2.3. Hydrodynamique

A-dédit

B-équation de continuité

C- théorème de Bernoulli

L'hydrodynamique :

est la partie de la Mécanique Des Fluides qui étudie le Mouvement, l'énergie et la pression des fluides.

Un liquide est en mouvement lorsque, au moins l'un de ses points matériel l'est.

En MDF, on utilise le mot écoulement à la place de mot mouvement

Hypothèses de travail :

- **Fluide parfait**
- **Fluide incompressible : Volume reste constant sous la pression ⇒ masse volumique constante**
- **Écoulement permanant**

Le régime d'écoulement (mouvement du fluide) est permanant , c-à-d, en un point (position) donné dans l'espace fluide, les vitesses des éléments fluides, quand ils passent par ce point (position) prennent la même valeur (vitesses constantes à cette position) quelque soit le temps ($\frac{dv}{dt} = 0$ mais $\frac{dv}{dx} \neq 0$).

Attention au confusion entre le régime permanent et le régime stationnaire

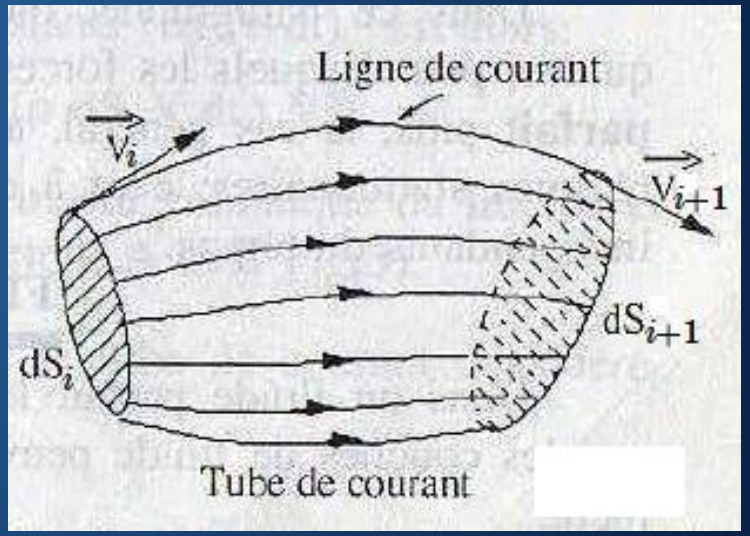
Quelques définitions et remarques :

- La trajectoire suivie par un point matériel d'un liquide est appelée **ligne de courant**

- Lorsque un point matériel (élément fluide) d'un liquide est en mouvement, son **vecteur vitesse** $\vec{v}$ est **tangent** en tout point à sa trajectoire (ligne de courant).

- En régime d'écoulement permanant (indépendant du temps), **les vitesses** des éléments fluide quand ils passent par **un point (position *i*)** d'une ligne de courant, ces vitesses prennent la même valeur (**restent constantes** $v_i = cte$ et peut être $v_i \neq v_{i+1}$).

- Un tube, dont les génératrices sont constituées par des lignes de courant est appelé ***tube de courant***



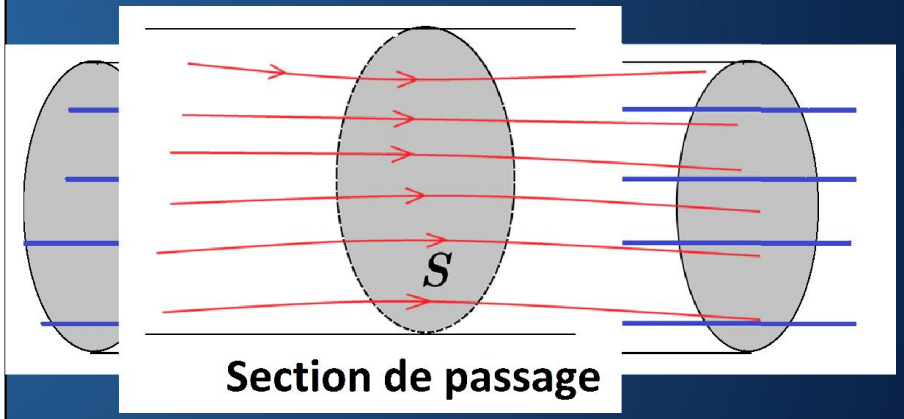
Remarque: un liquide en écoulement dans un tube de courant, ne peut s'échapper par sa surface latérale. En effet, si les éléments fluides sortaient par la surface latérale du tube de courant, cela veut dire que quelque part les lignes de courant se coupent. Au point d'intersection, les particules fluides auront alors deux vecteurs vitesse, ce qui est incompatible avec la réalité physique.

A-dédit

En Sciences de la Nature , il est essentiel de pouvoir connaître la quantité du fluide qui circule à l'intérieur des différents éléments (tuyauterie, artères, veines ...). Par conséquent, il est nécessaire de définir la notion de débit.

A-1-définition :

Considérons, par exemple, une conduite dans laquelle circule un fluide.
On appelle la surface à travers laquelle le fluide s'écoule « section de passage ».
Le débit est la quantité de matière (exprimée par une masse *(m)* ou un volume *(V)*) qui passe à travers cette section *S* (surface) dans unité de temps *(t)*.



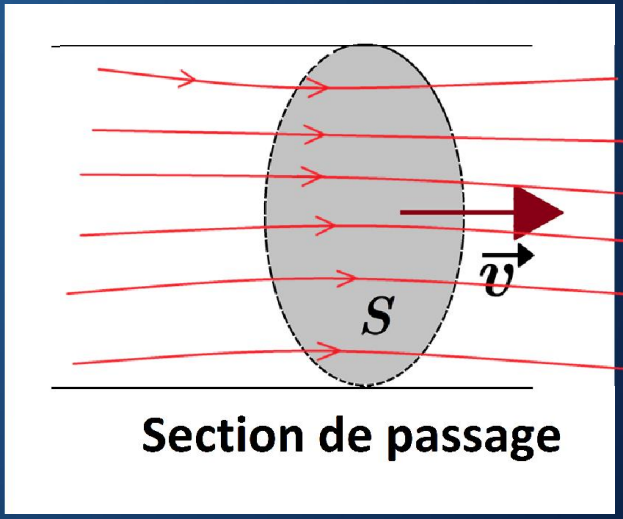
→ Si une masse *m* de fluide traverse la section de passage pendant un intervalle de temps *t*, on exprime le **débit massique** par: $Q_m = \frac{m}{t}$; $[Q_m] = M\ T^{-1}$; l'unité de Q_m est *kg/s.*

→ Si un volume *V* de fluide traverse la section de passage pendant un intervalle de temps *t*, on calcule le **débit volumique** par l'expression suivante : $Q_V = \frac{V}{t}$; $[Q_V] = L^3T^{-1}$; l'unité de Q_V est m^3/s.

A-2 Relation entre débit et vitesse

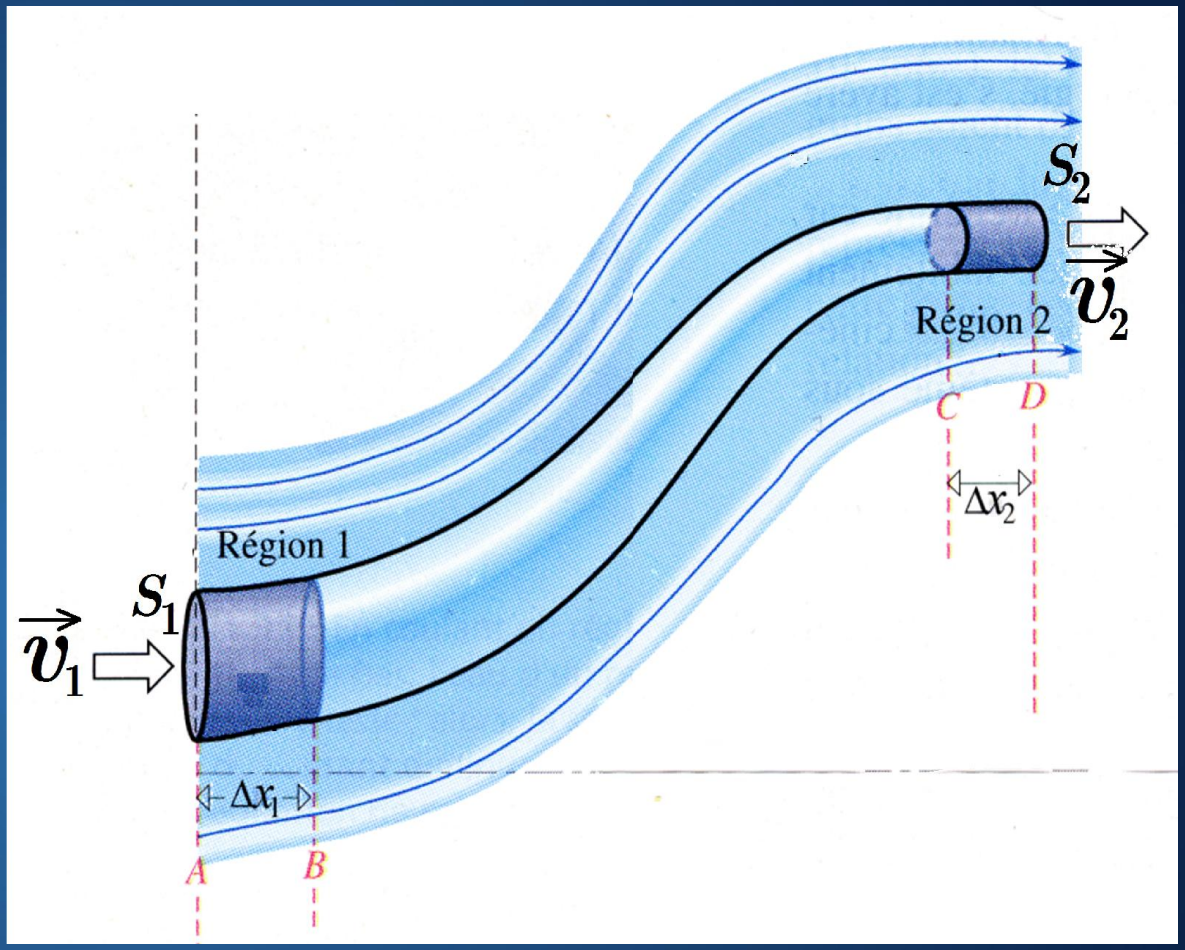
$$Q_V = Sv \qquad Q_m = Sv\rho$$

v: vitesse moyenne de l'écoulement
ρ : masse volumique du liquide



B-équation de continuité

Si on considère le tube de courant de la Figure ci-contre, par exemple, la quantité de masse Q_{m1} de fluide qui rentre par S_1 (Région 1) durant un intervalle de temps t, est forcément égale à celle Q_{m2} qui en ressort par S_2 (Région 2) durant le même intervalle de temps t. Si v_1 et v_2 sont les vitesses des éléments (particules) fluides aux niveaux de S_1 et en S_2 , les expressions de Q_{m1} et de Q_{m2} s'écrivent comme suit:



$$Q_{m1} = S_1 v_1 \rho \quad \text{et} \quad Q_{m2} = S_2 v_2 \rho$$

$$Q_{m1} = Q_{m1} \Rightarrow S_1 v_1 \rho = S_2 v_2 \rho$$

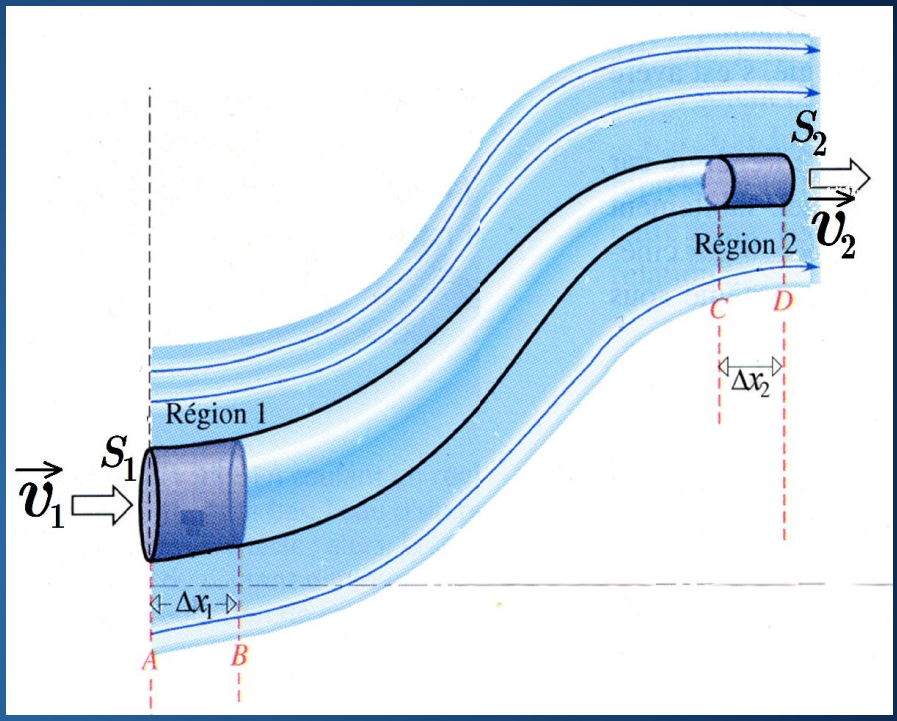
$$\Leftrightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$$

équation de continuité

équation de conservation du débit

C- Théorème de Bernoulli

Soit un fluide parfait, incompressible, s'écoulant dans une conduite de diamètre (section) variable ($S_1 \neq S_2$).
Considérons une portion de ce fluide de masse volumique ρ et de volume V (masse $m=\rho V$) .



Entre les instants t et t+dt, la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section S_2 . Tout se passe comme si ce fluide était passé de la position (1) à la position (2).

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t+dt :
« La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures »

On a $E_{mec} = E_{cin} + E_{pp}$= m.g.z+(m/2).$v^2$

E_{2mec}- E_{1mec}= $W_{forces\ de\ pression}$= $F_1 .\Delta x_1$- $F_2 .\Delta x_2$ ⇔

E_{2mec}- E_{1mec}=$P_1.S_1. \Delta x_1$-$P_2.S_2. \Delta x_2$= $P_1.V_1$ -$P_2.V_2$

On a V=m/ρ, par conservation de masse:

m_1=m_2=m et puisque le fluide est parfait:

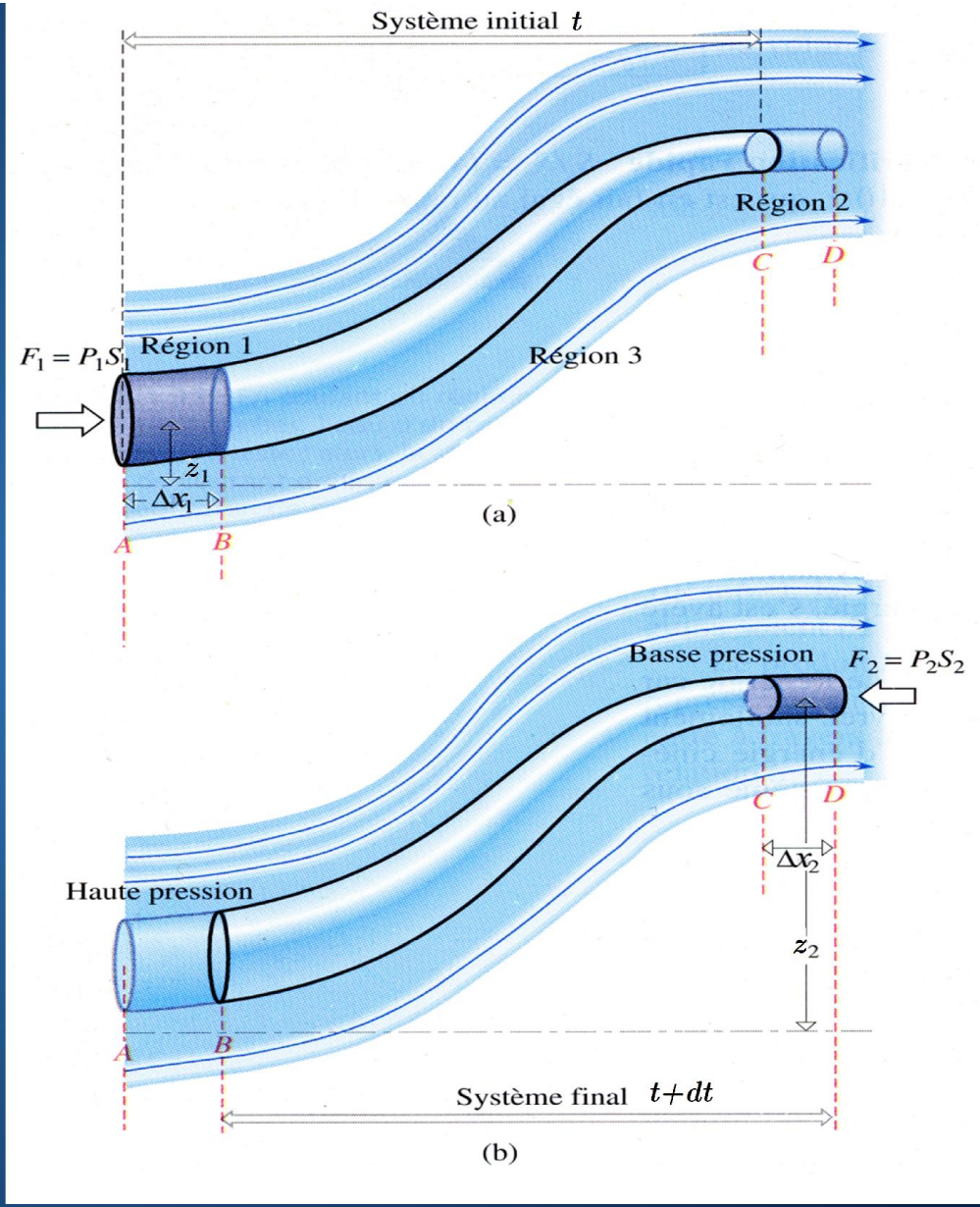
ρ_1=ρ_2=ρ

en simplifiant on obtient l'équation de BERNOULLI:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + P_2 - \left(\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_1\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + P_2$$

Théorème de Bernoulli



- L'équation de Bernoulli exprime la cconservation de l'énergie Totale l'élément fluide le long de sa ligne de courant.

$$\underbrace{\frac{1}{2}\overbrace{\rho \not{V}}^{m} v^2}_{\text{Energie cinétique}} + \underbrace{\overbrace{\rho \not{V}}^{m} gz}_{\text{Energie potentielle de pesanteur}} + \underbrace{P \not{V}}_{\text{Energie (travail) des forces de pression}} = C^{te}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{Pression dynamique}} + \overbrace{\rho g z}^{\text{Pression cinétique de pesanteur}} + \underbrace{P}_{\text{Pression statique (locale)}} = C^{te'}$$

$$\overbrace{\frac{v^2}{2g}}^{\text{Hauteur cinétique (dynamique)}} + z + \underbrace{\frac{P}{\rho g}}_{\text{Hauteur manométrique}} = \overbrace{H}^{\text{Hauteur des forces de pression}} = C^{te}$$

C-1 Applications du Théorème de Bernoulli

1- Tube de Venturi

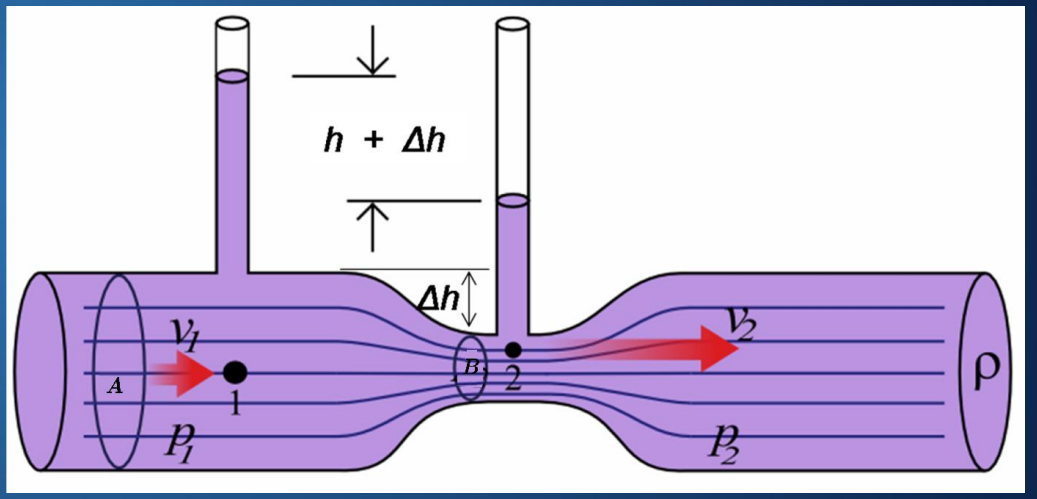
Est un conduit de section principale S_A subit un étranglement en B, d'où le rétrécissement de sa section S_B en B. La vitesse du fluide augmente au niveau de l'étranglement ($v_2 > v_1$) et la pression locale diminue ($P_2 < P_1$)

D'après l'équation de continuité $S_A v_1 = S_B v_2$

D'après le théorème de Bernoulli (entre les pts 1 et 2)

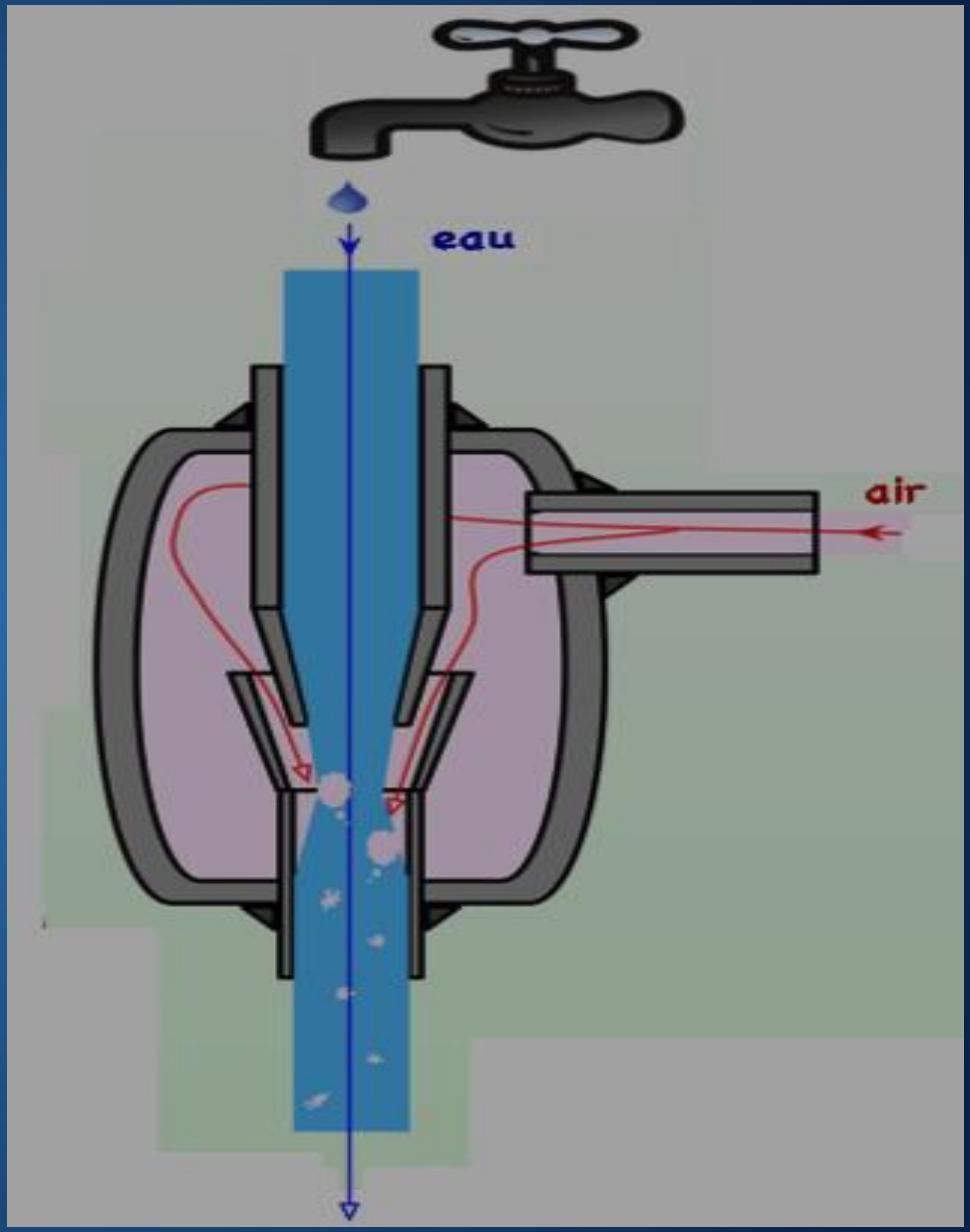
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + P_2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right)Q_V^2$$



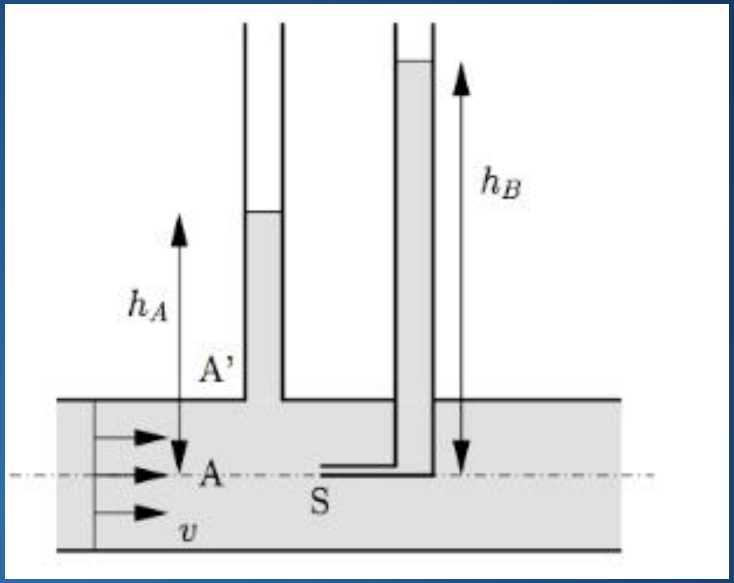
La différence de pression aux bornes aux extrémités du tube de Venturi est proportionnelle au carré du débit ; application à la mesure des débits (organes déprimogènes)
On peut citer aussi la trompe à eau, le pulvérisateur…

trompe à eau



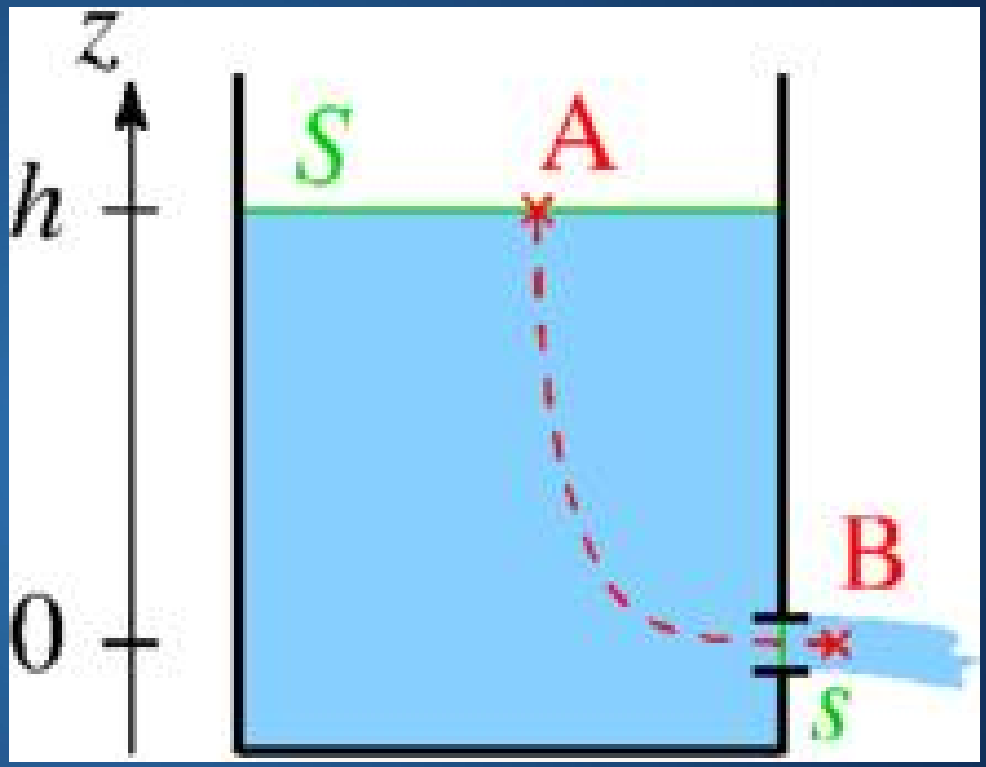
2- Tube de Pitot

Est un tube en forme de L, on l'utilise pour mesurer la vitesse de l'écoulement des fluides dans les canalisations et des conduites



En appliquant le T.B entre les A et S

$$v_A = \sqrt{\frac{2\left(P_B - P_A\right)}{\rho}} = \sqrt{2gh}$$

3- Vase de Torricelli

$$v_B = \sqrt{2gh}$$