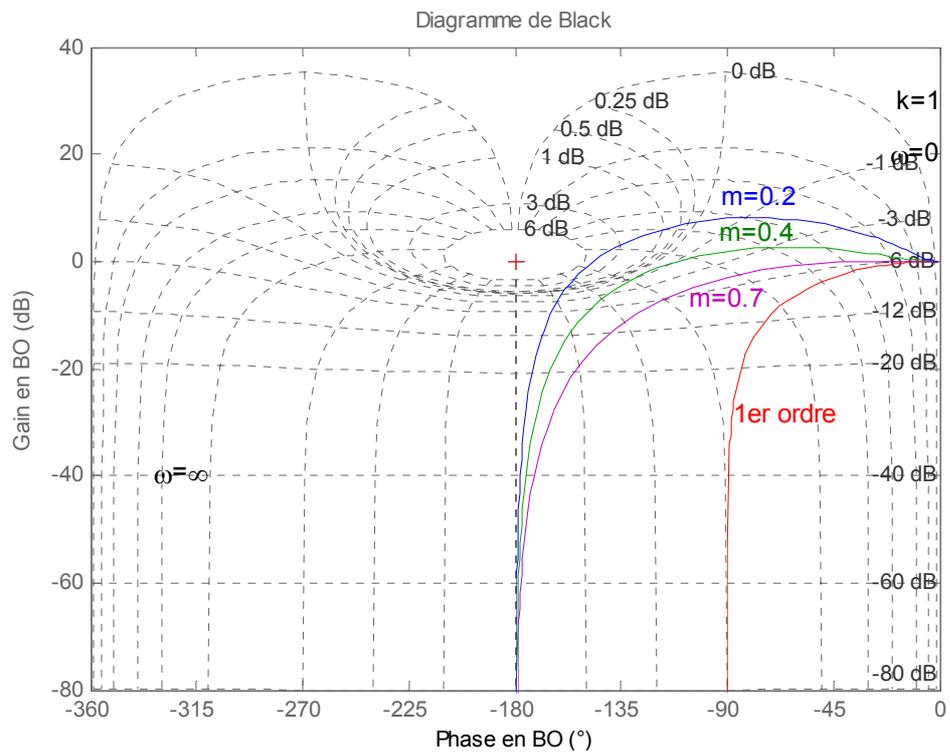


Fig.7.17

Chapitre 8

Analyse et Synthèse des Systèmes Asservis Linéaires par la Méthode Temporelle

1. Généralités

1.3.Rappel

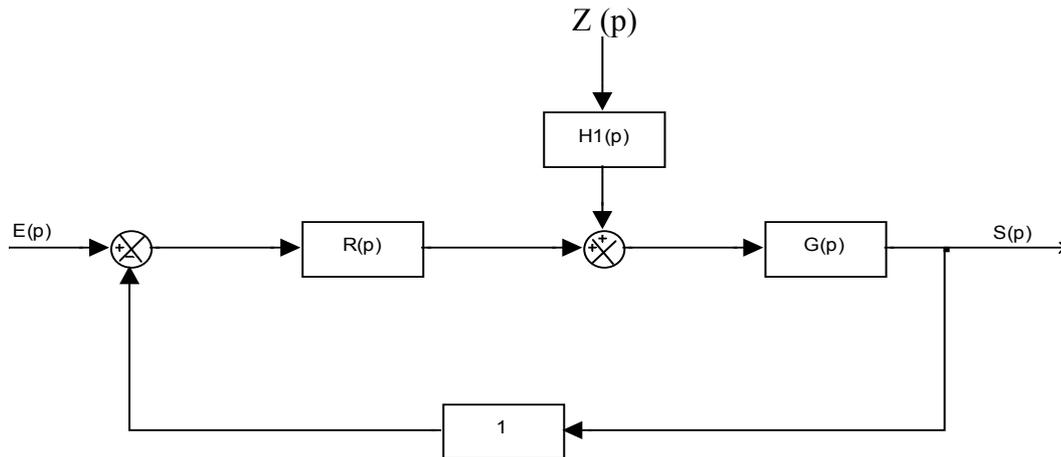


Fig.8.1

$E(p)$: entrée principale

$Z(p)$: perturbation

$S(p)$: sortie

1.4. But de l'entrée temporelle

L'étude temporelle consiste à étudier les trois caractéristiques fondamentales d'un système asservi linéaire

- Rapidité
- Stabilité
- Précision

➔ Un système est dit performant s'il est rapide, stable et précis

4. Stabilité

Un système linéaire asservi est stable si abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconque il revient à son état d'équilibre.

3.1. Condition de stabilité :

Un système asservi linéaire est caractérisé par :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{X(p)}{D(p)}$$

-Equation caractéristique :

$$D(p) = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

➔ Un système est stable si les parties réelles des pôles (solution de $D(p) = 0$) sont négatifs.

Remarque :

Cette condition nécessaire et suffisante nécessite un calcul des racines ce qui rend cette condition inacceptable lorsque l'ordre du système est important >2

Il suffit de déterminer le signe de la partie réelle des pôles en utilisant le critère de Routh.

Critère de Routh : parties réelles < 0.

3.2. Critère de Routh :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0$$

Table de Routh

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_0
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_1
p^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_n
.. ..					
p^0	q_1	q_2	q_3	q_n

Tab.8.1

n+1 lignes

$$b_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}; \quad b_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}; \quad b_3 = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}; \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}; \quad c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1}$$

La condition nécessaire de stabilité s'exprime par le tableau de Routh comme suit :

- Tous les « a_i » existent et de même signe (>0).
- Tous les coefficients de la 1^{ère} colonne sont strictement positifs.

Remarques

- le nombre de changement de signe dans la 1^{ère} colonne du tableau de Routh est égal au nombre des racines (des pôles) de $D(p)$ à partie réelle positive.
- Si le système est d'ordre n , on a $(n+1)$ coefficients sur la 1^{ère} colonne du tableau de Routh.
- Si l'un des éléments de la 1^{ère} colonne est égale à zéro, le système est asymptotiquement marginalement stable.

Application 1

$$1- H_1(p) = \frac{1}{p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 3p + 3}$$

$$2- H_2(p) = \frac{p^2 + 1}{p^3 + ap^2 + bp + c}$$

$$3- H_3(p) = \frac{1}{p^2 + ap + p}$$

Question : Etudier la stabilité des systèmes par le critère de Routh en fonction de a, b et c.

Correction

$$1. D(p) = p^4 + \underline{3}p^3 + \underline{4}p^2 + \underline{3}p + \underline{3} = 0$$

p^4	1	4	3
p^3	3	3	0
p^2	3	3	
p^1	0	0	
p^0	3	0	

Tab.8.2

Polynôme auxiliaire

$$3p^2 + 3 = 0 \Rightarrow p^2 + 1 = 0 \Rightarrow p^2 = -1 \Rightarrow p_1 = j \text{ ou } p_2 = -j$$

➔ le système est marginalement stable (juste oscillant).

$$2. H_2(p) = \frac{p^2 + 1}{p^3 + ap^2 + bp + c}$$

$$D(p) = p^3 + ap^2 + bp + c$$

p^3	1	b
p^2	a	c
p^1	$\frac{ab-c}{a}$	0
p^0	c	

Tab.8.3

Le système soit stable si tous les éléments de la 1^{ère} colonne $>0 \rightarrow a>0, c>0, ab-c>0$

$$3) H_3(p) = \frac{1}{p^2 + ap + b}$$

$$D(p) = p^2 + ap + b$$

p^2	1	b
p^1	a	0
p^0	b	0

Tab.8.4

\rightarrow le système soit stable ssi $a>0$ et $b>0$.

Application 2

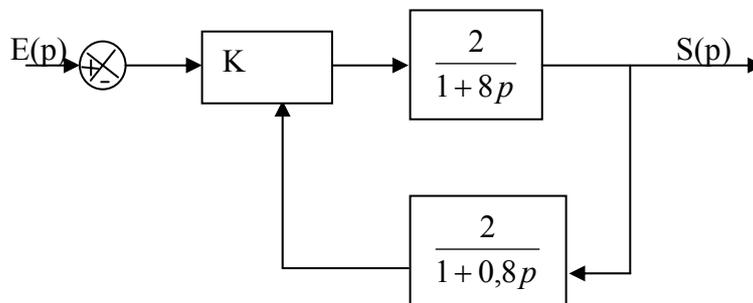


Fig. 8.2

1- Calculer $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$.

2- Etudier la stabilité en fonction de K.

Correction

1- $H(p) = \frac{2K(1+0,5p)}{4p^2 + 8,5p + 1 + 2K}$

2- $D(p) = 4p^2 + 8,5p + 1 + 2K$

p^2	4	$1+2K$
p^1	8,5	0
p^0	$1+2K$	0

Tab.8.5

→ Pour que le système soit stable il faut que $1+2K > 0 \Rightarrow K > -1/2$.

Application 3

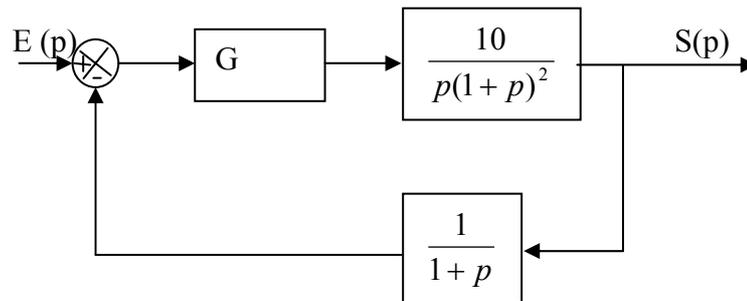


Fig. 8.3

$$1- H(p) = \frac{10G}{1 + \frac{10G}{p(1+p)^3}} = \frac{10G(1+p)}{p^4 + 3p^3 + 3p^2 + p + 10G}$$

Tableau de Routh :

p^4	1	3
p^3	3	1
p^2	$\frac{8}{3}$	$10G$
p^1	$\frac{8}{3} - 10G$	
	$\frac{8}{3}$	
p^0	$10G$	

Tab.8.6

Application 4

$$H(p) = \frac{p^2 + 1}{p^5 + 4p^4 + 3p^2 + p + K}$$

➤ Etudier la stabilité en fonction de K.

Correction

→ $a_3=0$, le système est instable pour tout valeur de K.

5. Rapidité d'un système asservi

3.1. Définition :

t_s : le temps de stabilisation cherché à $\pm 5\%$ (ou à $\pm 2\%$) de $s(\infty) \Rightarrow$ pour les systèmes oscillants amortis.

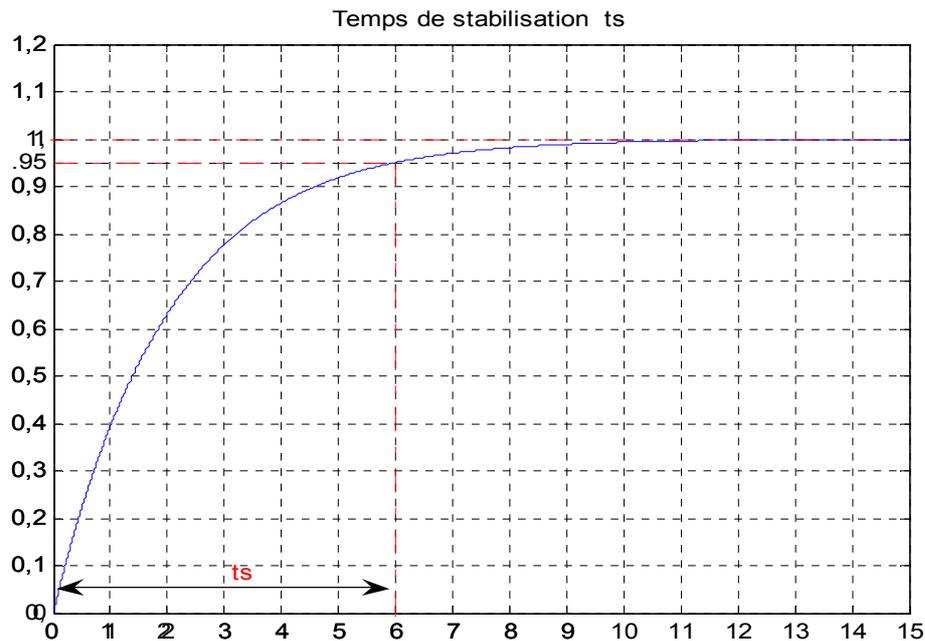


Fig. 8.4

t_r : le temps de réponse à 95% de $s(\infty)$ pour les systèmes apériodiques.

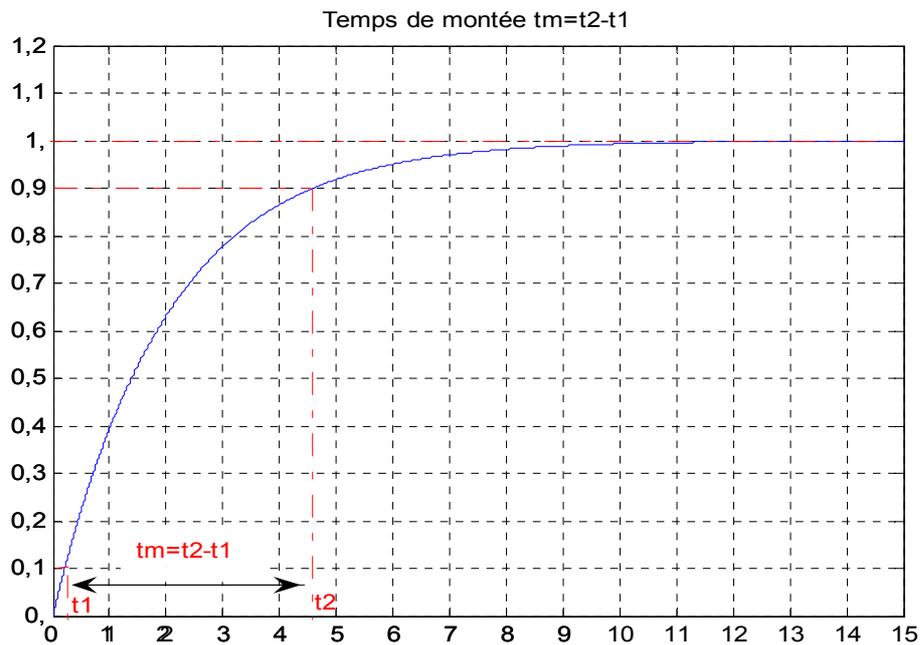


Fig. 8.5

t_m : le temps mis pour passer de 10% de $s(\infty)$ à 90% de $s(\infty) \Rightarrow$ C'est le temps de montée.

t_p : C'est le temps mis pour atteindre le 1^{er} dépassement \Rightarrow C'est le temps de pic.

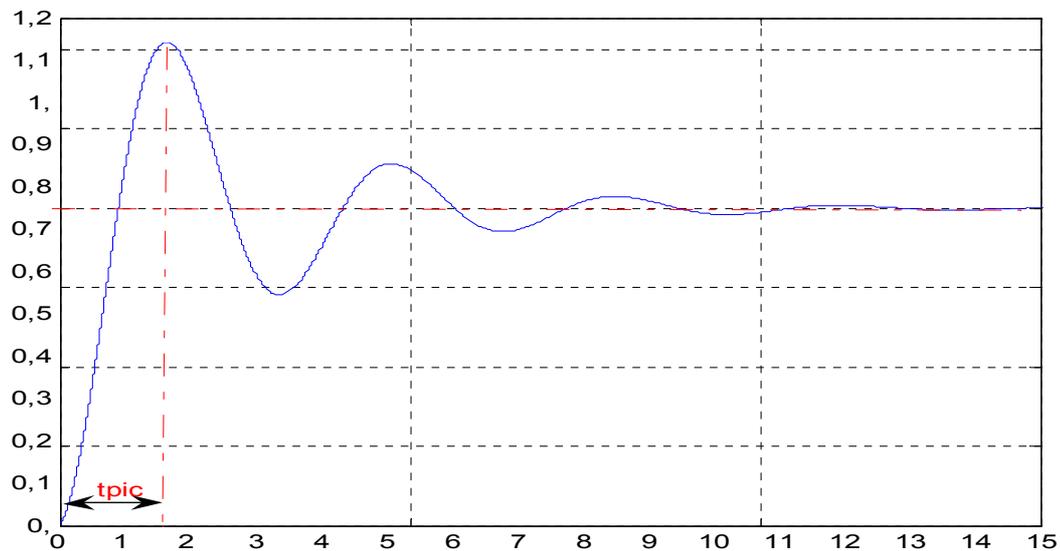


Fig. 8.6

La rapidité s'exprime par le temps de stabilisation qui correspond au temps nécessaire pour que l'erreur ε_r à une consigne constante devienne $\leq 5\%$ de la consigne

$$\left| \frac{y_c - y(t)}{y_c} \right| \leq 5\%$$

3.2. Rappel sur le système de 2^{ème} ordre

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{b}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{\frac{b}{a_2}}{p^2 + \frac{a_1}{a_2} p + \frac{a_0}{a_2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}},$$

$$2m\omega_0 = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow 4m^2\omega_0^2 = \frac{a_1^2}{a_2^2},$$

$$4m^2 = \frac{a_1^2}{a_2^2\omega_0^2} = \frac{a_1^2}{a_2^2 \frac{a_0}{a_2}},$$

$$4m^2 = \frac{a_1^2}{a_2 a_0},$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

$$t_s = \frac{3}{m\omega_0} \quad (\hat{a} \pm 5\%).$$

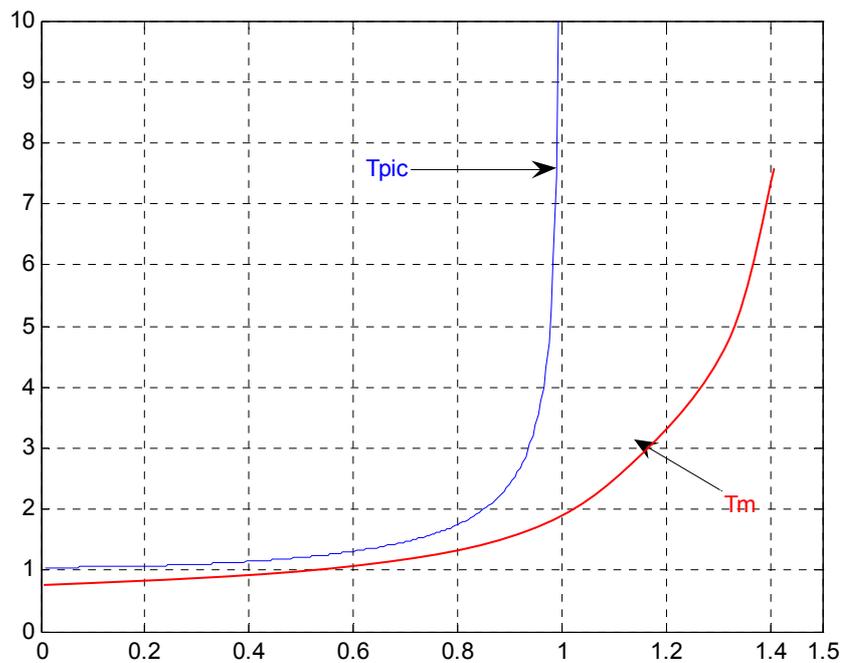


Fig. 8.7

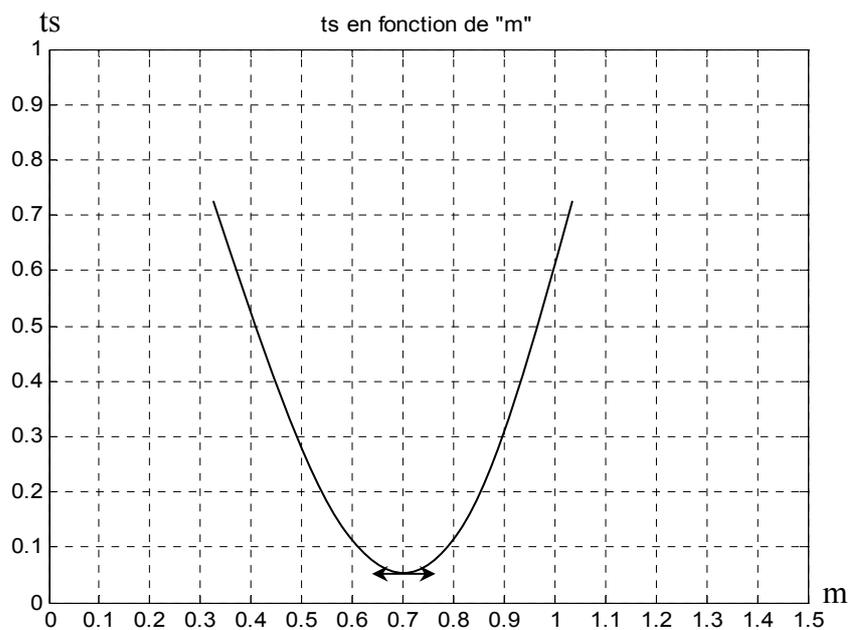


Fig. 8.8

On constate que le temps de pic et le temps de montée diminuent.

Le temps t_s diminue si m croît de 0 à 0.7 puis augmente avec m .

Le temps de réponse le plus court est obtenu pour $m=0.7$. En particulier $m=0.7$ est considéré comme la valeur optimale pour des nombreux systèmes.

La rapidité d'un système de second ordre est étroitement liée à m .

Pour un système asservi d'ordre quelconque, on va étudier de même l'amortissement.

3.2.1. Critère algébrique d'amortissement : Critère de Naslin

$$H(p) = \frac{b}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Par analogie avec les systèmes de second ordre, on définit les rapports caractéristiques :

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} ; \alpha_3 = \frac{a_3^2}{a_2 a_4} ; \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_{n-3}} \Rightarrow \alpha_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1} a_{i+1}}$$

Le critère algébrique d'amortissement :

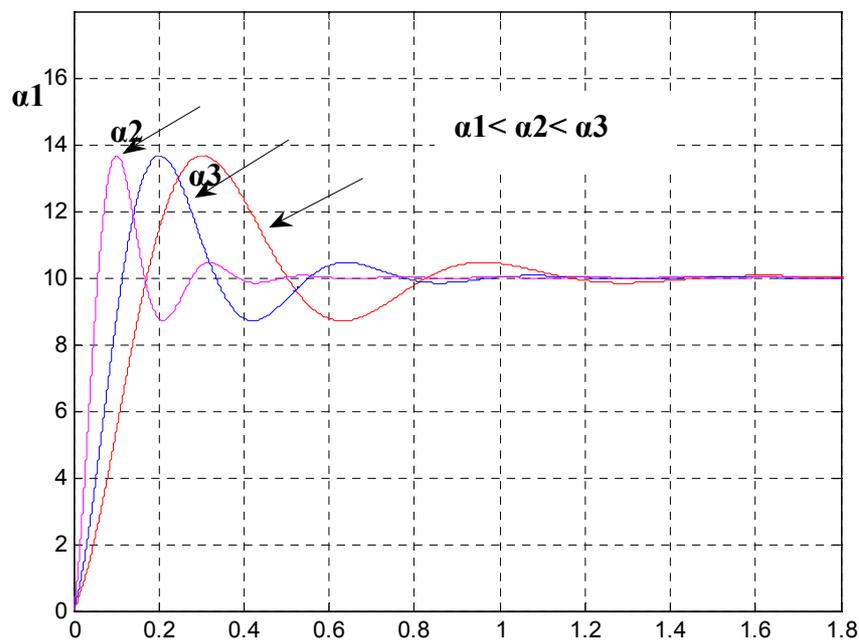


Fig. 8.9

Le critère algébrique d'amortissement impose aux valeurs α_i d'être \geq à une valeur α bien déterminée.

α	1,6	1,75	2	2,4
D%	40%	20%	6%	1%
m	0.3	0.45	0.7	0.9

Tab.8.7

Pour un système d'ordre 2 on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} D\% = 100e^{\frac{-\pi}{\sqrt{1-m^2}}} \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D\% = 4,8 - 2\alpha \\ t_p = 2,2 \frac{a_1}{a_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Systèmes d'ordre élevés.}$$

3.2.2. Application

Déterminer la valeur de K qui garantie un dépassement D (%) <6% si on a :

$$H(p) = \frac{K}{8p^3 + 21p^2 + 10.5p + (1+K)}$$

Correction

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} = \frac{5,25}{1+K}$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} = 5,25$$

$$D \leq 6\%$$

$$\alpha \geq 2$$

$$\frac{5,25}{1+K} \geq 2$$

$$\frac{5,25}{2} \geq 1+K$$

$$K \leq \frac{5,25}{2} - 1 = 1,625$$

$$K \leq 1.625$$

4. Précision d'un système asservi :

La précision d'un système asservi est étroitement liée à l'erreur statique entre la consigne et la sortie réelle mesurée.

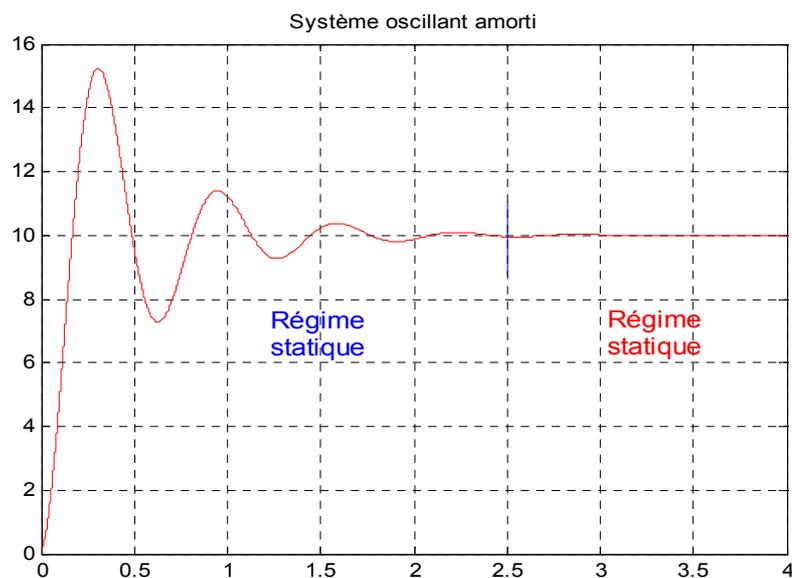


Fig. 8.10

8.1. Système à retour unitaire

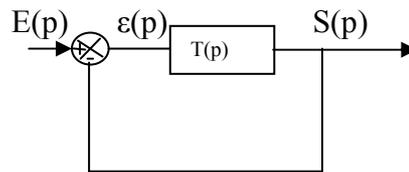


Fig. 8.11

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= E(p) - S(p) \\ [1 + T(p)]\varepsilon(p) &= E(p) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + T(p)} \end{aligned}$$

Ainsi, on définit deux régimes de fonctionnement :

- Régime statique : erreur statique.
- Régime transitoire : erreur dynamique.

- Un système est précis si l'erreur statique est nulle.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \varepsilon(\infty)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + T(p)} = \varepsilon(\infty)$$

Remarques

- si $\varepsilon(\infty) = 0 \Rightarrow$ le système est totalement précis.
- l'erreur statique dépend de l'entrée et dépend aussi du système.

- Classe d'un système asservi

$$T(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

$$T(p) = \frac{K(1 + \dots)}{p^\alpha (1 + \dots)} \Rightarrow \alpha \text{ est appelé classe du système (nombre d'intégration).}$$

$$\text{Si } p \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad T(p) = \frac{K}{p^\alpha}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + T(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + \frac{K}{p^\alpha}}$$

Application

$$\alpha = 1$$

$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{E_0}{p + K} = 0 \Rightarrow \varepsilon(\infty) = 0$$

α	0	1	2	3
Entrée				
Impulsion $e(t) = E_0 \delta(t)$	0	0	0	0
Echelon de position $e(t) = E_0 u(t)$	$\frac{E_0}{1 + K}$	0	0	0
Echelon de vitesse $e(t) = E_0 t u(t)$	∞	$\frac{E_0}{K}$	0	0
Echelon d'accélération $e(t) = \frac{E_0}{2} t^2 u(t)$	∞	∞	$\frac{E_0}{K}$	0

Tab.8.8

Remarques

- La précision augmente si α augmente.
- L'erreur statique pour une entrée impulsionnelle est nulle pour tout valeur de α .
- Pour une classe donnée, la précision se détériore si le signal d'entrée plus dur.
- On appelle erreur statique de position dans le cas où l'entrée est un échelon de vitesse.

4.2. Calcul de $\varepsilon(\infty)$ pour différents systèmes

8.2.1. Système à 2 entrées

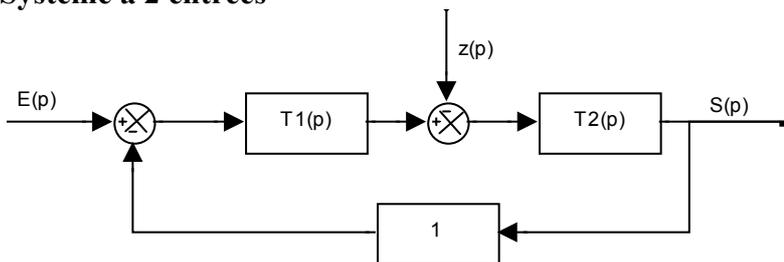


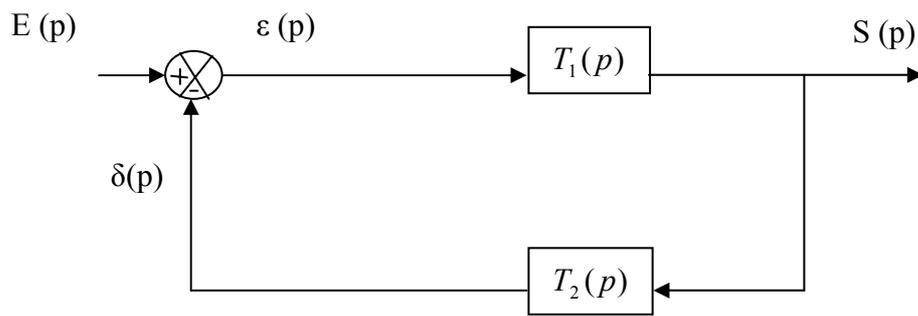
Fig. 8.12

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

$$\text{Or } S(p) = T_2(p)[T_1(p)\varepsilon(p) - z(p)]$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - T_2(p)T_1(p)\varepsilon(p) + T_2(p)z(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + T_1(p)T_2(p)} + \frac{T_2(p)z(p)}{1 + T_1(p)T_2(p)}$$

4.2.3. Système à retour non unitaire :**Fig. 8.13**

$$\varepsilon(p) = E(p) - \delta(p) = E(p) - T_2(p)T_1(p)\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p)[1 + T_2(p)T_1(p)] = E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + T_1(p)T_2(p)}$$

Chapitre 9

Etude Harmonique des Systèmes d'Ordre élevé ($n > 2$)

1. Introduction

L'étude de la stabilité par la détermination des pôles nécessite la connaissance de la fonction de transfert en boucle fermée ou l'équation différentielle qui décrit le système.

Souvent, on ne dispose pas de $T(p)$ (fonction de transfert en boucle ouverte) analytiquement par contre des essais expérimentaux sont possibles.

On dispose alors de tracer le diagramme de Nyquist (ou Bode ou Black) qui nous permet d'étudier la stabilité du système. On dit qu'on étudie la stabilité du système en boucle fermée à partir du tracé en boucle ouverte.

2. Critères géométriques

3.3. Critère de Nyquist

$$H(p) = \frac{T(p)}{1+T(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

$$\text{Equation caractéristique } = 1 + T(p) = 0 \Rightarrow T(p) = -1 \Leftrightarrow X + jY = -1$$

Le point $(-1,0)$ est un point critique

$$\begin{cases} |T(j\omega)| = 1 \\ \arg(-1) = \pi \end{cases}$$

* Critère de Rovers sur le plan de Nyquist

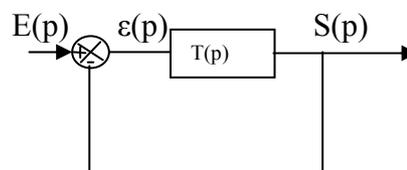


Fig. 9.1 : Schéma fonctionnel

Un système est stable en boucle fermée si le lieu de Nyquist en boucle ouverte parcouru dans le sens des croissants laisse à sa gauche le point critique $(-1,0)$.

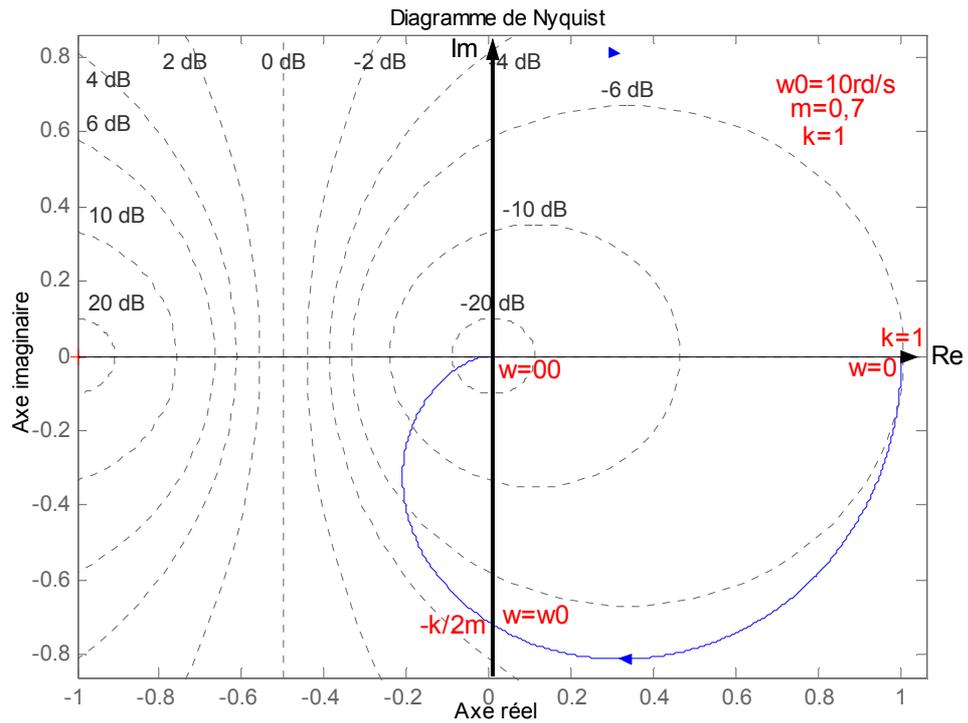


Fig. 9.2 : Diagramme de Nyquist

Exemples

1/ On donne le schéma fonctionnel suivant :

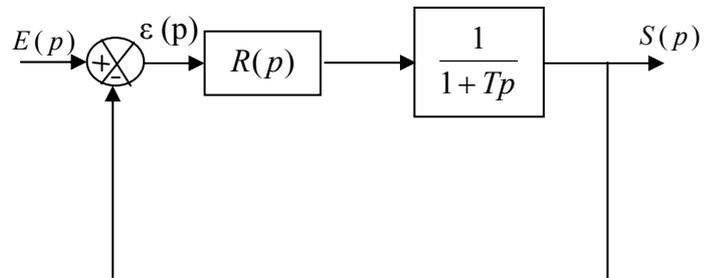


Fig. 9.3 : Schéma fonctionnel

1. $R(p)=K_1$

$$T(p) = \frac{K_1}{1+Tp}$$

2. $R(p)=K_2$, $K_2 > K_1$

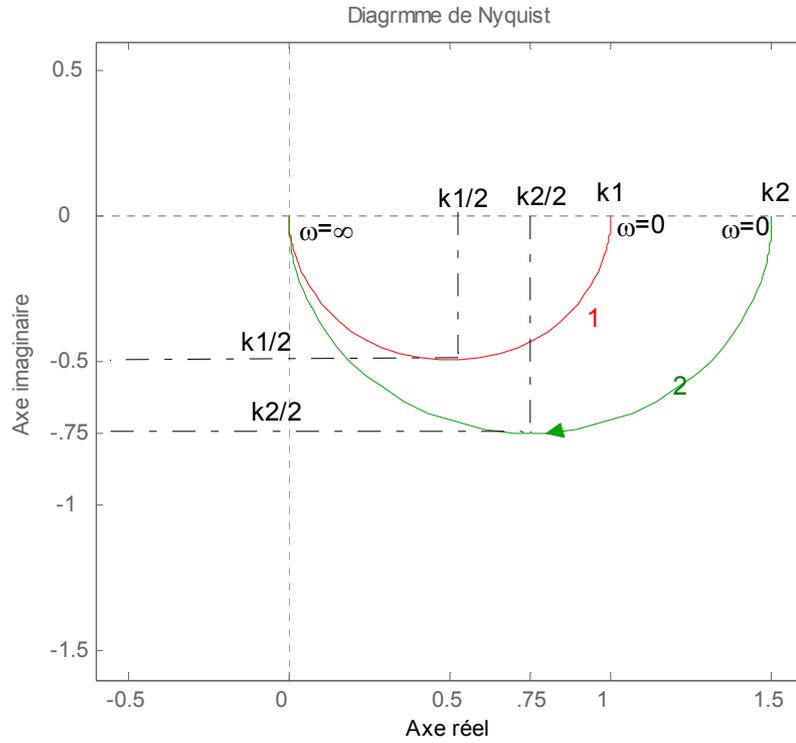


Fig. 9.4

1 et 2 sont deux systèmes stables.

2/

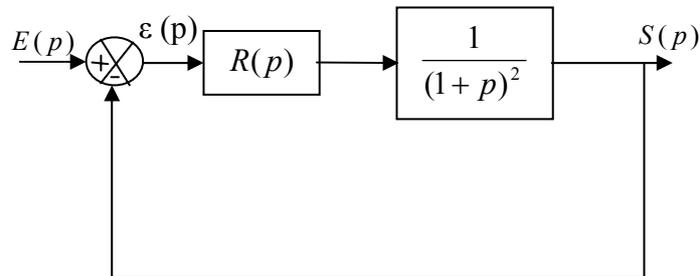


Fig. 9.5

1. $R(p) = K1$

$$T(p) = \frac{k_1}{(1+p)^2}$$

2. $R(p) = \frac{A1}{p}$

$$T(p) = \frac{A_1}{p(1+p)^2}$$

3. $R(p) = \frac{A_2}{p}$; $A_2 > A_1$

$$T(p) = \frac{A_1}{p(1+p)^2}$$

Système 1 : stable

Système 2 : instable

- **Degré de stabilité : Marge de gain et marge de phase**

- **Marge de gain**

Soit deux systèmes de transmittances $T_1(p)$ et $T_2(p)$ en boucle ouverte

(1) est plus stable que (2)

la notion de marge de gain permet de quantifier l'intuition précédente

$$Mg_1 = \frac{1}{OA_1} ; Mg_2 = \frac{1}{OA_2}$$

$$Mg_{dB} = 20 \log Mg = 20 \log \frac{1}{OA} = -20 \log OA \quad \text{or } OA < 1 \Rightarrow Mg_{dB} > 0$$

Remarque

C'est une condition nécessaire mais non suffisante.

Donc il faut déduire en plus la marge de phase pour quantifier la stabilité.

- **Marge de phase**

$M_\phi = \pi + \arg(T(j\omega_0))$ tel que $|T(j\omega_0)| = 1$

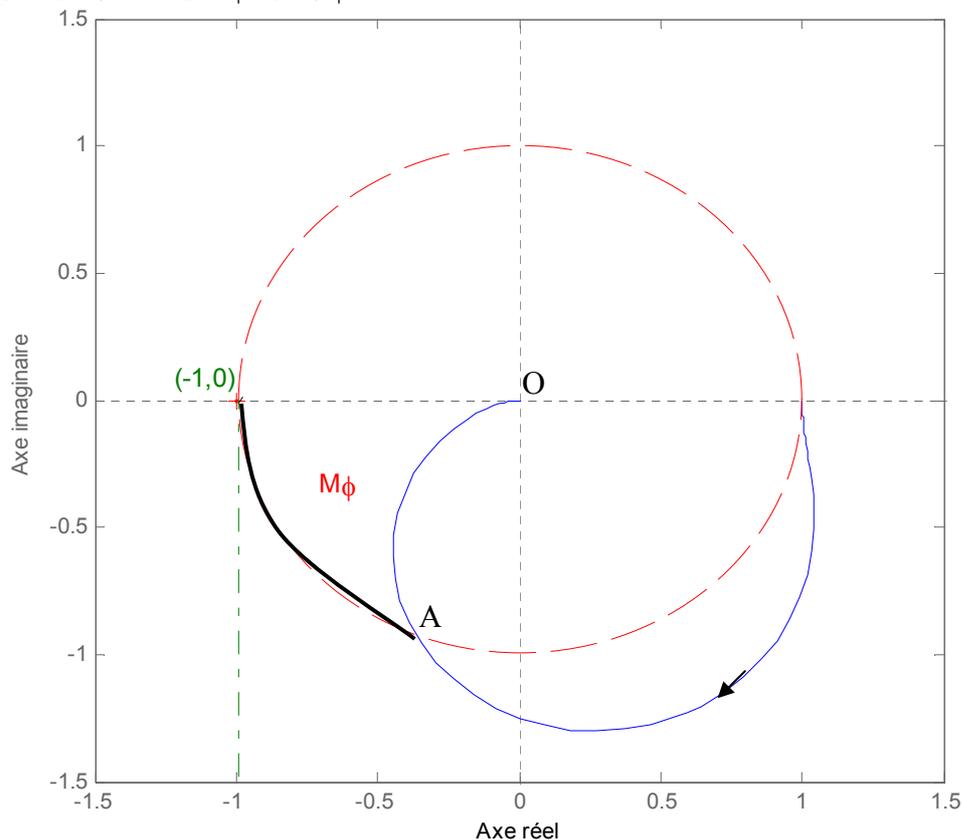


Fig. 9.6

$$\left. \begin{array}{l} Mg > 0 \\ M_\phi > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Système stable}$$

3.4. Application au plan de Bode

$$T_{dB} = f(\omega) ; \quad \varphi = f(\omega)$$

$$M_\varphi = \pi + \arg(T(j\omega_1)) \quad \text{et} \quad Mg = -|T(j\omega_0)|$$

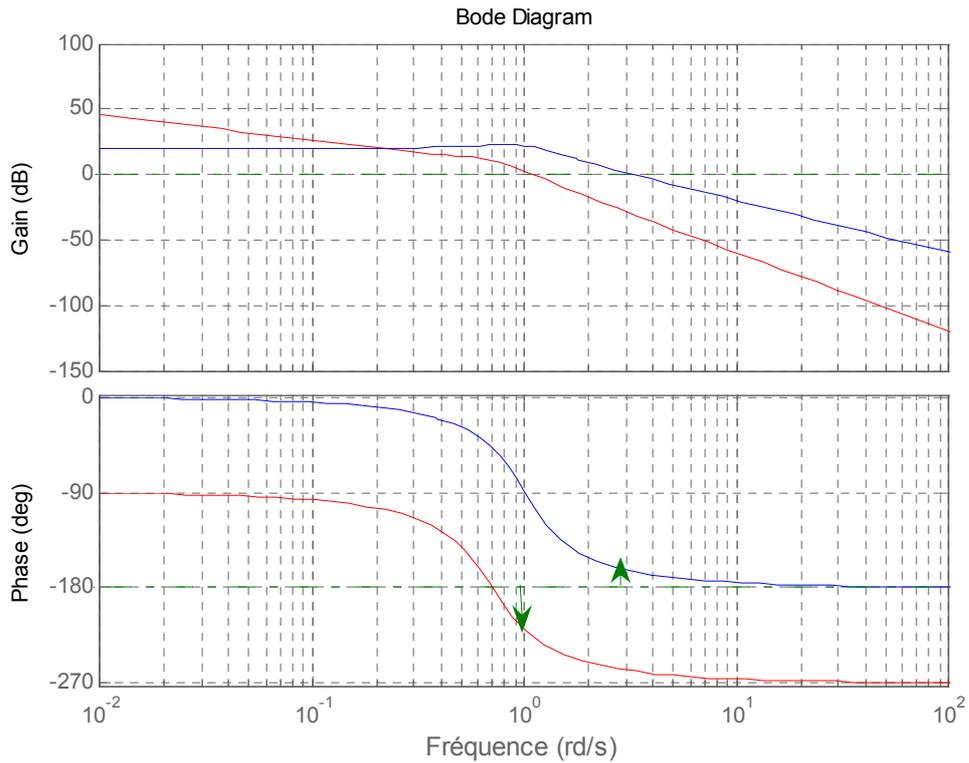


Fig. 9.7

(1 : bleu) Système stable : $Mg > 0; M\varphi > 0$

(2 : rouge) Système instable : $M\varphi < 0$

3.5. Application au plan de Black

$$T_{dB} = f(\varphi)$$

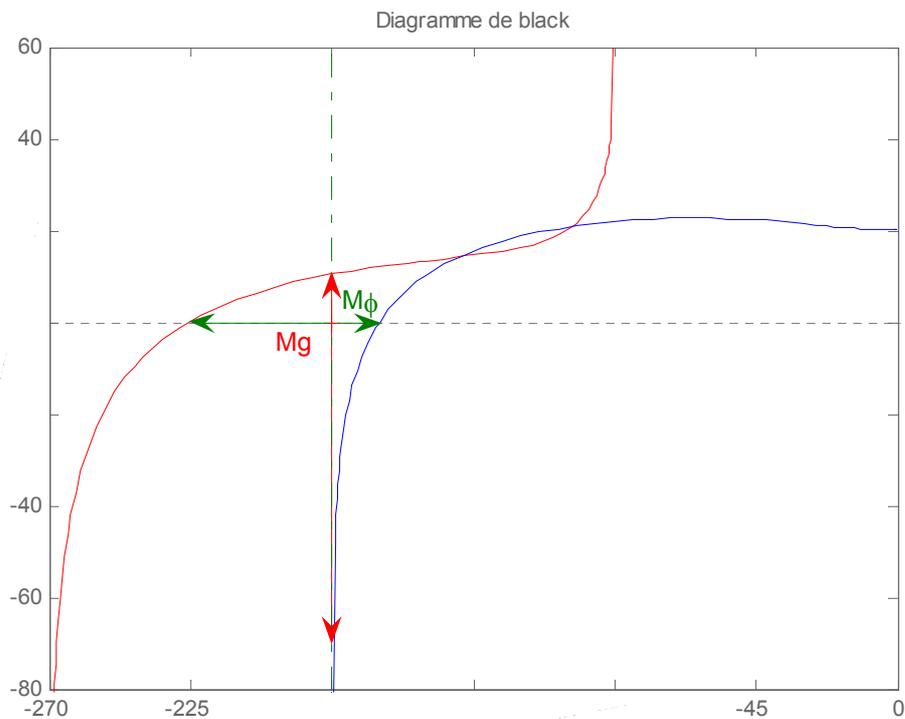


Fig. 9.8

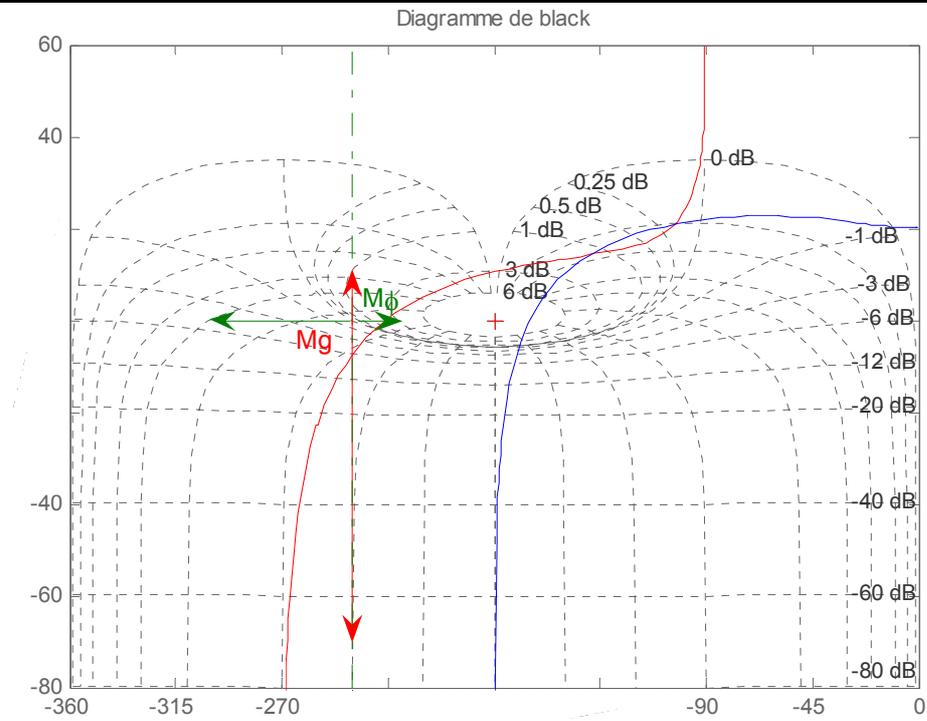


Fig. 9.9

$$M_{\phi} = \pi + \arg(T(j\omega_1)) \text{ tel que } |T(j\omega_1)| = 0$$

$$M_g = |T(j\omega_2)| \text{ tel que } \text{Arg}(T(j\omega_2)) = -\pi$$