Unité d'enseignement : **Automatique 1**

ECUE n° 1 : **Signaux et Systèmes Linéaires**

Chapitre 5

Système de 1^{er} Ordre

Nombre d'heures/chapitre : 3h

Cours intégré

Système d'évaluation : **Continu**

OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT :

-Savoir manipuler les techniques de représentation des systèmes

CONTENU THEORIQUE :

Dans ce chapitre on définie un système de 1^{er} ordre tout en donnant leur caractéristiques selon les réponses de ce système à quelques signaux canoniques comme une impulsion et un échelon tout en détaillant par des applications explicatifs.

En second lieu on définie le système de 1^{er} ordre généralisé tout en montrant sa réponse indicielle

Système de 1^er Ordre

1. Définition

Un système est dit de 1^er ordre s'il est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = ke(t) \Rightarrow \tau pY(p) + Y(p) = kE(p) \Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k}{1+\tau p}}$$

K : gain statique

τ: constante du temps.

2. Réponse d'un système de 1^er ordre à quelques signaux canoniques

2.1.Réponse à un échelon

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k}{1+\tau p} \quad \Rightarrow \quad Y(p) = \frac{k}{1+\tau p}E(p)$$

$$E(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad Y(p) = \frac{k}{p(1+\tau p)} \quad \text{donc} \quad \boxed{y(t) = k(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

* si $t \to 0; \quad y(t) \to 0$

** si $t \to \infty; \quad y(t) \to k$

$k = \underset{\rightarrow}{\lim} \quad y(t)$ pour $e(t) = 1u(t)$

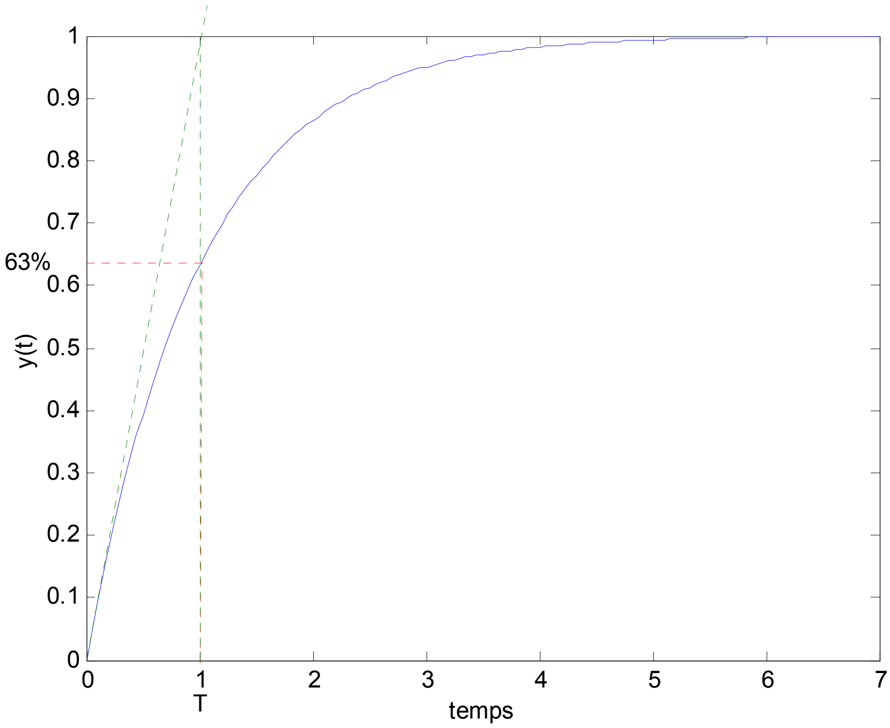

Fig.5.1 : Réponse indicielle d'un système de 1^er ordre (KE=1).

*** $e(t) = Eu(t) \quad \Rightarrow \quad Y(p) = \dfrac{kE}{p(1+\tau p)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = kE(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

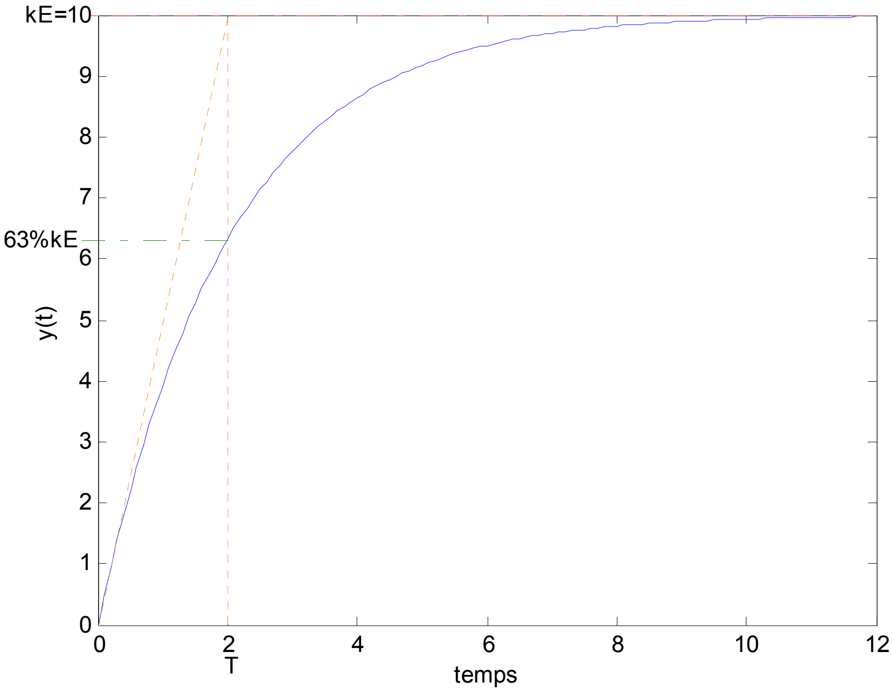

Fig.5.2 : Réponse indicielle d'un système de 1er or ordre (KE=1).

$$\boxed{y(\infty) = kE = \underset{\rightarrow}{\lim} \; y(t) = \underset{\rightarrow}{\lim} \; pY(p)}$$

2.2.Réponse à une impulsion $e(t) = \delta(t) = 1$ pour $t = 0$

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k}{1+\tau p} \quad \Rightarrow \quad Y(p) = \frac{k}{1+\tau p} E(p)$$

$$E(p) = 1 \quad \Rightarrow \quad Y(p) = \frac{k}{1+\tau p} = \frac{k}{\tau} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\tau} + p} \right) \quad \text{donc} \quad \boxed{y(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

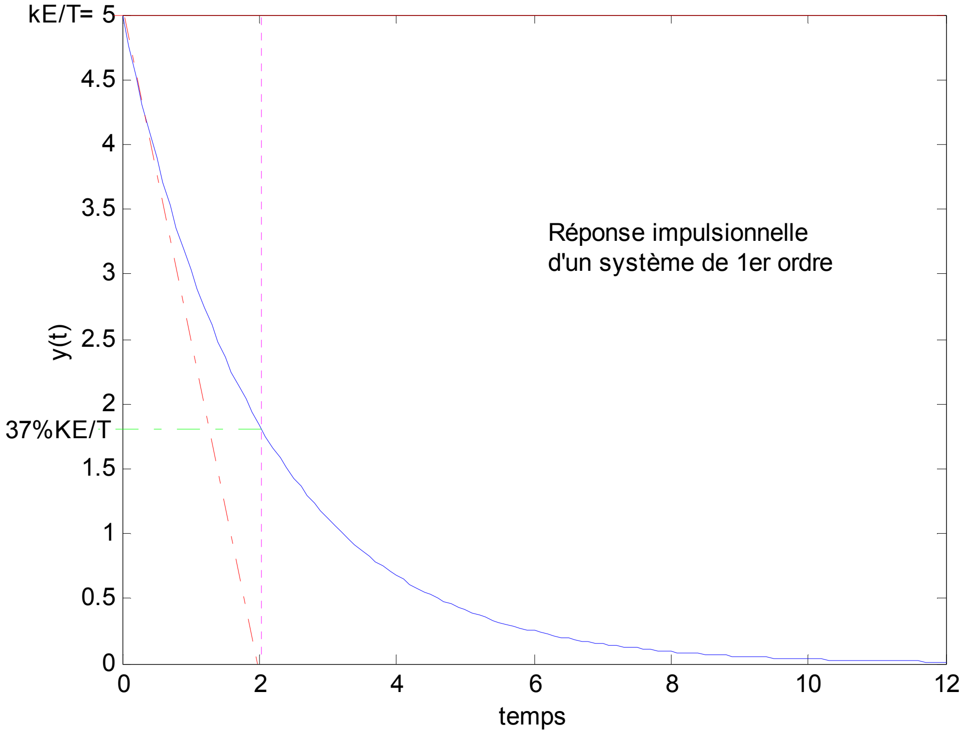

Fig.5.3 : Réponse impulsionnelle d'un système de 1er ordre (KE=10).

* si $t \to 0; \quad y(t) \to \frac{k}{\tau}$

** si $t \to \infty; \quad y(t) \to 0$

*** $\delta(t) = E \quad \Rightarrow \quad Y(p) = \frac{kE}{1+\tau p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{kE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$

2.3. Applications

Exercice 1

Soit le montage RC suivant :

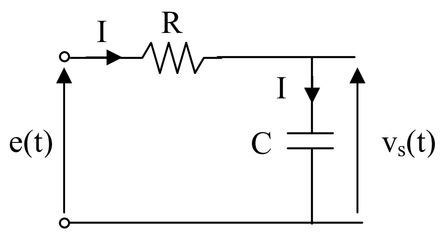

Fig.5.4 : Circuit RC série.

1. Déterminer $H(p) = \frac{V_s(p)}{E(p)}$
2. Déduire la nature du système ainsi que ses paramètres caractéristiques en fonction de R et C.
3. Pour $e(t) = 10u(t), R = 100\Omega$ et $C = 1\mu F$; calculer et tracer $v_s(t)$.

Correction

1. $e(t) = Ri(t) + v_s(t)$

$$e(t) = RC\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = RCV_s(p) + V_s(p)$$

Donc $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{E(p)} = \dfrac{1}{1+RCp}$

2. C'est un système de 1[er] ordre avec k=1 et $\tau = RC$

3. $V_s(p) = \dfrac{1}{1+RCp}E(p)$ avec $E(p) = \dfrac{10}{p}$; $\tau = RC = 100x10^{-6} = 10^{-4}\,s$

$$V_s(p) = \frac{10}{p(1+10^{-4}p)} \quad \Rightarrow \quad v_s(t) = 10(1-e^{-\frac{t}{10^{-4}}}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_s(t) = 10(1-e^{-10^4 t})}$$

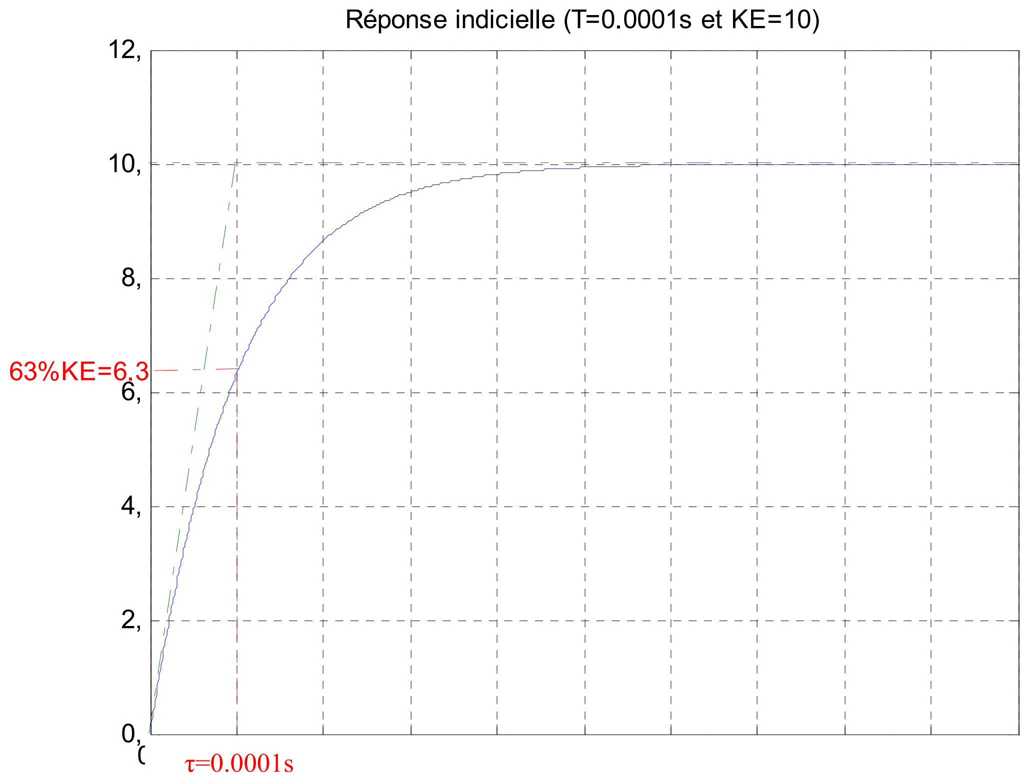

Fig.5.5 : Réponse indicielle (KE=10).

Exercice 2

1. Soit le montage RL suivant :

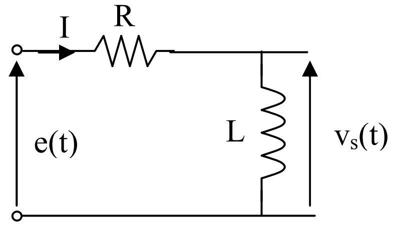

Fig.5.6 : Circuit RL série.

2. Déterminer $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{E(p)}$
3. Représenter $v_s(t)$ pour $e(t) = 2u(t), R = 100\Omega$ et $L = 1mH$

Correction

1. $e(t) = Ri(t) + v_s(t)$

$v_s(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \dfrac{1}{L}\int v_s(t)dt$

$e(t) = \dfrac{R}{L}\int v_s(t)dt + v_s(t) \Rightarrow E(p) = \dfrac{R}{Lp}V_s(p) + V_s(p)$

$$\Rightarrow E(p) = (\frac{R}{Lp} + 1)V_s(p)$$

$$\Rightarrow \frac{V_s(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Lp}} = \frac{\frac{L}{R}p}{1 + \frac{L}{R}p}$$

Donc $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{E(p)} = \dfrac{\frac{L}{R}p}{1 + \frac{L}{R}p}$ avec k=1 et $\tau_1 = \dfrac{L}{R}$ et $\tau_2 = \dfrac{L}{R}$.

3. Système de 1^er ordre généralisé

3.1. Définition

Un système de 1^er ordre généralisé est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\tau_2 \frac{dy}{dt} + y(t) = k[\tau_1 \frac{de(t)}{dt} + e(t)]$$

$$\Rightarrow \tau_2 pY(p) + Y(p) = k[\tau_1 pE(p) + E(p)]$$

$$\Rightarrow Y(p)[\tau_2 p + 1] = kE(p)[\tau_1 p + 1]$$

$$\Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = k(\frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_2 p})}$$

Soit $\underline{\tau_1 = \alpha\tau_2}$; alors $\boxed{H(p) = k(\frac{1 + \alpha\tau_2 p}{1 + \tau_2 p})}$

3.2. Exercice

Déterminer et représenter la réponse à un échelon de vitesse (rampe) d'un système de 1er ordre dont la fonction de transfert est : $H(p) = \dfrac{k}{1+\tau p}$.

4. Réponse indicielle

$$Y(p) = k\frac{1+\alpha\tau_2 p}{1+\tau_2 p}E(p)$$

$$Y(p) = k\frac{1+\alpha\tau_2 p}{1+\tau_2 p}\frac{E_0}{p} \Rightarrow \boxed{Y(p) = \frac{kE_0}{p} + \frac{(\alpha-1)\tau_2 kE_0}{1+\tau_2 p}}$$

$$y(t) = kE_0(\alpha-1)\tau_2(1-e^{-\frac{t}{\tau_2}}) + kE_0 e^{-\frac{t}{\tau_2}})$$

$$y(t) = kE_0\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \alpha e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$$

$$y(t) = kE_0\left[1+(\alpha-1)e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$$

* si $t \to 0;\quad y(t) = kE_0[1+(\alpha-1)] = kE_0\alpha$

** si $t \to \infty;\quad y(t) = kE_0$

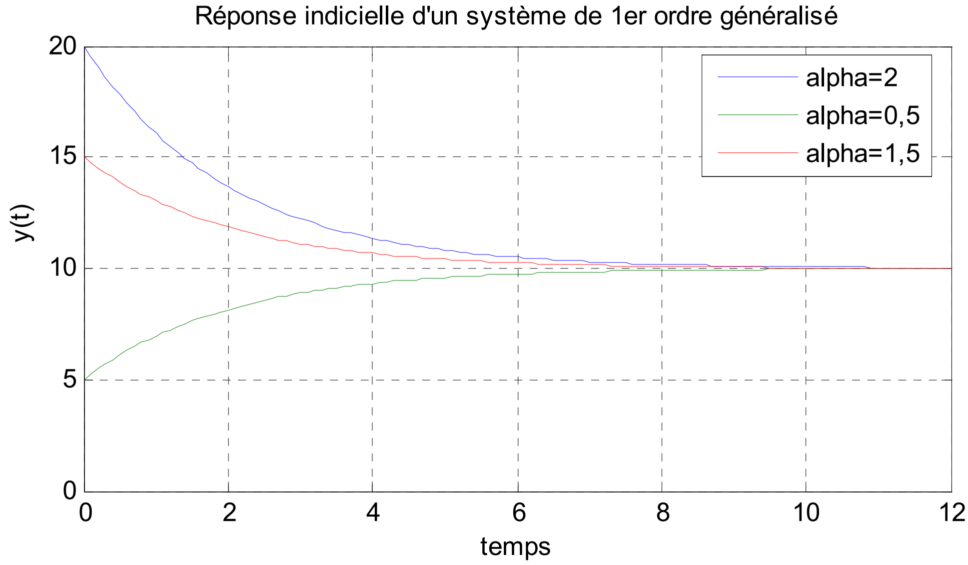

Fig.5.7 : Réponses indicielles d'un système 1er ordre généralisé pour différentes valeurs de α.

Exercices d'application

Déterminer la fonction de transfert des montages suivants :

1. Système de 1^er^ ordre à avance de phase

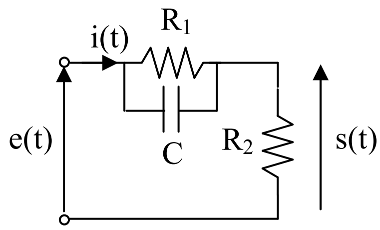

Fig.5.8

$$e(t) = v(t) + s(t)$$

$$E(p) = V(p)I(p) \text{ avec } Z(p) = \frac{R_1}{1+R_1Cp},\; I(p) = \frac{S(p)}{R_2} \text{ et } V(p) = Z(p)I(p)$$

$$E(p) = (\frac{Z(p)}{R_2} + 1)S(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{R_2}{R_2 + Z(p)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1+R_1Cp}} = \frac{R_2(1+R_1Cp)}{R_1 + R_2 + R_1R_2Cp}$$

$$\Rightarrow \quad H(p) = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+R_1Cp}{1+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cp}$$

$$k = \frac{R_2}{R_1+R_2} \;;\; \tau_1 = R_1C \;;\; \tau_2 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$$

$$\tau_2 = \alpha\tau_1 \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \alpha = \frac{R_1+R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} > 1$$

Donc c'est un système de 1^er^ ordre à **avance de phase.**

2. Système à retard de phase

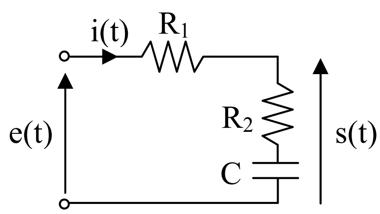

Fig.5.9

$$e(t) = R_1 i(t) + s(t)$$

$$I(p) = \frac{S(p)}{Z(p)} \text{ où } Z(p) = R_2 + \frac{1}{Cp} = \frac{R_2Cp+1}{Cp}$$

$$E(p) = (\frac{R_1}{Z} + 1)S(p)$$

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{Z}{R_1+Z}=\frac{\dfrac{R_2Cp+1}{Cp}}{R_1+\dfrac{R_2Cp+1}{Cp}}=\frac{1+R_2Cp}{1+(R_1+R_2)Cp}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{H(p)=\frac{1+R_2Cp}{1+(R_1+R_2)Cp}}$$

$$\tau_1=R_2C\ ;\ \tau_2=(R_1+R_2)C$$

$$\tau_2=\alpha\tau_1 \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2}=\alpha=\frac{R_2}{R_1+R_2}<1$$

Donc c'est un système de 1er ordre à **retard de phase.**