Unité d'enseignement : **Automatique 1**

ECUE n° 1 : **Signaux et Systèmes Linéaires**

Chapitre 6

Système de Second Ordre

Nombre d'heures/chapitre : 3h

Cours intégré

Système d'évaluation : **Continu**

OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT :

-Savoir manipuler les techniques de représentation des systèmes

CONTENU THEORIQUE :

Dans ce chapitre on donne la forme générale d'un système de 2^{nd} ordre ainsi que les paramètres caractéristiques de se système qui parvient d'une fonction de transfert et de son équation caractéristique suite a une transformée de Laplace.

Suite a cette définition paramétrique on détaille la réponse indicielle d'un système de second ordre tout en montrons leur conditions de stabilités que se soit l'emplacement des pôles ou bien l'effet paramétrique de se système sur sa réponse.

Système de Second Ordre

1. Définition

Un système de second ordre est un système décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\boxed{\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = k\omega_0^2 e(t)}$$

Cas général :

$$a_2 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_2 \frac{d^2e(t)}{dt^2} + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

2. Paramètres

k : gain statique $k = \frac{s(\infty)}{e(\infty)}$

m : coefficient d'amortissement : ξ

ω_0 : pulsation propre.

3. Transformée de Laplace

Condition initiale nulle

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} \rightarrow \mathrm{p}^2 S(p)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} \rightarrow \mathrm{p}S(p)$$

4. Fonction de transfert et équation caractéristique

4.1. Fonction de transfert

H(p)= ?

$$\mathrm{p}^2 S(p) + 2m\omega_0 \mathrm{p}S(p) + \omega_0^2 S(p) = k\omega_0^2 \mathrm{E}(p) \quad \Rightarrow \quad \frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{H(p)} = \frac{k\omega_0^2}{\mathrm{p}^2 + 2m\omega_0 \mathrm{p} + \omega_0^2}}$$

4.2. Equation caractéristique

$$\boxed{\mathrm{D(p)} = \mathrm{p}^2 + 2m\omega_0 \mathrm{p} + \omega_0^2}$$

5. Réponse indicielle d'un système de second ordre

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{k\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = k\omega_0^2 \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$S(p) = k\omega_0^2 \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} E(p) \quad \text{avec } E(p) = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \quad S(p) = k\omega_0^2 \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$\Rightarrow \quad S(p) = k\omega_0^2 [\frac{a}{p} + \frac{b}{p-p_1} + \frac{c}{p-p_2}]$$

$$* \ a = \left.\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}\right|_{p=0} = \frac{1}{p_1 p_2}$$

$$* \ b = \left.\frac{1}{p(p-p_2)}\right|_{p=p_1} = \frac{1}{p_1(p_1-p_2)}$$

$$* \ c = \left.\frac{1}{p(p-p_2)}\right|_{p=p_2} = \frac{1}{p_2(p_2-p_1)}$$

$$\Rightarrow \quad S(p) = k\omega_0^2 \left[\frac{\frac{1}{p_1 p_2}}{p} + \frac{\frac{1}{p_1(p_1-p_2)}}{p-p_1} + \frac{\frac{1}{p_2(p_2-p_1)}}{p-p_2} \right]$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = k\omega_0^2 \left[\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_1(p_1-p_2)} e^{p_1 t} + \frac{1}{p_2(p_2-p_1)} e^{p_2 t} \right] u(t)$$

Donc $$\boxed{s(t) = \frac{k\omega_0^2}{p_1 p_2} \left[1 + \frac{p_2}{p_1-p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2-p_1} e^{p_2 t} \right] u(t)}$$

- D(p) = 0

  $\Delta = (m\omega_0)^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2\,(m^2 - 1)$

- **m=0** $\Rightarrow$ $D(p) = p^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = j\omega_0 \\ p_2 = -j\omega_0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = j\omega_0 \\ p_2 = -j\omega_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p_1 p_2 = \omega_0^2 \text{ et } p_1 - p_2 = 2j\omega_0$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = \frac{k\omega_0^2}{\omega_0^2}\left[1 - \frac{j\omega_0}{2j\omega_0}e^{j\omega_0 t} - \frac{j\omega_0}{2j\omega_0}e^{-j\omega_0 t}\right]$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = k\left[1 - \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{s(t) = k[1 - \cos\omega_0 t]}$$

C'est un système juste oscillant.

<u>Cas général</u> : $\boxed{s(t) = kE_0[1 - \cos\omega_0 t]}$

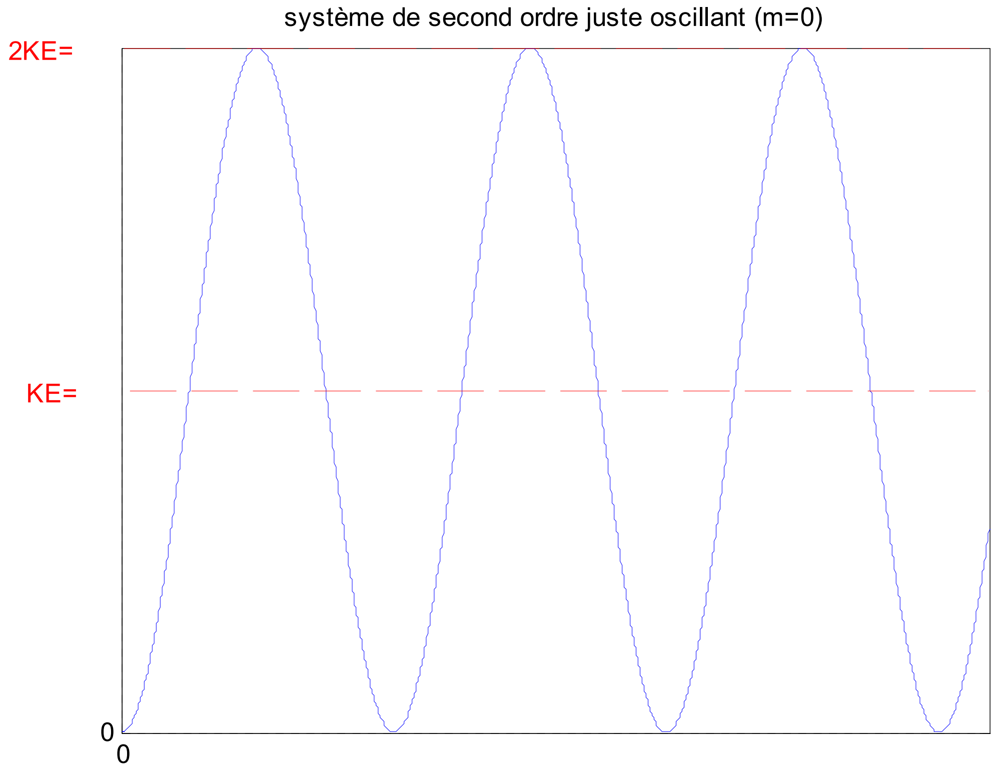

Fig.6.1: Réponse indicielle d'un système de 2nd ordre (m=0 : juste oscillant).

- **<u>m=1</u>** $\Rightarrow \quad D(p) = p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (p + \omega_0)^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad p_1 = p_2 = -\omega_0$$

$$\boxed{s(t) = kE_0\left(1 - (1 + \omega_0)e^{\omega_0 t}\right)}$$

- **<u>m>1</u>** $\Rightarrow \quad \Delta > 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1} = \omega_0(-m + \sqrt{m^2 - 1}) < 1 \\ p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1} < 1 \end{cases}$$

$$\boxed{s(t) = kE_0\left[1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1}e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1}e^{p_2 t}\right]}$$

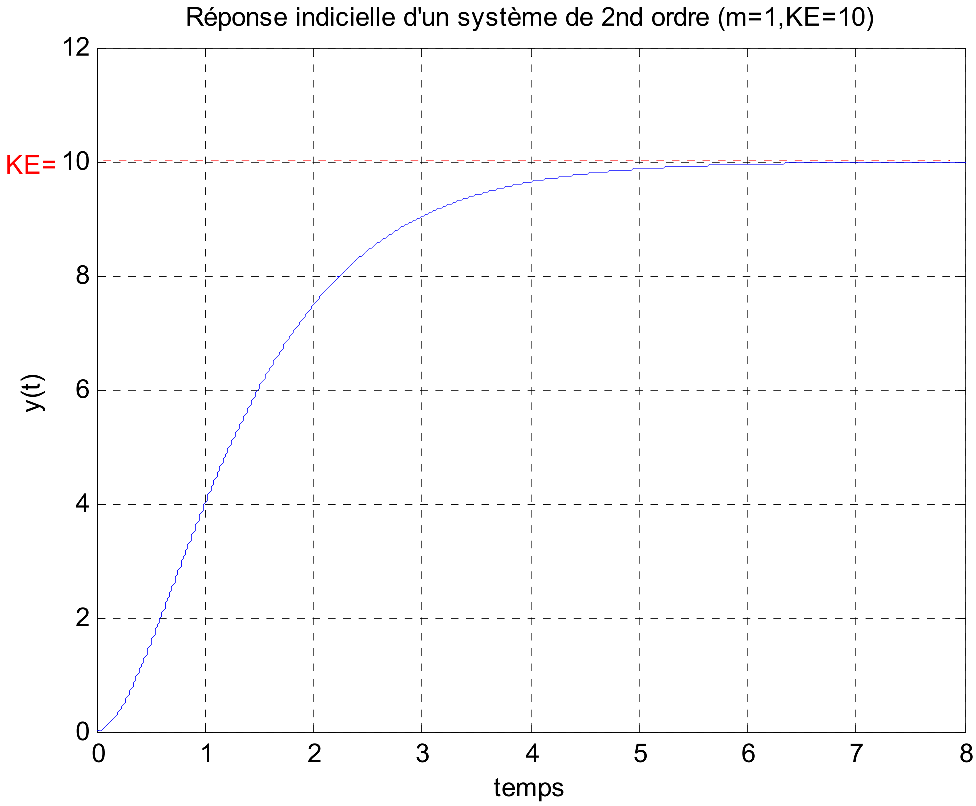

Fig.6.2: Réponse indicielle d'un système de 2nd ordre (m>1).

C'est un système hyperamorti.

- **<u>0<m<1</u>** $\Delta = \omega_0^2\ (m^2 - 1) < 0 \ \Rightarrow$ deux pôles complexes conjugués.

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \\ p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2} \end{cases}$$

$$\boxed{s(t) = kE_0\left[1 - e^{\frac{-m\omega_0 t}{\sqrt{1-m^2}}}\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t + \varphi)\right]}$$

Avec $\begin{cases} \varphi = arctg\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m} \\ \omega_p = \omega_0\sqrt{1-m^2} \end{cases}$

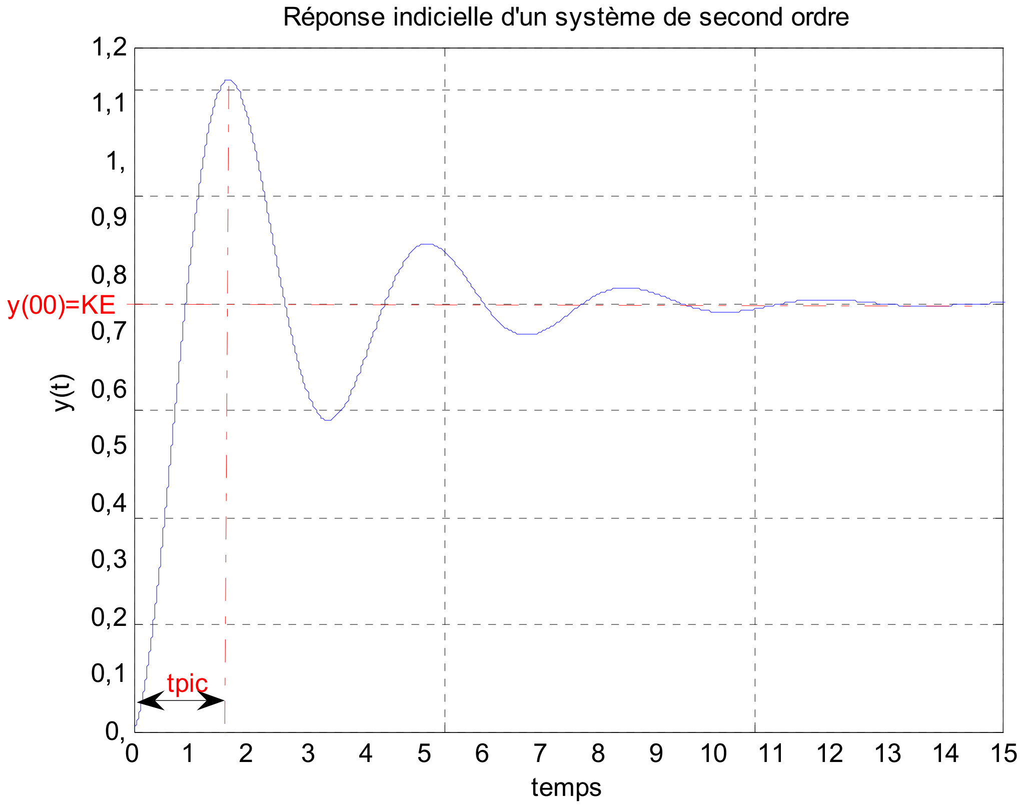

Fig.6.3: Réponse indicielle d'un système de 2nd ordre (0<m<1).

C'est un système oscillant amorti.

Exemple

Soit la fonction de transfert $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{4}{p^2+2}$

1. Déterminer m, ω_0 et k.
2. Représenter la réponse indicielle s(t).

----

1. * m=0

   * $\omega_0 = \sqrt{2}$ rd.s^{-1}

   * k.=2

2. $S(p) = \frac{4}{(p^2+2)} \frac{E_0}{p}$

   $s(t) = kE_0(1 - \cos\sqrt{2}\,t)$

   Donc $s(t) = 2E_0(1 - \cos\sqrt{2}\,t)$.

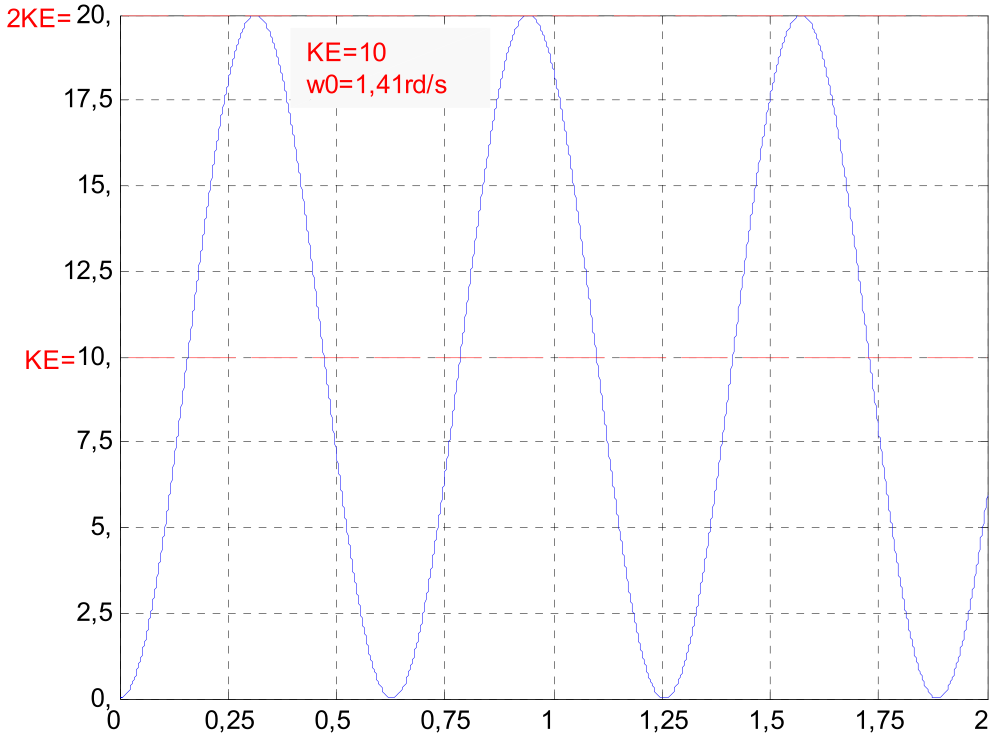

Fig.6.4: Réponse indicielle d'un système de 2nd ordre (m=0 : juste oscillant).

6. Placement des pôles

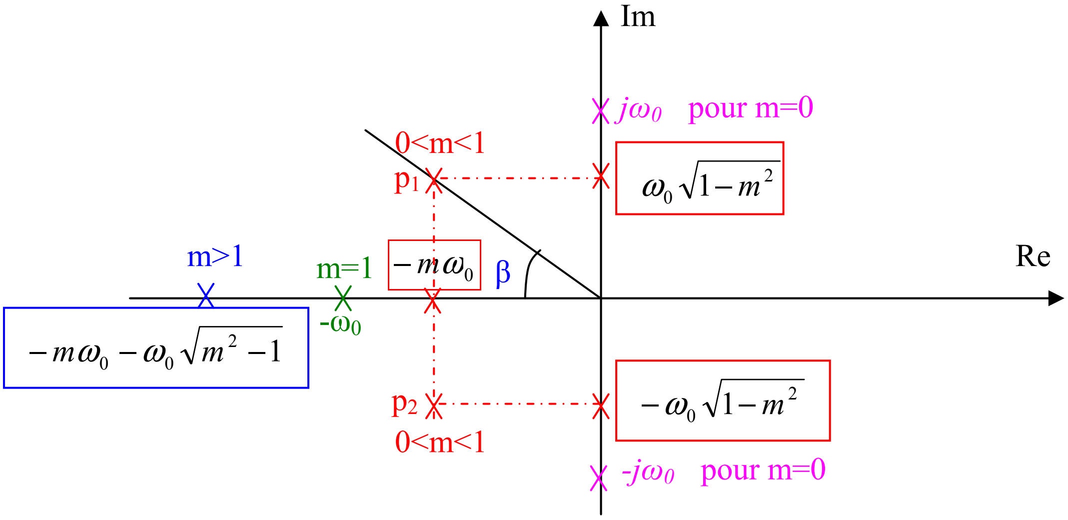

Fig.6.5: Lieux des pôles pour les différentes valeurs de « m »

$$\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{m\omega_0}{\sqrt{(m\omega_0)^2+\omega_0^2(1-m^2)}} = \dfrac{m\omega_0}{\omega_0} = m \\ \sin\beta = \dfrac{\omega_0\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{(m\omega_0)^2+\omega_0^2(1-m^2)}} = \sqrt{1-m^2} \end{cases}$$

7. Dépassement et temps de pic (0<m<1)

a. Dépassement

$$D\% = 100\,\frac{S\max - S(\infty)}{S(\infty)}$$

$$\boxed{D\,\% = 100\; e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}}$$

Pour : m=0 ➔ D%=100%

m=1 ➔ D%=0

b. Temps de pic

$$\boxed{T_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}}$$

c. Allures

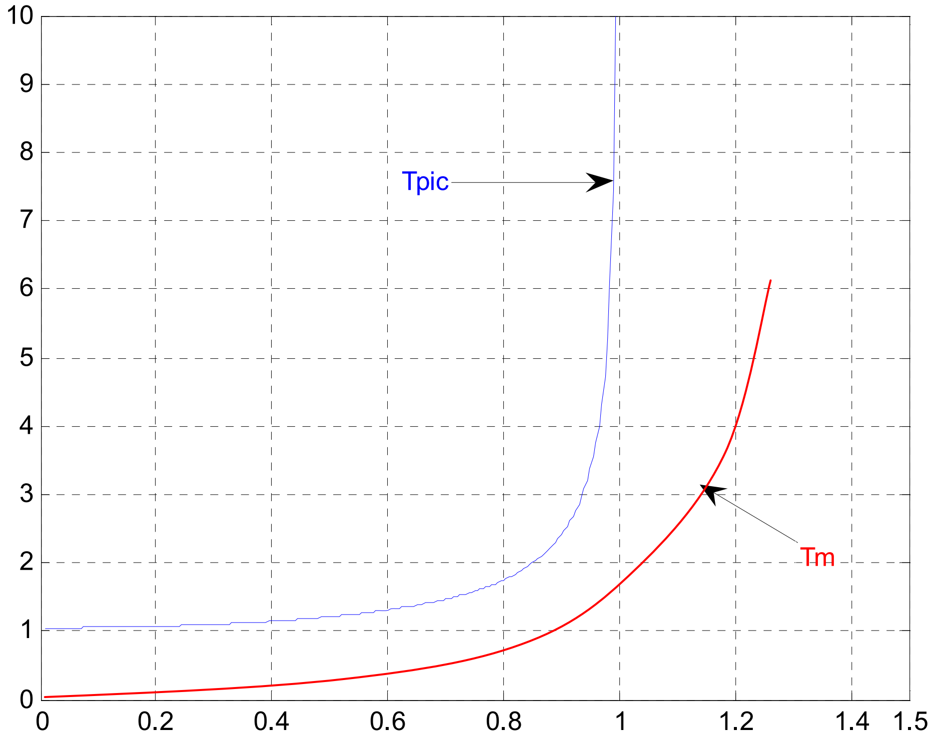

Fig.6.6: Allures de la variation du dépassement et temps de pic pour 0<m <1.

8. Temps de stabilisation

$$\boxed{t_s = \frac{4}{m\omega_0} \text{ à } \pm 2\%} \qquad \boxed{t_s = \frac{3}{m\omega_0} \text{ à } \pm 5\%}$$

Exercices

Ex 1

Soit le montage suivant :

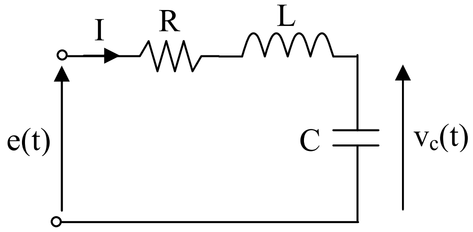

Fig.6.7: Circuit RLC série

1. Déterminer $H(p) = \dfrac{Vc(p)}{E(p)}$
2. Déterminer les paramètres caractéristiques du système en fonction de R, L et C.
3. Déterminer l'équation caractéristique.
4. Conclure sur la stabilité du système pour
5. Calculer s(t) pour e(t)=u(t).
6. Calculer D% , Tp et Ts à ±5%.

Ex 2

Soit un système décrit par sa fonction de transfert

$$H(p) = \frac{3}{p^2 + 2}$$

1. Déterminer m, ω_0 et k.
2. Déterminer s(t) et la représenter pour e(t)=2u(t).
3. Déduire la stabilité.

Ex 3

$$H(p) = \frac{3}{p^2 + 3p + 1}$$

Répondre aux mêmes questions de l'exercice 2.

Correction

Ex 2

1. m=0

   * $\omega_0 = \sqrt{2}$ rd.s^{-1}

   ➔2 k.=3 $\Rightarrow$ k=3/2

2. $e(t) = 2u(t)$

$$S(p) = \frac{3}{(p^2+2)}\frac{2}{p} = \frac{6}{(p^2+2)p} \quad \text{donc } s(t) = 3(1-\cos\sqrt{2}t)$$

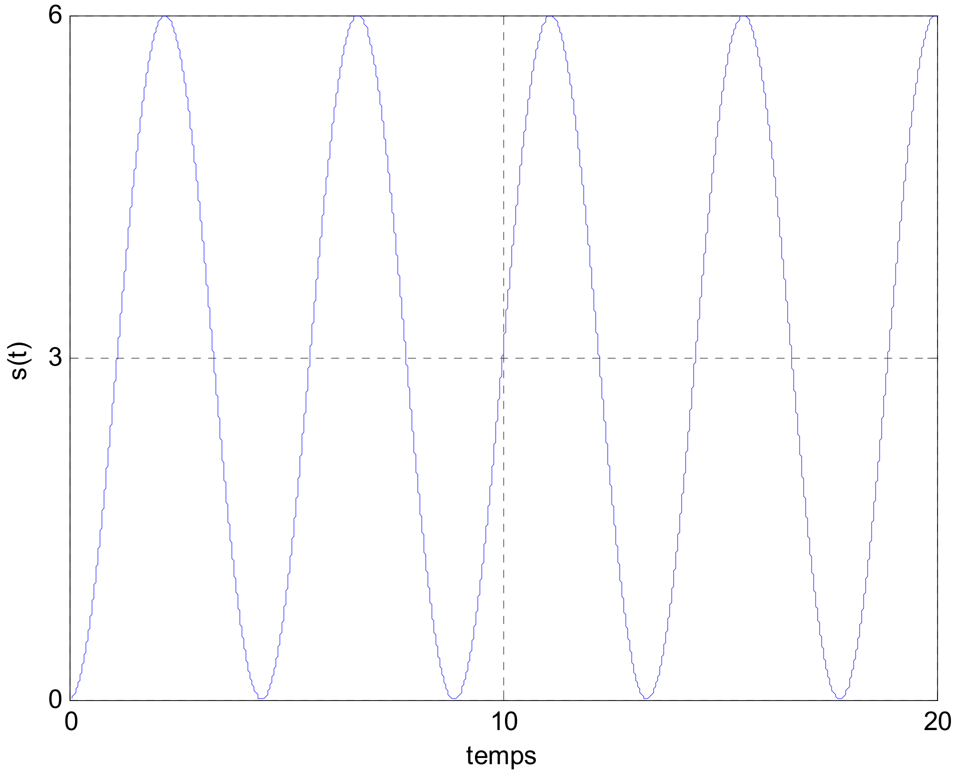

Fig.6.8

3.

$$\begin{cases} p_1 = j\sqrt{2} \\ p_2 = -j\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Système juste oscillant.}$$

<u>Ex 3</u>

$$H(p) = \frac{3}{p^2+3p+1}$$

1. * $\omega_0 = \sqrt{1} = 1$ rd.s^{-1}

   * $2m\omega_0 = 3$ donc $m = 3/2$

   ➔ $k\omega_0^2 = 3 \Rightarrow k=3$

2. $e(t) = 2u(t)$

$$s(t) = 6\left[1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1}e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1}e^{p_2 t}\right]$$

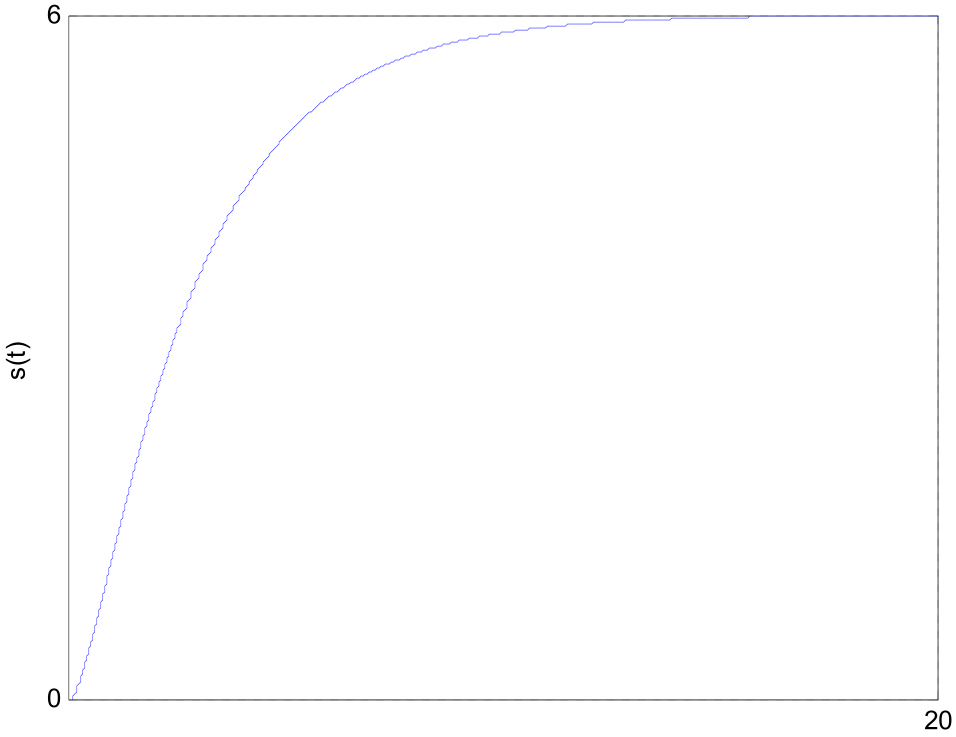

Fig.6.9

3. $\Delta = 9 - 4 = 5$

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1} \\ p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = -\dfrac{3}{2} + \sqrt{\dfrac{9}{4} - 1} = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ p_2 = -\dfrac{3}{2} - \sqrt{\dfrac{9}{4} - 1} = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$