

Analyse vectoriel

Opérateur nabla $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Opérateur laplacien Δ en coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Opérateur d'alembertien \square en coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Où c est la vitesse d'une onde électromagnétique dans le vide (où la vitesse de la lumière)

Applications :

Le gradient d'une fonction scalaire U est un vecteur :

$$\vec{\nabla} U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z} = \overrightarrow{\text{grad}} U$$

La divergence d'un vecteur \vec{A} (A_x, A_y, A_z) est un scalaire (produit scalaire) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div} \vec{A}$$

Le rotationnel d'un vecteur \vec{A} de composantes (A_x, A_y, A_z) est un vecteur (produit vectoriel) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Laplacien d'une fonction scalaire U : $\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} U = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = \nabla^2 U = \Delta U$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Laplacien d'un vecteur \vec{A} de composantes (A_x, A_y, A_z) :

$$\Delta \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$$

D'alembertien d'une fonction scalaire U :

$$\square U = \Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

D'alembertien d'un vecteur \vec{A} de composantes (A_x, A_y, A_z) :

$$\square \vec{A} = \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Théorème d'Ostrogradsky :

Soit une surface fermée S délimitant un volume τ :

$$\iiint_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) d\tau = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

L'intégrale de la divergence d'un vecteur \vec{A} , étendue à un volume τ , est égale au flux de ce vecteur sortant de la surface S qui limite ce volume.

Théorème de Stokes :

Soient un contour fermé C , un élément de déplacement $d\mathbf{l}$ sur ce contour et une surface S s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

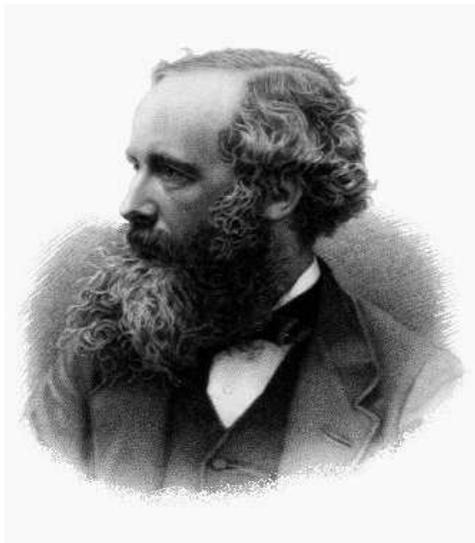
La circulation d'un vecteur \vec{A} le long d'une courbe fermée C est égale au flux de son rotationnel sortant de la surface S délimitée par C .

Applications :

Soient f un champ scalaire et \vec{A} un champ vectoriel. Vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) &= f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) \quad ; \quad \vec{\nabla} \wedge (f\vec{A}) = (\vec{\nabla} f) \wedge \vec{A} + f(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \quad ; \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) &= \vec{0} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \end{aligned}$$

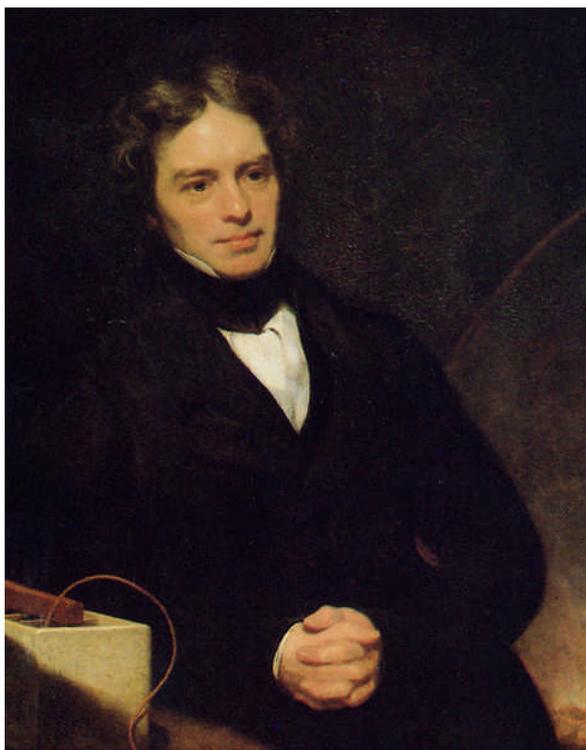
James Clerk MAXWELL



James Clerk Maxwell

- Naissance** [13 juin 1831](#)
[Édimbourg](#), [Écosse](#) ([Royaume-Uni](#))
- Décès** [5 novembre 1879](#)
[Cambridge](#), [Angleterre](#) ([Royaume-Uni](#))
- Nationalité** [écossaise](#)
- Champs** [Mathématiques](#), [Physique](#)
- Diplômé** [Université d'Édimbourg](#), [Université de Cambridge](#)
- Célèbre pour** [Équations de Maxwell](#)
[Distribution de Maxwell](#)
[Démon de Maxwell](#)
- Distinctions** [Médaille Rumford](#)
[Prix Adams](#)
- a eu pour directeur de thèse [William Hopkins](#)

Michael FARADAY



Portrait par Thomas Phillips

- Naissance** [22 septembre 1791](#)
[Newington](#) ([Royaume-Uni](#))
- Décès** [25 août 1867](#)
[Hampton Court](#) ([Royaume-Uni](#))
- Nationalité** [Royaume-Uni](#)
- Champs** [Électrochimie](#), [Électromagnétisme](#)
- Institution** [Royal Society](#)
- Célèbre pour** [Farad](#), [Cage de Faraday](#)
- Distinctions** [médaille Copley](#), [Médaille Rumford](#),
[Royal Medal](#)

Carl Friedrich GAUSS



Carl Friedrich Gauss

Portrait de Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855),
réalisé par Christian Albrecht Jensen

Naissance [30 avril 1777](#)
[Brunswick \(Saint-Empire romain germanique\)](#)

Décès [23 février 1855](#) (à 77 ans)
[Göttingen \(Royaume de Hanovre\)](#)

Nationalité Allemand

Champs [Astronomie](#), [mathématiques](#), [physique](#)

Institution [Université de Göttingen](#)

Célèbre pour Travaux en mathématiques et en physique

Distinctions [Médaille Copley](#)

[Prix Lalande](#)

Signature

A handwritten signature of Carl Friedrich Gauss in cursive script, featuring a large 'G' and 'Gauss' written in a flowing, elegant style.

André-Marie AMPERE



André-Marie Ampère, né à [Lyon](#) le [20 janvier 1775](#) et mort à [Marseille](#) le [10 juin 1836](#), est un mathématicien et physicien français. Il inventa le premier [télégraphe électrique](#) et, avec [François Arago](#), l'[électroaimant](#), et il énonça en [1827](#) la théorie de l'[électromagnétisme](#). Son nom a été donné à l'unité internationale de courant électrique : l'[ampère](#).

CHAPITRE I

EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

1 Le champ électromagnétique

Soit dans un repère galiléen une densité de charge $\rho(\mathbf{r},t)$ en mouvement qui lui est associée une densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$. L'électromagnétisme se propose d'étudier les interactions des particules chargées. Il faut admettre que l'action de la distribution des charges en un point de position \mathbf{r} et à une date t peut toujours être caractérisé par un champ $\mathbf{C}(\mathbf{r},t) = (\mathbf{E},\mathbf{B})$ appelé champ électromagnétique : c'est un ensemble de deux champs vectoriels $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$

Historiquement les champs électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ et magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ ont évolué séparément. En réalité ils forment un être mathématique ; (\mathbf{E},\mathbf{B}) forme un tout indissociable.

Le champ électromagnétique est accessible par ces effets : Une charge électrique q animée d'une vitesse \mathbf{v} placée dans un champ électromagnétique (\mathbf{E},\mathbf{B}) est soumise à une force \mathbf{F} dite force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

La théorie de l'électromagnétisme sera complète si l'on sait calculer le champ (\mathbf{E},\mathbf{B}) à partir de sa source (ρ,\mathbf{J}) , ainsi nous proposons 04 relations locales appelées équations de Maxwell qui vont nous permettre de calculer le champ électromagnétique (\mathbf{E},\mathbf{B}) .

2 Les équations de Maxwell

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Faraday) :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

On peut distinguer deux couples d'équations :

- La 1^{ère} et la 2^{ème} équations expriment les propriétés intrinsèques du champ électromagnétique (pas de terme source)
- La 3^{ème} et la 4^{ème} équations expriment le lien entre le champ électromagnétique (\mathbf{E},\mathbf{B}) et sa source (ρ,\mathbf{J}) .

N.B.

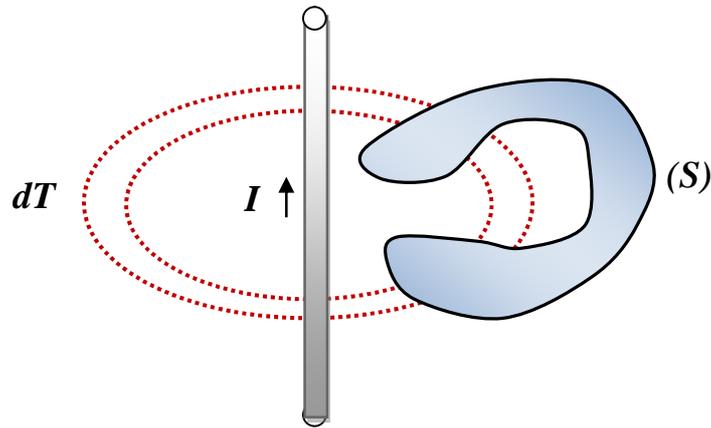
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) &= \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

D'où l'équation de la conservation de la charge électrique :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

2.1 Contenu physique de l'équation du flux magnétique

Soit un fil conducteur rectiligne de longueur infini et parcouru par un courant continu I . Il crée un champ magnétique \mathbf{B} dans tout l'espace. Soient $d\mathbf{T}$ un tube de flux et S une surface fermée quelconque.



B est constant le long du tube. $d\mathbf{T}$ transporte un flux constant et découpe la surface S en un nombre paire d'éléments de surface identiques $dS_1, dS_2, dS_3, dS_4, \dots$ etc. le flux qui sort de ces éléments est donc nul, il y'a alternance de signes + et -

$$\oiint B \cdot dS = 0$$

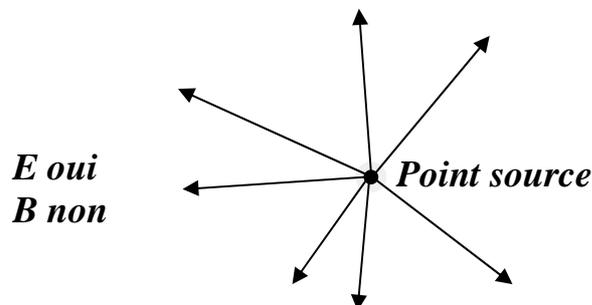
Appliquons le théorème d'Ostrogradski :

$$\phi = \oiint_S B \cdot dS = \iiint_V \nabla \cdot B \, dV = 0 \Rightarrow \nabla \cdot B = 0$$

Où V est le volume fini délimitée par la surface S fermée.

$$\nabla \cdot B = 0 \Leftrightarrow \oiint_S B \cdot dS = 0$$

Cette équation exprime que le champ magnétique B est à flux conservatif. Les lignes de B ne peuvent pas diverger comme le font les lignes du champ électrique E à partir d'un point source.



La 1^{ère} et la 3^{ème} équations de Maxwell ont des structures mathématiques identiques mais la 1^{ère} ne contient pas de terme source.

2.2 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Faraday

En électrostatique le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ dérive d'un potentiel scalaire $V(\mathbf{r})$:

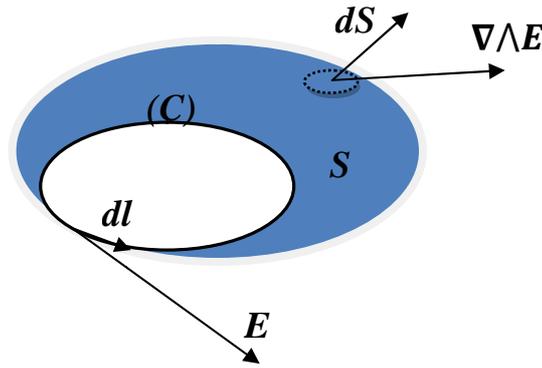
$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

D'où en régime permanent :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Ce qui exprime que la circulation de \mathbf{E} est conservative en régime permanent (régime indépendant du temps).

Dans le cas général, examinons la circulation de \mathbf{E} à la date t le long d'un contour (C) fixe. Soit S une surface quelconque s'appuyant sur le contour (C) et appliquons le théorème de Stokes.



$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right) = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Avec : $\phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ le flux de \mathbf{B} à travers la surface S .

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

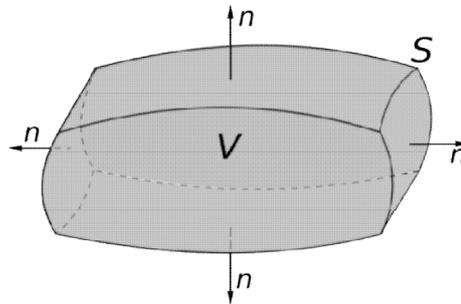
Cette relation exprime que tout champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservatif. L'équation de Maxwell – Faraday rend compte du phénomène d'induction électromagnétique.

En régime permanent : $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0 \Leftrightarrow \nabla \wedge \mathbf{E} = 0$

2.3 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Gauss

Rappel du théorème de Gauss

Soit une surface fermée (S) délimitant un volume V contenant une charge Q :



$$Q = \iiint_V \rho dV$$

Le flux électrostatique Φ sortant de S s'exprime :

$$\phi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski on obtient :

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

D'où : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Cette équation est plus générale que le théorème de Gauss, car elle prend en compte toutes les charges (charge libres et charges liées) contenues le volume V délimité par la surface fermée (S).

2.4 Relaxation de charges dans un conducteur

Pour examiner l'évolution de charges ρ à l'intérieur d'un conducteur parcouru par des courants on partira de l'équation de la conservation de la charge

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

et de la loi d'Ohm locale

$$J = \sigma E$$

$$\nabla \cdot J = \nabla \cdot (\sigma E) = \sigma(\nabla \cdot E) + E(\nabla \cdot \sigma) = \sigma(\nabla \cdot E) = \sigma \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

L'expression de ρ exprime qu'un éventuel excédent de charge dans un conducteur disparaît au bout d'un temps égal à quelques τ .

Ex : pour le cuivre $\sigma = 6.10^7$ S.m et $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F/m on obtient $\tau = 10^{-19}$ S.

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{10^{-19}}} = \rho_0 e^{-t.10^{19}} = \frac{\rho_0}{e^{+t.10^{19}}} \simeq 0$$

Physiquement si des charges positives s'accumulent en certains points et des charges négatives s'accumulent en d'autres points, des forces électriques de rappel s'exercent entre les régions de charges opposées. Si le milieu est suffisamment conducteur tels que les métaux le déséquilibre tend rapidement à disparaître. A l'intérieur d'un conducteur métallique la densité de charge peut être considérée comme nulle dans tout le domaine des fréquences hertziennes (domaine allant du régime permanent $f = 0$ Hz jusqu'à l'infrarouge).

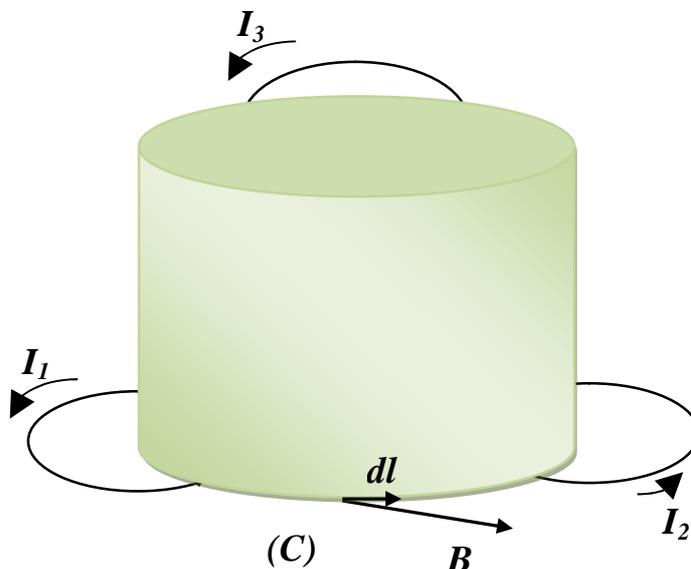
2.5 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Ampère

Rappel :

Soit un contour (C) sur lequel s'appuie une surface S. le théorème d'Ampère de la magnétostatique exprime que :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

Où I est le courant enlacé par le contour (C). I est le flux de la densité de courant J qui traverse la surface S.



$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0(I_1 - I_2 + I_3 - I_3) = \mu_0(I_1 - I_2)$$

On constate qu'il n'y a que les courants I_1 et I_2 qui contribuent à la circulation. Ce sont les courants enlacés par le contour (C).

Utilisons la formule de Stokes :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

D'où :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \Leftrightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

Cette formule est valable uniquement en régime permanent (magnétostatique) c'est le théorème d'Ampère de la magnétostatique. Le champ magnétique tourbillonne autour des courants qui l'engendrent.

En régime non permanent, calculons la circulation de \mathbf{B} à la date t le long du contour (C).

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \left[\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \right]$$

I étant l'intensité du courant qui traverse S à l'instant t :

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

On pose :

$$\mathbf{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

D'où la formule générale du théorème d'Ampère :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I + \iint_S \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{S} \right)$$

Le flux du terme \mathbf{J}_D intervient de la même manière que le flux de \mathbf{J} d'où l'usage est de conserver à \mathbf{J}_D le nom que lui a donné Maxwell : densité du courant de déplacement.

Un champ électrique dépendant du temps est, au même titre qu'un courant, une source de champ magnétique.

$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ donne naissance à un champ électrique \mathbf{E} rotationnel

$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ donne naissance à un champ magnétique \mathbf{B} rotationnel.

Conclusion :

- En statique le champ électrique \mathbf{E} peut exister en absence du champ magnétique \mathbf{B} . Exemple : un condensateur portant une charge Q .
- En magnétostatique le champ magnétique \mathbf{B} peut exister en absence de champ électrique \mathbf{E} . Exemple : un conducteur parcouru par un courant continu I .
- Quand les champs varient avec le temps, le champ magnétique \mathbf{B} ne peut pas exister sans un champ électrique \mathbf{E} , de même que \mathbf{E} ne peut pas exister sans un champ \mathbf{B} correspondant. Les termes $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ et $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ réalisent le couplage entre les deux champs. Ce couplage est à l'origine de la possibilité d'une propagation du champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) (ondes électromagnétiques).

CHAPITRE II

PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LE VIDE

1 Equations de propagation du champ électromagnétique

A partir des équations de Maxwell on cherche deux équations découplées ne contenant respectivement que le champ électrique E et que le champ magnétique B . De la 2eme et de la 4eme nous obtenons :

$$\begin{aligned}\nabla \wedge (\nabla \wedge E) &= \nabla (\nabla \cdot E) - \Delta E = \nabla \wedge \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge B) \\ \nabla \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) - \Delta E &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 J + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

D'où :

$$\Delta E - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} \quad (1)$$

Si l'on prend le $\nabla \wedge (\nabla \wedge B)$ on obtiendra :

$$\Delta B - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \mu_0 (\nabla \wedge J) \quad (2)$$

En dehors de la source où $\rho = 0$ et $J = 0$ on aura :

$$\Delta E - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

$$\Delta B - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

1.2 Rappel : Equation de d'Alembert

Soit $S(x,t)$ une grandeur fonction de l'abscisse x et de la date t . L'équation de D'Alembert s'écrit :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

Où v est une constante.

C'est une équation différentielle qui admet comme solution générale :

$$S(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

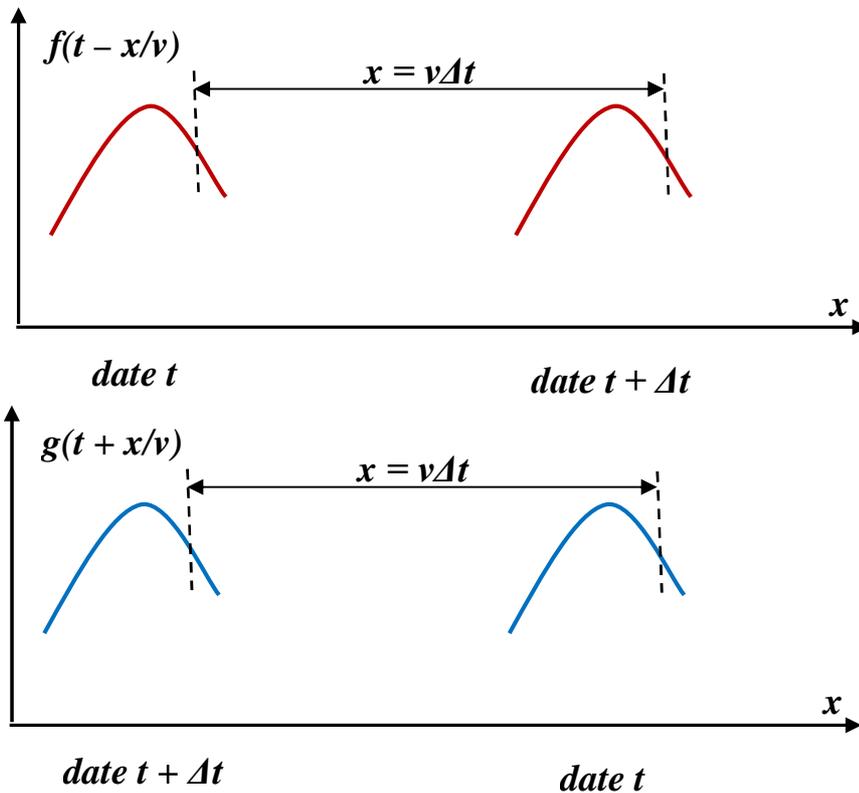
Les solutions particulières sont :

$$S_1(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$S_2(x,t) = g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Si :

$$\begin{aligned}\Delta x &= v \Delta t \\ \Rightarrow f\left(t - \frac{x}{v}\right) &= f\left(t + \Delta t - \frac{x}{v} - \Delta t\right) = f\left(t + \Delta t - \frac{x + v \Delta t}{v}\right) \\ f\left(t - \frac{x}{v}\right) &= f\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{v}\right) \\ g\left(t + \frac{x}{v}\right) &= g\left(t + \Delta t + \frac{x}{v} - \Delta t\right) = g\left(t + \Delta t + \frac{x - v \Delta t}{v}\right) \\ g\left(t + \frac{x}{v}\right) &= g\left(t + \Delta t + \frac{x - \Delta x}{v}\right)\end{aligned}$$



On constate que les grandeurs f et g se propagent sans déformation. $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ et $g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ représentent ce qu'on appelle des ondes progressives. $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ se déplace dans le sens positif de l'axe ox à la vitesse v et $g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ se déplace dans le sens opposé à la vitesse $-v$.

La solution générale de l'équation de D'Alembert à une dimension peut s'interpréter comme la superposition de deux ondes progressives de vitesses opposées.

1. 3 Equation de d'Alembert à 3 dimensions

$S(x,y,z,t)$

$$\Delta S - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

Les solutions particulières sont :

$$S_1(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) ; S_1(y,t) = f\left(t - \frac{y}{v}\right) ; S_1(z,t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

$$S_2(x,t) = g\left(t + \frac{x}{v}\right) ; S_2(y,t) = g\left(t + \frac{y}{v}\right) ; S_2(z,t) = g\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

A une date t donnée ces six fonctions ont même valeur en tout point d'un plan $x = \text{constante}$, $y = \text{constante}$ et $z = \text{constante}$. Elles représentent des ondes planes progressives se propageant avec la célérité v respectivement le long des axes ox , oy et oz .

1. 4 Conclusion

Maxwell remarqua que, compte tenue des équations (3) et (4), les six composantes du champs électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) vérifient, dans la région de l'espace située en dehors de la source ($\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$), des équations qui s'identifient à l'équation (5) en posant $v^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$. Ceci implique que le champ électromagnétique est susceptible de se propager avec une célérité dont la valeur numérique est $v = \sqrt{1/\epsilon_0\mu_0} = 3.10^8 \text{ m/s}$.

Par ailleurs, l'analyse des phénomènes lumineux et les mesures donnaient pour la lumière un caractère ondulatoire et une célérité dans le vide une valeur c très proche de v . Maxwell tira les conclusions de cet ensemble en affirmant la nature électromagnétique de la lumière, ce qui revient à identifier v à c d'où la célèbre relation :

$$\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$$

En introduisant l'opérateur d'Alembertien :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Les équations du champ électromagnétiques (3) et (4) dans l'espace vide de charges électriques et de courants peuvent s'écrire sous la forme :

$$\square \mathbf{E} = \mathbf{0} ; \square \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

2 Ondes planes électromagnétiques dans le vide

2.1 Propagation unidimensionnelle

Dans le cas d'une propagation unidimensionnelle dans le vide (de permittivité ϵ_0 , et de perméabilité μ_0) les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} ne dépendent que de la date t et par exemple de la coordonnée x :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, t) &= \mathbf{E}_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \mathbf{E}_2 \left(t + \frac{x}{c} \right) \\ \mathbf{B}(x, t) &= \mathbf{B}_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \mathbf{B}_2 \left(t + \frac{x}{c} \right) \end{aligned}$$

\mathbf{E} et \mathbf{B} sont représentés par la superposition de deux ondes progressives de vitesse opposées. \mathbf{E}_1 et \mathbf{B}_1 se propagent dans le sens positif de l'axe ox et \mathbf{E}_2 et \mathbf{B}_2 se propagent dans le sens négatif. $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ et $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ caractérisent une onde électromagnétique plane progressive se propageant parallèlement à l'axe ox .

$$\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} ; \quad \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial z} = 0$$

Sous la forme opérationnelle :

$$\nabla \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla = -\frac{1}{c} \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial t} \quad (1)$$

Où \mathbf{a}_x est le vecteur unitaire de l'axe ox .

Pour le champ \mathbf{E}_2 on obtiendra :

$$\nabla = \frac{1}{c} \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{c} \mathbf{a}_{x'} \frac{\partial}{\partial t} \quad (2)$$

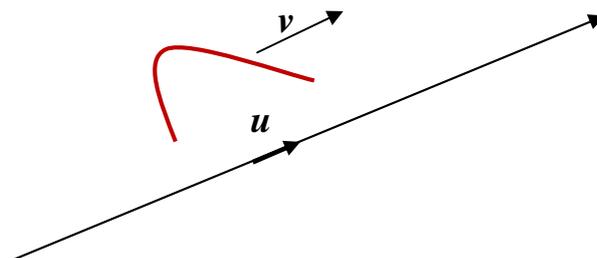
Où $\mathbf{a}_{x'}$ est le vecteur unitaire de l'axe ox' orienté en sens contraire de ox . On peut donc généraliser les équations (1) et (2) pour un axe quelconque :

$$\nabla = -\frac{1}{c} \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial t}$$

Où \mathbf{u} est le vecteur unitaire de l'axe, valable uniquement pour une onde plane progressive.

3 Structure de l'onde plane progressive

Soit un axe défini par le vecteur unitaire \mathbf{u} et une onde électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) se propageant dans la direction positive :

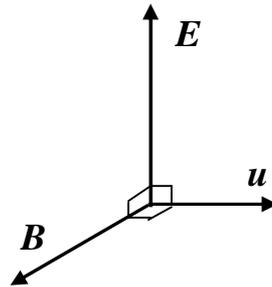


En dehors de la source $\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$. Les équations de Maxwell peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{c} \mathbf{u} \frac{\partial B}{\partial t} = 0 && (1^{ere}) \\ \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\Rightarrow -\frac{1}{c} \mathbf{u} \wedge \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (2^{eme}) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{c} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = 0 && (3^{eme}) \\ \nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &\Rightarrow -\frac{1}{c} \mathbf{u} \wedge \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && (4^{eme}) \end{aligned}$$

Les champs indépendants du temps ne sont pas pris en compte. En intégrant les équations (2) et (4) où les constantes d'intégration sont nécessairement nulles on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \mathbf{u} \wedge \mathbf{E} \\ \mathbf{E} &= -c \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} \end{aligned}$$



\mathbf{B} et \mathbf{E} sont perpendiculaires à la direction \mathbf{u} de propagation. \mathbf{B} et \mathbf{E} sont perpendiculaires entre eux. Le trièdre $\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ est direct.

$$|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$$

Remarque

- Une particule de charge q placée dans un champ électromagnétique, est soumise à une force \mathbf{F} dont le rapport des composantes F_E et F_B de la force de Lorentz est :

$$\frac{F_E}{F_B} = \frac{q\mathbf{E}}{qv\wedge\mathbf{B}} = \frac{c\mathbf{B}}{v\mathbf{B}} = \frac{c}{v}$$

$v \ll c$ d'où :

$$\frac{F_E}{F_B} = \frac{c}{v} \Rightarrow F_E \gg F_B$$

4 Ondes planes progressives sinusoïdales

Si ox est l'axe de propagation de l'onde, celle-ci est définie par :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{oy} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_2 \right] \\ E_z = E_{oz} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_3 \right] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{u} \wedge \mathbf{E} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{1}{c} E_z \\ B_z = -\frac{1}{c} E_y \end{pmatrix}$$

Où ω est la pulsation de l'onde, liée à la période T par :

$$\omega T = 2\pi$$

$\varphi(x, t) = \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_i$ définit la phase de l'onde plane progressive de pulsation ω . On pose $k = \omega/c$:

$$\varphi(x, t) = \omega t - kx + \varphi_i$$

k est le vecteur d'onde.

Les points tels que $\varphi(x, t) = \text{constante}$ définissent à chaque instant un plan perpendiculaire à ox . En tous les points d'un plan d'onde E (ou B) a même phase au même instant t . Les différents plans d'onde sont parallèles entre eux et se distinguent par la valeur de $\varphi(x, t)$.

Soit M de coordonnées x, y, z un point du plan d'onde posons : $k = k u_x$ et $r = OM$

La phase φ s'écrit :

$$\varphi = \omega t - kr + \varphi_i$$

Le vecteur d'onde k indique le sens de propagation et les plans d'onde sont perpendiculaires à k et définis par :

$$\varphi = \omega t - kr + \varphi_i = \text{constante}$$

La vitesse de phase (ou vitesse de propagation de la phase) est la vitesse de déplacement d'un plan d'onde dans la direction de propagation. Entre les instants t et $t + dt$ pour un même plan d'onde, on a :

$$\varphi(x, t) = \varphi(x + dx, t + dt) \Rightarrow \omega t - kx + \varphi_i = \omega t + \omega dt - kx - kdx + \varphi_i$$

$$\Rightarrow \omega dt - kdx = 0$$

D'où :

$$v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Dans le vide $k = \omega/c$ d'où :

$$v_\varphi = c$$

Longueur d'onde λ

Pendant une période T , un plan d'onde se déplace dans la direction de propagation dans le vide de :

$$\lambda = v_\varphi T = cT$$

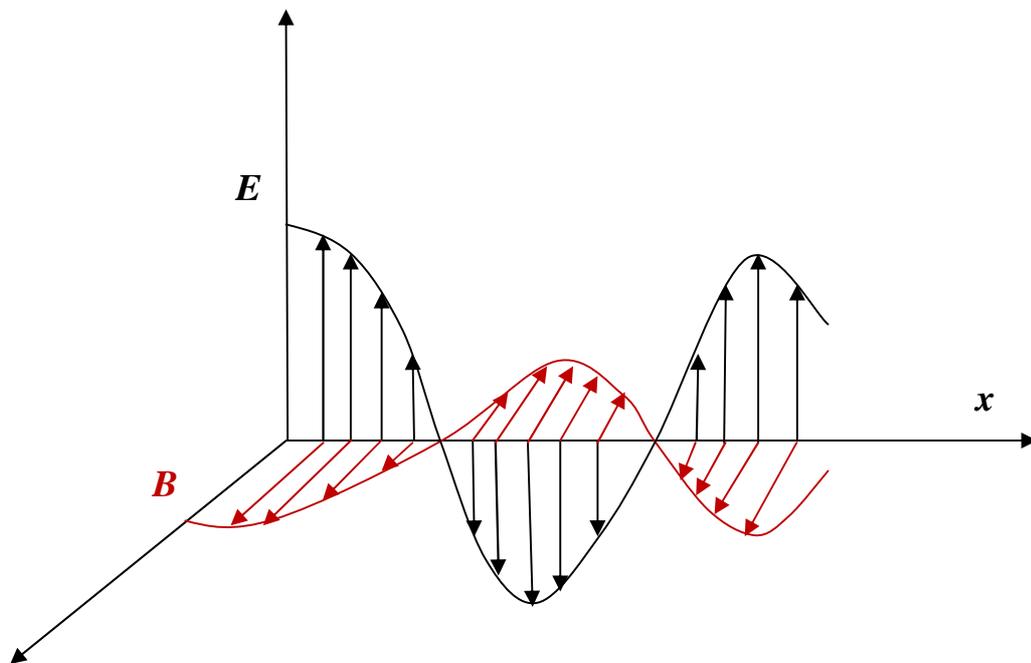
$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$$

A un même instant t les plans d'onde distants de λ correspondent à une même valeur de la phase (à 2π près). Il y'a donc une périodicité spatiale de période λ pour les phases à chaque instant.

Une onde plane progressive sinusoïdale possède donc une double périodicité : périodicité temporelle de période T et une périodicité spatiale de période λ .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} ; v = \frac{1}{T} \text{ fréquence}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} ; \sigma = \frac{1}{\lambda} \text{ nombre d'onde}$$



CHAPITRE III

RESOLUTION DES EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

1 Introduction des potentiels

L'introduction des potentiels V et A en fonction desquels les champs électrique E et magnétique B s'expriment sous forme de dérivées premières permet d'aboutir à des équations différentielles du second ordre (équations de Poisson) dans lesquelles les sources ρ et J sont découplées.

La 1^{ère} équation de Maxwell $\nabla \cdot B = 0$ exprime que le champ magnétique B est à flux conservatif, donc on peut lui associer (voir le TD N° 1) un champ de vecteur A tel que :

$$B = \nabla \wedge A$$

On dit que B dérive d'un potentiel vecteur A .

Remplaçons l'expression de B dans la 2^{ème} équation de Maxwell :

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \nabla \wedge E = -\frac{\partial(\nabla \wedge A)}{\partial t} = -\nabla \wedge \frac{\partial A}{\partial t} \Rightarrow \nabla \wedge \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

Un vecteur dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si son rotationnel est nul (voir TD N° 1).

$$\nabla \wedge \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow E + \frac{\partial A}{\partial t} = \nabla \phi$$

On pose $\phi = -V$

Le champ scalaire $V(r,t)$ est appelé dans le cas général des régimes non permanents potentiel scalaire.

Le champ électromagnétique (E,B) dérive des potentiels (V,A) par les relations :

$$B = \nabla \wedge A ; E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

2 Indétermination des potentiels

Soit un champ électromagnétique (E,B) dont on connaît un couple (V_0, A_0) de potentiels. Existe-il d'autres couples de potentiel autre que (V_0, A_0) qui vérifie :

$$B = \nabla \wedge A ; E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

A_0 vérifie l'équation précédente et tout champ $A = A_0 + \nabla \phi$ vérifie aussi cette équation car :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge A &= \nabla \wedge (A_0 + \nabla \phi) = \nabla \wedge A_0 + \nabla \wedge (\nabla \phi) = \nabla \wedge A_0 \\ \Rightarrow E &= -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla V_0 - \frac{\partial A_0}{\partial t} \\ \Rightarrow \nabla(V_0 - V) &= \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial t} = \frac{\partial(A_0 + \nabla \phi)}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial t} = \frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} \\ \nabla \left(V_0 - \frac{\partial \phi}{\partial t} - V \right) &= 0 \end{aligned}$$

La solution possible est

$$V = V_0 - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$\phi(r,t)$ étant un champ scalaire quelconque. Si (V_0, A_0) est un couple de potentiel du champ (E,B) , on peut obtenir d'autres couples (V,A) de potentiels de ce champ par la transformation de jauge :

$$A = A_0 + \nabla \phi ; V = V_0 - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Condition de jauge de Lorentz :

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

3 Equation de Poisson

Introduisons les expressions de E et B en fonction de V et A dans les équations de Maxwell – Ampère et Maxwell – Gauss :

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \right) = -\nabla^2 V - \frac{\partial(\nabla \cdot A)}{\partial t} = -\Delta V - \frac{\partial(\nabla \cdot A)}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Equation de Poisson

$$\square V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial (-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

Equation de Poisson

$$\square \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

Ces deux équations sont une conséquence des équations de Maxwell et de la jauge de Lorentz.

Remarque

En électrostatique ρ est fixe (indépendant du temps) $\square = \Delta$

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Equation de Poisson

Dans la région de l'espace où $\rho = 0$ on obtient :

$$\Delta V = 0$$

Equation de Laplace

En magnétostatique (champ magnétique créée par des courants continus) $\square = \Delta$

$$\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

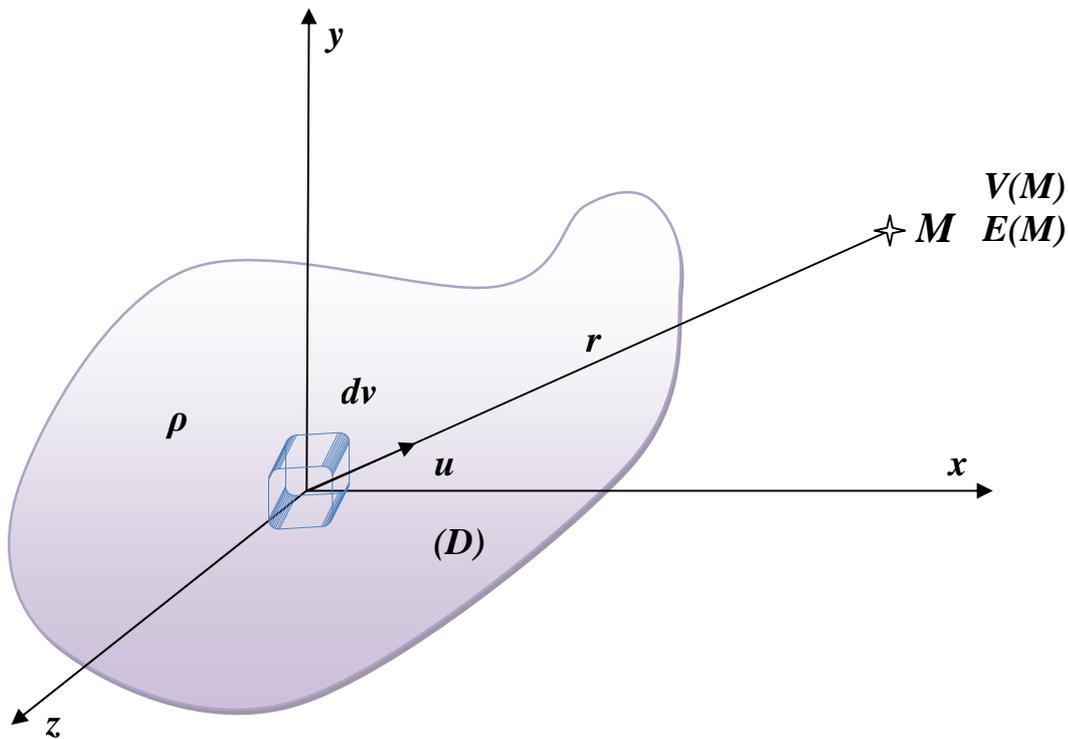
En régime permanent (les charges sont mobiles mais pas d'accumulation de charges $\partial \rho / \partial t = 0$) on obtient les mêmes équations :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad ; \quad \Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

4 Résolution des équations de Poisson

4.1 En électrostatique

Soit (D) une distribution de charge caractérisée par une densité volumique de charges ρ continue et fixe.



On se propose de calculer le potentiel électrique $V(\mathbf{M})$ et le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{M})$ correspondant créés par la source ρ au point \mathbf{M} de coordonnées $\mathbf{r} = \overrightarrow{SM}$. En résolvant l'équation de Poisson. On suppose que $V(\infty) = 0$ qui est une solution physiquement acceptable. Si la distribution (D) est d'extension finie la solution est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r} dv$$

L'intégrale est étendue à (D) où à tout l'espace.

En prenant les coordonnées de \mathbf{M} on obtient :

$$\mathbf{E}(\mathbf{M}) = -\nabla_{\mathbf{M}} V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \nabla_{\mathbf{M}} \left(\frac{\rho}{r} \right) dv = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho \nabla_{\mathbf{M}} \left(\frac{1}{r} \right) dv$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\frac{\rho \mathbf{u}}{r^2} \right) dv$$

Remarque

L'expression ainsi déduite de l'équation de Poisson est bien en accord avec la loi de coulomb pour une charge ponctuelle q . En effet, si distribution (D) ne contient qu'une seule charge ponctuelle : $\iiint \rho dv = q$ on obtient dans ce cas :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}$$

En régime permanent les charges peuvent être mobiles mais la densité de charge $\rho(\mathbf{r})$ est indépendante du temps autrement dit il n'a pas de cumule de charge : $\partial\rho/\partial t = 0$ et $\partial\mathbf{J}/\partial t = 0$. Toutes les lois d'électrostatique restent valables sauf la loi de Coulomb.

Dans n'importe quel domaine de la physique, si on rencontre une équation de structure mathématique identique à l'équation de Poisson alors on peut utiliser directement la solution précédente pourvu que les conditions aux limites soient identiques.

4.2 En magnétostatique

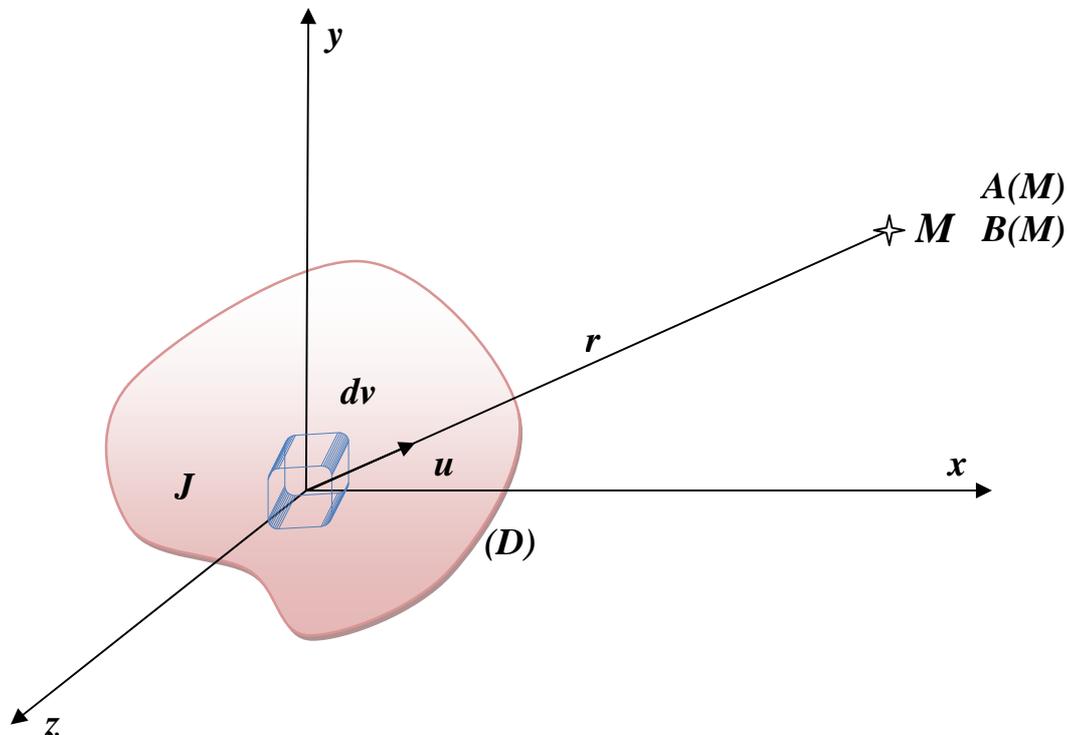
C'est le domaine des champs magnétiques créés par des courants continus

$$\Delta A + \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

Cette équation est identique à celle de l'électrostatique et les conditions aux limites sont identiques car $A(\infty) = \mathbf{0}$, donc par simple substitution on obtient :

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J}{r} dv$$

L'intégrale est étendue à (D) où à tout l'espace.



Pour calculer le champ $B(M)$ on calculera le rotationnel de $A(M)$:

$$B(M) = \nabla_M \wedge A = \Delta_M \wedge \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J}{r} dv \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \nabla_M \wedge \left(\frac{J}{r} \right) dv$$

$$B(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[\frac{1}{r} (\nabla_M \wedge J) + \nabla_M \left(\frac{1}{r} \right) \wedge J \right] dv$$

Puisque on dérive par rapport aux coordonnées de M donc : $\nabla_M \wedge J = \mathbf{0}$. D'autre part on a : $\nabla_M \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{u}{r^2}$ d'où :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(J \wedge \frac{u}{r^2} \right) dv$$

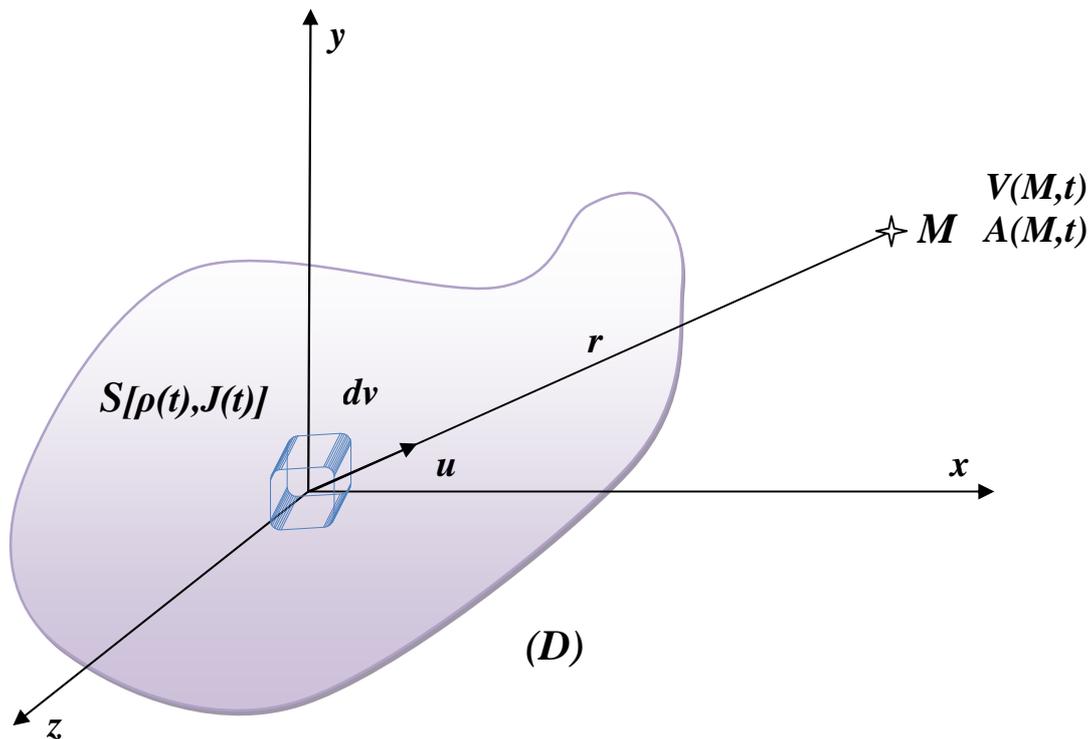
Cette expression de B est générale, elle est connue sous le nom de loi de Biot et Savart.

4.3 En régime général (régime non permanent)

On se propose de calculer le potentiel électrique $V(M,t)$ et le potentiel vecteur $A(M,t)$ créés par la source $[\rho(t), J(t)]$ au point M de coordonnées $r = SM$. En résolvant les deux équations de Poisson. On suppose que $V(\infty, t) = \mathbf{0}$ qui est une solution physiquement acceptable. Si la distribution (D) est d'extension finie la solution est :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dv$$

$$A(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dv$$



Ce sont les solutions des potentiels retardés, elles sont physiquement acceptables. Ce sont les valeurs de ρ et de J à la date antérieure $t - r/c$ qui interviennent c'est-à-dire un observateur placé en M est informé des modifications survenues à la source S avec le retard $\Delta t = r/c$.

5 Approximation des régimes quasi – permanents (ARQP)

Ce régime est défini comme étant un régime ayant des structures lentement variables dans le temps. Les phénomènes électromagnétiques connus avant Maxwell étaient décrits par des équations qui ne diffèrent que par le terme :

$$J_D = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \wedge B = \mu_0 J$$

Ce nouveau système constitue une approximation des lois générales de l'électromagnétisme valable pour le régime lentement variable. Les champs sont liés aux potentiels par :

$$B = \nabla \wedge A ; E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

Conséquences du régime ARQP

- Le couplage entre E et B introduit par J_D est à l'origine du phénomène de propagation. Si l'on supprime J_D on néglige la propagation.
- $\nabla \cdot (\nabla \wedge B) = \mu_0 \nabla \cdot J = 0 \Rightarrow \nabla \cdot J = 0$

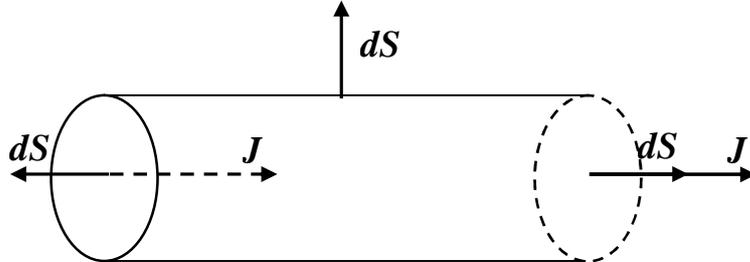
$$I = \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, dv = 0$$

Où V et le volume fini délimitée par la surface S fermée.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \Leftrightarrow I = \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Ceci exprime que l'intensité du courant est conservative. Cette propriété est à la base de toute l'électrocinétique (loi des nœuds), c'est-à-dire on peut définir un même courant $i(t)$ à chaque instant en n'importe quel point d'un même circuit non bifurqué.

Exemple d'un conducteur de section circulaire :



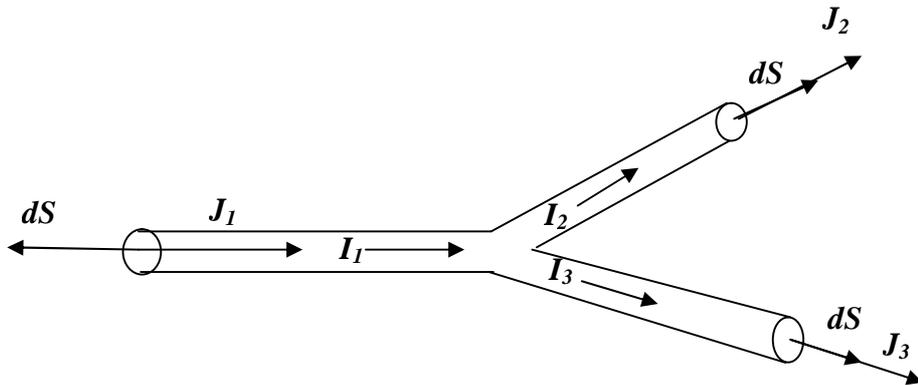
$$I = \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J \cdot dS \cos \pi + J \cdot dS \cos 0 = 0$$

$$I = -I_{\text{entrant}} + I_{\text{sortant}} = 0$$

Le courant entrant dans le conducteur par l'une de ses extrémité est égal au courant sortant par l'autre, autrement dit il n'y a pas d'accumulation de charges.

Pour un circuit bifurqué, on montre facilement que le courant obéit à la loi des nœuds suivante :

$$I_1 = I_2 + I_3$$



- c) La première équation et la quatrième équation de Maxwell sont identiques à celle de la magnétostatique on retrouvera la même équation de Poisson et la condition de jauge :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

D'où :

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(t)}{r} \, dv$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \nabla^2 V - \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Avec $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ on obtient :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

D'où :

$$V(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(t)}{r} dv$$

Si l'on compare les expressions de $A(t)$ et $V(t)$ avec celle de $A(M,t)$ et $V(M,t)$ on remarque que l'ARQP revient notamment à négliger le retard $\Delta t = r/c$. la condition $\Delta t = r/c$ permet de définir le domaine de validité de ce nouveau régime (ARQP) dans le cas d'une distribution dont les densité $\rho(t)$ et $J(t)$ varient dans le temps de façon périodique.

Au point M il faut avoir :

$$\Delta t = \frac{SM}{c} \ll T$$

T est la période de l'onde électromagnétique. Elle est reliée à la longueur d'onde λ par la relation :

$$\begin{aligned} \lambda &= cT \\ \Rightarrow \Delta t = \frac{SM}{c} &\ll \frac{\lambda}{c} \Rightarrow SM \ll \lambda \end{aligned}$$

Exemple :

Le signal à fréquence industrielle : $f = 50 \text{ Hz}$, d'où $T = 1/f = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$

$$\lambda = cT = 3 \cdot 10^8 \times 2 \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La dimension SM de n'importe quel système électrique est négligeable devant λ .

Le signal de fréquence radio $f = 1 \text{ MHz}$, $T = 10^{-6} \text{ s}$

$$\lambda = cT = 3 \cdot 10^8 \times 10^{-6} = 300 \text{ m}$$

- 1) Pour les circuits de dimension usuelles (transformateur, moteuretc.) l'ARQP est justifiée.
- 2) Dans l'ARQP B se calcule de la même façon qu'en magnétostatique, par contre E diffère de celui des régimes permanents par la présence du champ électromoteur de Neuman : $-\partial A/\partial t$.
- 3) L'ARQP néglige le phénomène de propagation mais pas les phénomènes d'induction électromagnétique.

CHAPITRE IV

ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE DANS LE VIDE

1 Rappel

Soit une distribution continue de charges.

Son énergie électrostatique W s'exprime :

$$W = \iiint_{\tau} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau = \iiint_{\tau} \frac{1}{2} \rho V d\tau$$

L'intégrale est étendue à tout l'espace où règne le champ électrostatique E . cette énergie est localisée dans ce champ. La densité volumique w de l'énergie électrostatique est ainsi :

$$w = \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Exemple : Le champ électrique maximum (au delà duquel il y'a rupture diélectrique de l'air) est $E = 3.10^6$ V/m

$$w = \frac{1}{2} \times 8,854.10^{-12} \times 9.10^{12} \approx 40 \text{ J/m}^3$$

C'est une valeur très modeste. C'est un inconvénient dans le stockage de l'énergie électrique.

2 Energie du champ électromagnétique

L'énergie se trouve localisée dans le champ électromagnétique (E, B) . Le transport d'énergie par un champ électromagnétique est appelé rayonnement. Exemple :

- 1) L'énergie solaire nous parvient par l'intermédiaire d'ondes électromagnétique.
- 2) Une particule électrisée (chargée d'électricité) en mouvement accéléré rayonne de l'énergie.

3 Puissance et vecteur de Poynting

A partir de la 4^{ème} équation de Maxwell :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 \left(J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \nabla \wedge \frac{B}{\mu_0} = J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

effectuons le produit scalaire suivant :

$$E \cdot \left(\nabla \wedge \frac{B}{\mu_0} \right) = J \cdot E + E \cdot \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{B}{\mu_0} \cdot (\nabla \wedge E) - \nabla \cdot \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0} \right) = J \cdot E + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

D'après la 2^{ème} équation de Maxwell :

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \frac{B}{\mu_0} \cdot (\nabla \wedge E) = \frac{B}{\mu_0} \cdot \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t}$$

D'où :

$$-\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \nabla \cdot \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0} \right) = J \cdot E + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

$$J \cdot E = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \nabla \cdot \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0} \right)$$

En intégrant sur tout le volume τ on obtient :

$$\iiint_{\tau} (J \cdot E) d\tau = - \iiint_{\tau} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} \right) d\tau - \iiint_{\tau} \left(\nabla \cdot \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0} \right) \right) d\tau$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski on obtient :

$$\iiint_{\tau} (J \cdot E) d\tau = - \iiint_{\tau} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} \right) d\tau - \iint_S \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0} \right) \cdot dS$$

$$\iiint_{\tau} (J \cdot E) d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) d\tau - \iint_S \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0} \right) \cdot dS$$

S étant la surface qui délimite le volume τ :

$\iiint_{\tau} (J \cdot E) d\tau$: est la puissance dissipée dans le volume τ sous forme de chaleur par unité de temps.

$\iiint_{\tau} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) d\tau$: est l'énergie stockée dans le champ électrique E et magnétique B .

$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) d\tau$ peut être interprétées comme une diminution de l'énergie emmagasinée.
 $-\oint_S \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0} \right) dS$: doit représenter la puissance évacuée vers l'extérieur à travers la surface S . c'est une puissance rayonnée :

$$P(t) = \oint_S \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0} \right) \cdot dS = \oint_S \Pi \cdot dS$$

$$\Pi = E \wedge \frac{B}{\mu_0}$$

Π est le vecteur de Poynting. Il représente la densité de puissance instantanée, c'est un vecteur radiant.

$$\iiint_{\tau} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d\tau + \oint_S \Pi \cdot dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} w d\tau$$

En appliquant le théorème d'ostogradski on obtient :

$$\iiint_{\tau} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d\tau + \iiint_{\tau} (\nabla \cdot \Pi) d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} w d\tau$$

D'où :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot \Pi + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

C'est l'équation de conservation de l'énergie. Elle a la même structure mathématique que l'équation de la conservation de la charge électrique : $-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}$ avec $(\rho, \mathbf{J}) \Leftrightarrow (w, \Pi)$ mais on remarque que l'équation de la conservation de l'énergie contient un terme de dissipation de chaleur $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$. Autrement dit, l'énergie électromagnétique n'est pas totalement conservée.

Exemple : Dans la protection des animaux et des humains contre le danger des ondes électromagnétiques on doit évaluer le **DAS** (Débit d'Absorption Spécifique) où le **SAR** (Specific absorption rate). Si M_v est la masse volumique du corps on aura :

$$SAR = DAS = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}}{M_v} = \frac{\sigma E^2}{M_v} \quad (W/kg)$$

La norme pour le cerveau humain lors de l'utilisation d'un téléphone mobile collé à l'oreille est **DAS** ≤ 2 **W/kg**.

CHAPITRE V

CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LES MILIEUX DIELECTRIQUES

II. 1 Charges libres et charges liées

On entend par **charges libres**, les charges capables de se déplacer sur des distances supérieures aux distances atomiques : exemples les électrons de la dernière couche des métaux, les ions issues de la dissociation de sels dans un liquides.

On entend par **charges liées**, les charges qui ne peuvent se déplacer qu'à l'échelle de la molécule : exemple les dipôles électriques.

II. 1. 1 Molécules polaires et molécules non polaires

Si les molécules constituant un matériau possèdent un centre de symétrie, les barycentres des charges positives et négatives sont confondues en l'absence de champ extérieur. Ces molécules sont dites non polaires. On peut citer quelques exemples :

- des gaz : He, Ar, H₂, N₂
- des composés chimiques : CH₄, CCl₄
- une macromolécule : [-CH₂-CH₂-]

Par contre, d'autres molécules, dépourvues de centre de symétrie, présentent un moment électrique permanent ; elles sont dites polaires. On peut indiquer :

- des composés chimiques : HF, HCl, HBr, HI, CClH₃
- une macromolécule : [-CHCl-CHCl-] (polychlorure de vinyle)

Chaque molécule peut être assimilée à un dipôle électrique actif en ce qui concerne leur action à des distances supérieures à ces dimensions.

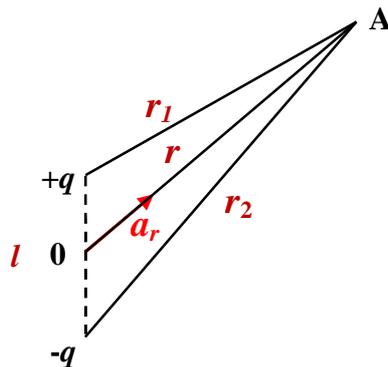


Figure V. 1 : Potentiel d'un dipôle
Pour $r \gg l$

$$V_A = \frac{p a_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$p = ql$ est le moment électrique ou le moment dipolaire de la molécule

II. 1. 2 Polarisation d'un diélectrique

Dans un milieu à structure moléculaire, chaque molécule est une distribution dont la charge totale est nulle mais elle peut être assimilée à un dipôle électrique actif. Si le milieu contient N molécules ayant chacune un moment électrique dp , on peut caractériser ce milieu par un champ vectoriel $P(r,t)$ définissant le moment électrique par unité de volume.

$$P(r, t) = \frac{dp}{d\tau}$$

$P(r,t)$ est appelée la polarisation du milieu

La charge liée d'un milieu peut être assimilée à une distribution de moments électriques. Il existe plusieurs types de polarisation (voir cours de matériaux diélectriques).

Dans un milieu linéaire et isotrope la polarisation s'exprime en fonction du champ électrique extérieur appliqué au milieu par la relation :

$$P = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot E$$

χ_e est la susceptibilité électrique

P caractérise les charges liées du milieu :

$$-\nabla \cdot P = \rho_{liées}$$

II. 2 Equations de Maxwell

II. 2.1 Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique)

$$\nabla \cdot B = 0$$

On a montré au chapitre I que cette équation est équivalente à :

$$\oiint_S B \cdot dS = 0$$

Elle exprime que le champ magnétique B est à flux conservatif. Les lignes de B ne peuvent pas diverger comme le font les lignes du champ électrique E à partir d'un point source.

II. 2.2 Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday)

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

On a montré également au chapitre I que cette équation est équivalente à :

$$\oint E \cdot dl = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Elle exprime que tout champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservatif. L'équation de Maxwell - Faraday rend compte du phénomène d'induction électromagnétique.

En régime permanent : $\partial B / \partial t = 0 \Leftrightarrow \nabla \wedge E = 0$

II. 2.3 Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell - Gauss)

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ρ est la densité de la charge totale dans le diélectrique :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{libres} + \rho_{liées} \\ \nabla \cdot E &= \frac{1}{\epsilon_0} \cdot (\rho_{libres} + \rho_{liées}) = \frac{\rho_{libres}}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot P}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot E + \frac{\nabla \cdot P}{\epsilon_0} &= \nabla \cdot \left(E + \frac{P}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{libres}}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \cdot E + P) &= \rho_{libre} \end{aligned}$$

On pose :

$$D = \epsilon_0 \cdot E + P$$

et on obtient :

$$\nabla \cdot D = \rho_{libre}$$

D est un champ vectoriel auxiliaire, on l'appelle l'excitation électrique ou l'induction électrique.

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_{totale}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot D = \rho_{libre}$$

Si le diélectrique est isotrope, sans charges électriques libres on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D &= 0 \\ D = \epsilon_0 \cdot E + P &= \epsilon_0 \cdot E + \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot E = \epsilon_0 \cdot (1 + \chi_e) \cdot E \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} 1 + \chi_e &= \epsilon_r \\ \epsilon &= \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \end{aligned}$$

ϵ_r est la permittivité relative du milieu

ϵ est la permittivité absolue du milieu

χ_e est la susceptibilité électrique du milieu (voir cours de matériaux diélectrique)

La relation entre les grandeurs électriques D et E est :

$$D = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E = \epsilon \cdot E$$

II. 2. 4 Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère)

Pour un milieu diélectrique de permittivité ϵ , non magnétique $\mu = \mu_0$, l'équation de Maxwell – Ampère s'écrit :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Si le diélectrique est isotrope et de conductivité nulle, on obtient :

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

II. 3 Conditions aux limites entre deux milieux diélectriques

Soient deux milieux diélectriques séparés par une surface S et caractérisés par des permittivités relatives ϵ_{r1} et ϵ_{r2} . On suppose que dans le milieu (1) règne un champ électrique \mathbf{E}_1 et dans le milieu (2) règne un champ électrique \mathbf{E}_2 .

II. 3. 1 Composante tangentielle du champ électrique

Calculons la circulation du champ électrique \mathbf{E} le long d'un rectangle $ABCD$ au voisinage de l'interface S entre les deux milieux comme l'indique la figure V. 2.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Si le rectangle $ABCD$ est aplati ($AD = BC = 0$), la surface qui s'appuie sur le contour est nulle ainsi que le flux magnétique. En outre, les composantes normales du champ électrique forment un angle de $\pi/2$ avec \mathbf{AB} et \mathbf{CD} , leur circulation est donc nulle. La circulation du champ électrique se réduit ainsi à :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = E_{t1} \cdot AB \cdot \cos 0 + E_{t2} \cdot CD \cdot \cos \pi = 0$$

d'où la relation importante :

$$E_{t1} = E_{t2}$$

Il y a continuité de la composante tangentielle du champ électrique à la surface de séparation S de deux milieux diélectriques.

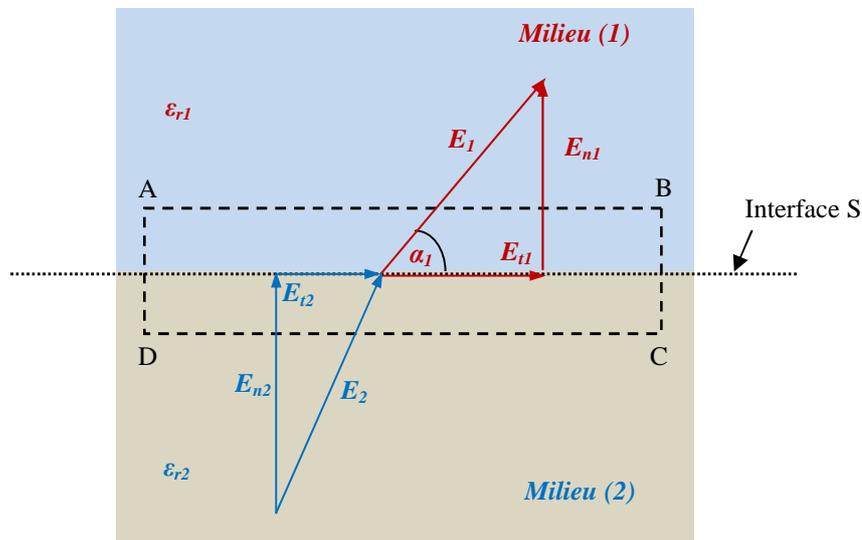


Figure V. 2 : Conditions aux limites de deux milieux diélectriques

L'induction électrique est reliée au champ électrique par $\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mathbf{E}$. On obtient la relation :

$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

II. 3. 2 Composante normale de l'induction électrique

Disposons à l'interface S des deux milieux diélectriques un petit cylindre fermé (figure V. 3). Sur la surface ΔS délimitée par le cylindre et l'interface S des deux milieux, plaçons une charge libre de densité σ . Appliquons le théorème de Gauss :

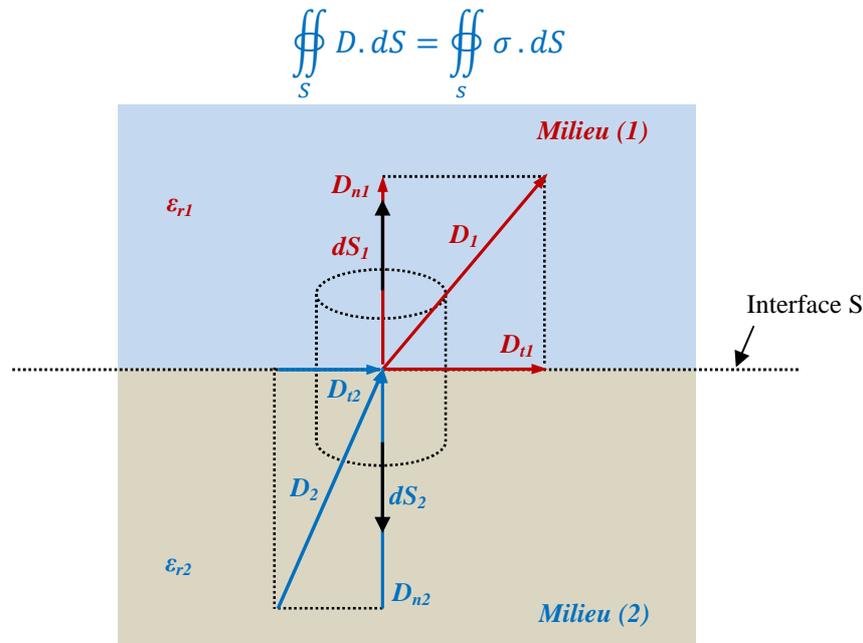


Figure V. 3 : Conditions aux limites de deux milieux diélectriques

Si le cylindre est aplati, la surface latérale du cylindre est nulle. En outre, les composantes tangentielles de l'induction électrique forment un angle de $\pi/2$ avec les surfaces de base du cylindre, leur flux est donc nulle. Le théorème de Gauss se réduit à :

$$\oiint_S D \cdot dS = \iint D_1 \cdot dS + \iint D_2 \cdot dS = D_{n1} \cdot \Delta S \cdot \cos 0 + D_{n2} \cdot \Delta S \cdot \cos \pi = \sigma \cdot \Delta S$$

d'où la relation :

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma \cdot n$$

Si l'interface est dépourvue de charges électriques ($\sigma = 0$), on obtient la relation importante :

$$D_{n1} = D_{n2}$$

Il y a continuité de la composante normale de l'induction électrique à la surface de séparation S de deux milieux diélectriques dépourvue de charges électrique.

Les composantes normales du champ électriques vérifient ainsi la relation :

$$\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot E_{n1} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot E_{n2}$$

d'où :

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$

Les angles d'incidence α_1 et α_2 des champs électriques (où des inductions électriques) par rapport à la surface de séparation S des deux milieux sont tels que :

$$\tan \alpha_1 = \frac{E_{n1}}{E_{t1}} \quad \text{et} \quad \tan \alpha_2 = \frac{E_{n2}}{E_{t2}}$$

De la relation $E_{t1} = E_{t2}$, on obtient la relation importante :

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$

CHAPITRE VI

CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LES MILIEUX MAGNETIQUES

III. 1 Matière aimantée

C'est un fait d'expérience que la matière dans certains cas peut être une source de champ magnétique (voir cours de matériaux). Par analogie aux diélectriques, l'aimantation \mathbf{J} d'un milieu aimanté est définie comme étant une distribution de moments magnétiques par unité de volume.

$$\mathbf{J} = \mu_0 \frac{d\mathbf{m}}{dv}$$

On définit aussi de la même façon que les densités de charges liées une densité de courant liée :

$$\mathbf{j}_{liée} = \nabla \wedge \frac{\mathbf{J}}{\mu_0}$$

III. 2 Equations de Maxwell pour le champ magnétique

En régime permanent où $\partial/\partial t = 0$ on peut écrire :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Le flux magnétique est à flux conservatif.

L'équation de Maxwell – Ampère devient :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{j} = \mu_0 \cdot (\mathbf{j}_{libre} + \mathbf{j}_{liée}) = \mu_0 \cdot \mathbf{j}_{libre} + \nabla \wedge \mathbf{J}$$

$$\nabla \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \wedge \frac{\mathbf{J}}{\mu_0} = \mathbf{j}_{libre}$$

$$\nabla \wedge \left(\frac{\mathbf{B} - \mathbf{J}}{\mu_0} \right) = \mathbf{j}_{libre}$$

On pose :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{J}}{\mu_0}$$

et on obtient :

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j}_{libre}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{j} \Leftrightarrow \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j}_{libre}$$

\mathbf{j}_{libre} est le courant de conduction dans le matériau. Cette équation est équivalente au théorème d'Ampère, on démontre facilement (voir cours de théorie du champ électromagnétique) que :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{total}$$

\mathbf{H} est un champ auxiliaire, on l'appelle l'excitation magnétique.

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{J}}{\mu_0} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H} + \mathbf{J}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H} + \mathbf{J} = \mu_0 \cdot \mathbf{H} + \mu_0 \cdot \chi_m \cdot \mathbf{H} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \mathbf{H}$$

On pose :

$$1 + \chi_m = \mu_r$$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

μ_r est la perméabilité relative du milieu ; μ est la perméabilité absolue du milieu

χ_m est la susceptibilité magnétique du milieu (voir cours de matériaux magnétique)

La relation entre les grandeurs magnétiques \mathbf{B} et \mathbf{H} est :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H} = \mu \cdot \mathbf{H}$$

III. 3 Conditions aux limites entre deux milieux magnétiques

Soient deux milieux magnétiques séparés par une surface S et caractérisés par des perméabilités relatives μ_{r1} et μ_{r2} . On suppose que dans le milieu (1) règne un champ magnétique \mathbf{H}_1 et dans le milieu (2) règne un champ magnétique \mathbf{H}_2 .

III. 3. 1 Composante tangentielle du champ magnétique

Calculons la circulation du champ magnétique \mathbf{H} le long d'un rectangle ABCDA au voisinage de l'interface S entre les deux milieux comme l'indique la figure VI. 1.

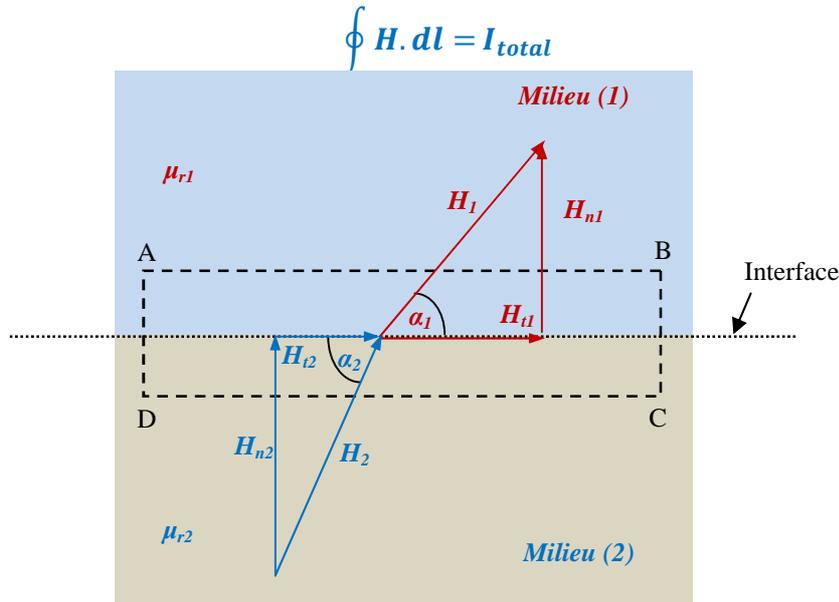


Figure VI. 1 : Conditions aux limites de deux milieux magnétiques.

Si le rectangle **ABCD** est aplati (**AD = BC = 0**) et que l'interface des deux milieux est dépourvue de nappe de courants (**$I_{total} = 0$**) alors la circulation totale devient nulle. En outre, les composantes normales du champ magnétique forment un angle de $\pi/2$ avec **AB** et **CD**, leur circulation est nulle :

$$\oint H \cdot dl = \int_A^B H_1 \cdot dl + \int_C^D H_2 \cdot dl = H_{t1} \cdot AB \cdot \cos 0 + H_{t2} \cdot CD \cdot \cos \pi = 0$$

d'où la relation importante :

$$H_{t1} = H_{t2}$$

Il y a continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à la surface de séparation S de deux milieux magnétiques dépourvue de nappe de courants.

L'induction magnétique est reliée au champ magnétique par **$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$** , On peut obtenir la relation :

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

Dans le cas où l'interface entre les deux milieux est pourvue d'une nappe de courant de distribution **I** (A/m), on obtient :

$$\oint H \cdot dl = \int_A^B k \cdot dl = \int_A^B H_1 \cdot dl + \int_C^D H_2 \cdot dl = H_{t1} \cdot AB \cdot \cos 0 + H_{t2} \cdot CD \cdot \cos \pi = I \cdot AB$$

d'où la relation :

$$H_{t1} - H_{t2} = I \wedge n$$

n est le vecteur unitaire normal à l'interface **S**

Il y a discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique à la surface de séparation S de deux milieux magnétiques pourvue d'une nappe de courants.

III. 3. 2 Composante normale de l'induction magnétique

Disposons à l'interface des deux milieux magnétiques un petit cylindre fermé de section **ΔS** , (figure VI. 2). Appliquons le principe de la conservation du flux magnétique :

$$\nabla \cdot B = 0 \Leftrightarrow \oiint_S B \cdot dS = 0$$

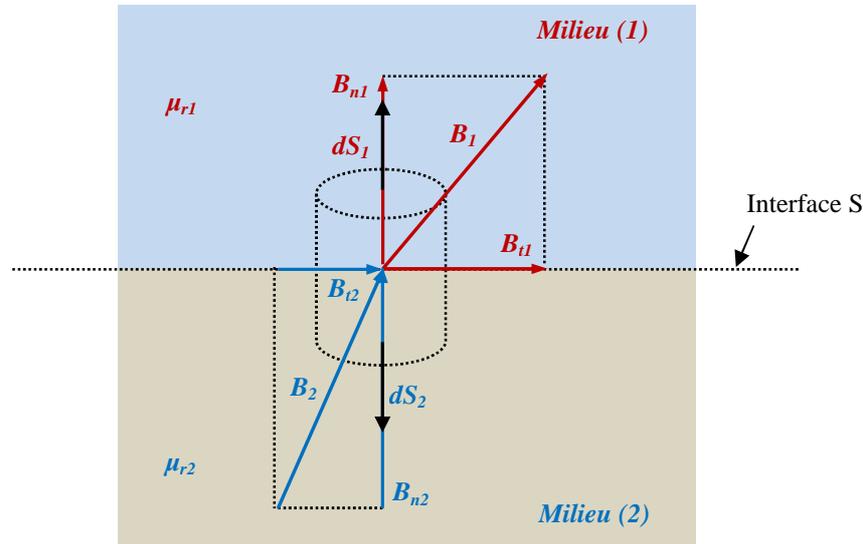


Figure VI. 2 : Conditions aux limites de deux milieux magnétiques.

Si le cylindre est aplati, la surface latérale du cylindre est nulle. En outre, les composantes tangentielles de l'induction magnétique forment un angle de $\pi/2$ avec les surfaces de base ΔS , leur flux est donc nulle. On peut écrire :

$$\oiint_S B \cdot dS = \iint B_1 \cdot dS + \iint B_2 \cdot dS = B_{n1} \cdot \Delta S \cdot \cos 0 + B_{n2} \cdot \Delta S \cdot \cos \pi = 0$$

d'où la relation importante :

$$B_{n1} = B_{n2}$$

Il y a continuité de la composante normale de l'induction magnétique à la surface de séparation S de deux milieux magnétiques.

Les composantes normales du champ magnétiques vérifient ainsi la relation :

$$\mu_0 \cdot \mu_{r1} \cdot H_{n1} = \mu_0 \cdot \mu_{r2} \cdot H_{n2}$$

d'où :

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$

Les angles d'incidence α_1 et α_2 des champs magnétiques (où des inductions magnétiques) par rapport à la surface de séparation S des deux milieux sont tels que :

$$\tan \alpha_1 = \frac{H_{n1}}{H_{t1}} \quad \text{et} \quad \tan \alpha_2 = \frac{H_{n2}}{H_{t2}}$$

De la relation $H_{t1} = H_{t2}$, on obtient la relation importante :

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$

III. 4 Equations de Maxwell-Gauss dans un milieu conducteur

Dans un conducteur d'électricité ρ_{libre} est la densité volumique de charges des électrons de conduction et $\rho_{liée}$ la densité volumique de charges des cations du réseau cristallin. Dans un conducteur la densité de charges totale, en régime permanent et dans tout le domaine des fréquences hertziennes, est donnée par :

$$\rho = \rho_{libre} + \rho_{liée} = 0$$

L'équation de maxwell – Gauss s'écrit dans ce cas :

$$\nabla \cdot E = 0$$

Dans les métaux dits ferromagnétiques tels que le **fer**, le **cobalt** et le **nickel** la densité de courants liée $j_{liée}$ est assimilée au comportement de spins des électrons (voir cours de matériaux magnétiques).

Dans les métaux usuels tels que l'**aluminium** et le **cuivre** $j_{liée} = 0$

III. 5 Equations de Maxwell dans le cas général

Les quatre équations de Maxwell dans le cas général s'écrivent :

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Faraday) :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{libre} + \rho_{liée})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{libres} + \rho_{liées}) = \frac{\rho_{libres}}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} = \nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho_{libres}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{libre}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \mathbf{E}) = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{libre}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{libre} + \rho_{liée}) \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon}$$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{libre} + \mathbf{j}_{liée} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{libre} + \mathbf{j}_{liée} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \cdot \left(\mathbf{j}_{libre} + \nabla \wedge \frac{\mathbf{J}}{\mu_0} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \wedge \frac{\mathbf{J}}{\mu_0} = \mathbf{j}_{libre} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \left(\frac{\mathbf{B} - \mathbf{J}}{\mu_0} \right) = \mathbf{j}_{libre} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

D'autre part on a :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{J}}{\mu_0}$$

et on obtient ainsi :

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j}_{libre} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

D'autre part on a :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H} + \mathbf{J} = \mu_0 \cdot \mathbf{H} + \mu_0 \cdot \chi_m \cdot \mathbf{H} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \mathbf{H}$$

$$1 + \chi_m = \mu_r \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

et on obtient ainsi :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H} = \mu \cdot \mathbf{H}$$

d'où :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{libre} + \mathbf{j}_{liée} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \cdot \left(\mathbf{j}_{libre} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

CHAPITRE VII

PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LES MILIEUX MATERIELS

IV. 1 Equations de propagation du champ électromagnétique

On considère un milieu quelconque de permittivité ϵ et de perméabilité μ . A partir des équations de Maxwell on cherche deux équations découplées ne contenant respectivement que le champ électrique E et que l'induction magnétique B .

Dans tout ce qui suit on désignera ρ_{libre} par ρ (la densité de charges libres) et j_{libre} par j la densité de courant de conduction dans le matériau. On peut obtenir des équations de Maxwell générales :

$$\begin{aligned}\nabla \wedge (\nabla \wedge E) &= \nabla (\nabla \cdot E) - \Delta E = \nabla \wedge \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge B) \\ \nabla \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) - \Delta E &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu j + \mu \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\Delta E - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial j}{\partial t}$$

Si l'on prend le $\nabla \wedge (\nabla \wedge B)$ on obtiendra :

$$\Delta B - \mu \epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \mu (\nabla \wedge j)$$

IV. 1. 1 Propagation dans les milieux diélectriques

On considère un milieu diélectrique de permittivité ϵ , de conductivité nulle, sans charges électriques et non magnétique de perméabilité μ_0 . Les équations de propagation du champ électrique E et d'induction magnétique B s'écrivent :

$$\begin{aligned}\Delta E - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta B - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

Cette équation est identique à l'équation de D'Alembert où la vitesse de propagation de l'onde est :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Les solutions sont de la forme :

$$\begin{aligned}E(x, t) &= E_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + E_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) \\ E(y, t) &= E_1 \left(t - \frac{y}{v} \right) + E_2 \left(t + \frac{y}{v} \right) \\ E(z, t) &= E_1 \left(t - \frac{z}{v} \right) + E_2 \left(t + \frac{z}{v} \right) \\ B(x, t) &= B_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + B_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) \\ B(y, t) &= B_1 \left(t - \frac{y}{v} \right) + B_2 \left(t + \frac{y}{v} \right) \\ B(z, t) &= B_1 \left(t - \frac{z}{v} \right) + B_2 \left(t + \frac{z}{v} \right)\end{aligned}$$

E et B sont représentés par la superposition de deux ondes progressive de vitesse opposées. E_1 et B_1 se propagent dans le sens positif et E_2 et B_2 se propagent dans le sens négatif.

Application au câble coaxial

On considère un câble coaxial idéal (sans pertes) de longueur l uniforme, figure VII. 1. La permittivité de l'isolant est ϵ et sa perméabilité est μ_0 . La capacité C_l et l'inductance L_l du câble sont données respectivement par (voir TD de théorie du champ électromagnétique) :

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}} l \quad (F) \quad ; \quad L_l = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) l \quad (H)$$

La capacité linéique C (capacité pour $l = 1$ m du câble) et l'inductance linéique L (inductance pour $l = 1$ m du câble) sont respectivement :

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (F/m) \quad ; \quad L = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (H/m)$$

Si l'on considère une portion de câble de longueur dx modélisée par une ligne à constantes réparties et supposée sans pertes (résistance des conducteurs $r \approx 0$ et résistance du diélectrique ($R \approx \infty$)).

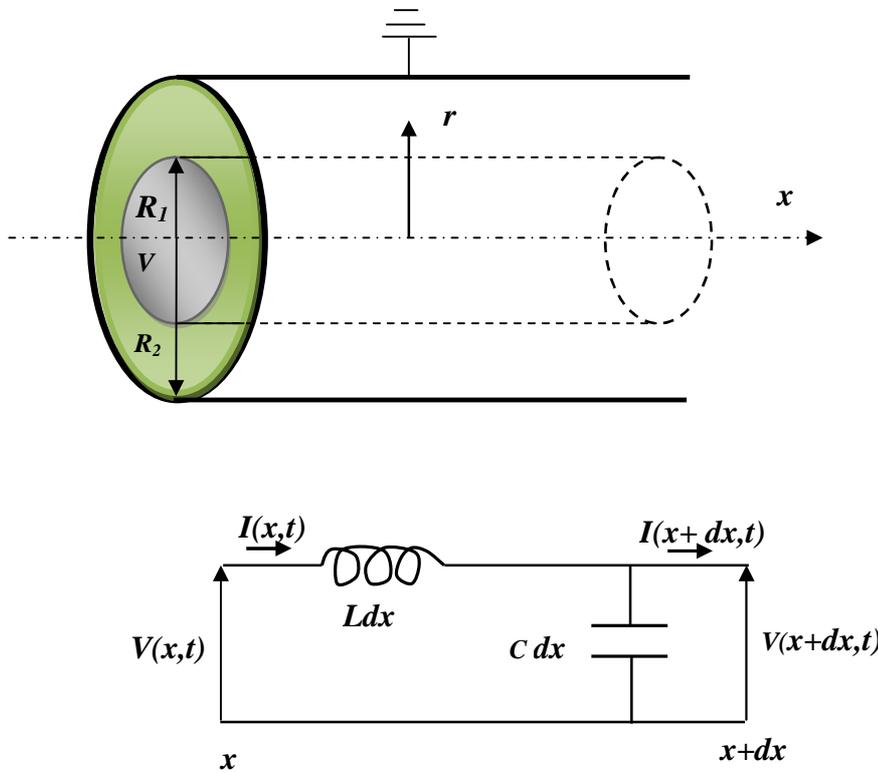


Figure VII. 1 : Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un câble coaxial.

La loi des mailles :

$$V(x, t) = V(x + dx, t) + Ldx \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{V(x, t) - V(x + dx, t)}{dx} = L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

La loi des nœuds :

$$I(x, t) = I(x + dx, t) + Cdx \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{I(x, t) - I(x + dx, t)}{dx} = C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \quad (2)$$

En dérivant l'équation (1) par rapport à x et l'équation (2) par rapport à t on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} &= -L \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x \partial t} &= -C \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

En dérivant l'équation (1) par rapport à t et l'équation (2) par rapport à x on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x \partial t} &= -L \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} &= -C \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x \partial t} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) sont identiques à l'équation de D'Alembert (voir le cours d'électromagnétisme) en posant :

$$\frac{1}{v^2} = LC \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Où v est dans ce cas la vitesse de l'onde électromagnétique. En remplaçant les expressions de L et C trouvées précédemment on obtient :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

D'où la relation importante :

$$\frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r}$$

Avec : $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

Remarque importante : La mesure de la vitesse v de propagation de l'onde permet de déduire la permittivité relative ϵ_r du diélectrique.

Les équations (3) et (4) peuvent admettre comme solution :

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_0 e^{j\omega(t - \frac{x}{v})} \quad \text{et} \quad I(x, t) = I_0 e^{j\omega(t - \frac{x}{v})} \\ \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} &= -j \frac{\omega}{v} V(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = j\omega I(x, t) \\ \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} &= -L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

D'où :

$$-j \frac{\omega}{v} V(x, t) = -L j \omega I(x, t)$$

$$Z = \frac{V(x, t)}{I(x, t)} = Lv = L \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Z est l'impédance caractéristique du câble. En remplaçant les expressions de L et C on obtient :

$$Z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\Omega)$$

On remarque que Z ne dépend pas de la longueur du câble

Coefficient de réflexion entre l'onde incidente et l'onde réfléchie

Si V_0 désigne l'onde incidente et V_1 désigne l'onde réfléchie on peut écrire :

$$V_0(x, t) = ZI_0(x, t) \quad \text{et} \quad V_1(x, t) = ZI_1(x, t)$$

En un point M quelconque du câble de coordonnée x on peut écrire :

$$I(x, t) = I_0(x, t) - I_1(x, t)$$

En bout du câble de longueur l :

$$V_0(l, t) = ZI_0(l, t) \quad \text{et} \quad V_1(l, t) = ZI_1(l, t)$$

$$I(l, t) = I_0(l, t) - I_1(l, t)$$

$$V(l, t) = R_u I(l, t) = V_0(l, t) + V_1(l, t)$$

$$\Rightarrow R_u (I_0(l, t) - I_1(l, t)) = ZI_0(l, t) + ZI_1(l, t)$$

$$(R_u - Z)I_0(l, t) = (R_u + Z)I_1(l, t)$$

D'où le coefficient de réflexion : $\alpha = I_1(l, t)/I_0(l, t)$

$$\alpha = \frac{R_u - Z}{R_u + Z}$$

- Si le câble est en court – circuit à son bout, $R_u = 0$, $\alpha = -1$ l'onde est réfléchie avec inversion d'amplitude.
- Si le câble est en circuit ouvert, $R_u = \infty$, $\alpha = 1$ l'onde est réfléchie sans inversion d'amplitude.
- Si la charge est adaptée, $R_u = Z$ l'onde est complètement absorbée par la charge.

Remarque importante : L'adaptation de la charge permet de mesurer l'impédance caractéristique Z du câble.

IV. 1. 2 Propagation dans les milieux conducteurs

Les équations de propagation du champ électromagnétique (voir cours de théorie du champ électromagnétique) dans un milieu de perméabilité μ et de permittivité ϵ quelconques sont :

$$\Delta E - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial j}{\partial t}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu (\nabla \wedge \mathbf{j})$$

Dans les milieux conducteurs et dans tout le domaine des fréquences radio (le domaine des hyperfréquences est exclu), la loi d'Ohm est supposée vérifiée. Ceci entraîne que la densité de charges ρ est nulle à l'intérieur de ces conducteurs. Ces deux équations s'écrivent dans ce cas comme suit :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu (\nabla \wedge \mathbf{j})$$

De la loi d'Ohm locale, $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ et de l'équation de Maxwell – Faraday $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ on obtient :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

IV. 1. 2. 1 Effet de peau ou effet Kelvin

On considère un métal de conductivité σ , non magnétique de perméabilité μ_0 , de permittivité ε_0 et occupant le demi-plan $x \geq 0$ (en coordonnées cartésiennes). Soit une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale dans le vide et considérons uniquement la propagation unidimensionnelle dans le sens positif vers le conducteur, par exemple selon l'axe ox comme l'indique la figure VII. 2. A la surface du conducteur une partie de cette onde est réfléchie et une autre partie est transmise au métal suivant la même direction. Le champ électrique \mathbf{E} de l'onde transmise, en notation complexe, s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot \mathbf{a}_y$$

Où ω est la pulsation et k le vecteur d'onde dans le conducteur.

On retrouve facilement le champ d'induction magnétique \mathbf{B} par l'équation de Maxwell – Faraday :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = B_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot \mathbf{a}_z$$

Avec :

$$B_0 = \frac{k}{\omega} \cdot E_0$$

Etudions l'évolution du champ électrique transmis lorsqu'il pénètre dans le conducteur $x \geq 0$)

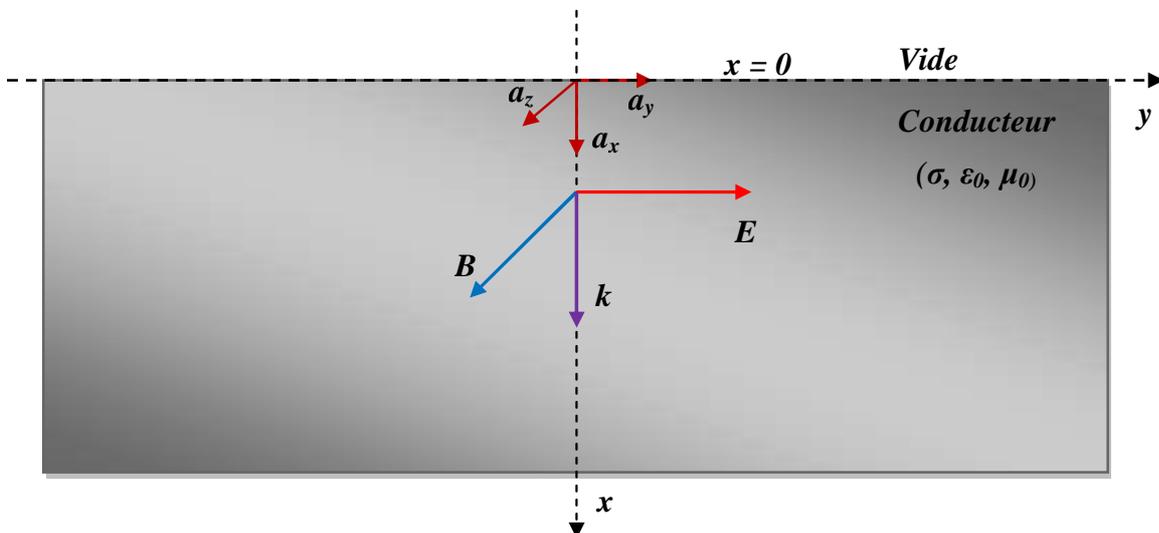


Figure VII. 2 : Propagation de l'onde électromagnétique dans le conducteur.

L'équation de propagation unidimensionnelle du champ électrique s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\frac{d^2 E}{dx^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 E}{dt^2} - \mu_0 \sigma \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = -k^2 \cdot E \quad ; \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = -\omega^2 \cdot E \quad ; \quad \frac{dE}{dt} = i\omega \cdot E \quad ; \quad \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0\sigma = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \right)$$

$k = f(\omega)$ est la relation de dispersion dans le métal.

A des hautes fréquences (domaine des hyperfréquences exclu) l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \gg 1$$

Cette approximation revient à dire que la densité de courant de déplacement est négligeable devant la densité de courant de conduction. On peut ainsi écrire :

$$k^2 = -i\omega\mu_0\sigma = -2i \frac{\omega\mu_0\sigma}{2}$$

$$(1 - i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i$$

d'où

$$k = \sqrt{-2i \frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} = \pm(1 - i) \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$$

En posant :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$$

on obtient :

$$k = \frac{1 - i}{\delta}$$

L'expression du champ électrique devient ainsi :

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \frac{1-i}{\delta}x)}, a_y = E_0 e^{(i\omega t - i\frac{x}{\delta} - \frac{x}{\delta})}, a_y$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y$$

Le facteur réel $e^{-\frac{x}{\delta}}$ traduit l'atténuation de l'onde dans le conducteur.

Le facteur $e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})}$ traduit la propagation de l'onde dans le conducteur.

δ représente la profondeur de pénétration du champ électrique dans le conducteur. On appelle **δ l'épaisseur de peau.**

De la loi d'Ohm $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ on peut obtenir la densité de courant :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{J}(x) \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y$$

avec :

$$\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{J}(x) = \mathbf{j}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}}$$

Les amplitudes des grandeurs \mathbf{j} et \mathbf{E} sont maximales à la surface du conducteur ($x = 0$) et diminuent de façon exponentielle en pénétrant dans le conducteur.

$$\text{pour } x = 0 \rightarrow J(0) = j_0$$

$$\text{pour } x = \delta \rightarrow J(\delta) = \frac{j_0}{e} \Rightarrow \frac{J(\delta)}{j_0} \approx 37\%$$

Pour une profondeur de quelques δ la densité de courant s'annule dans le conducteur, figure VII 3.

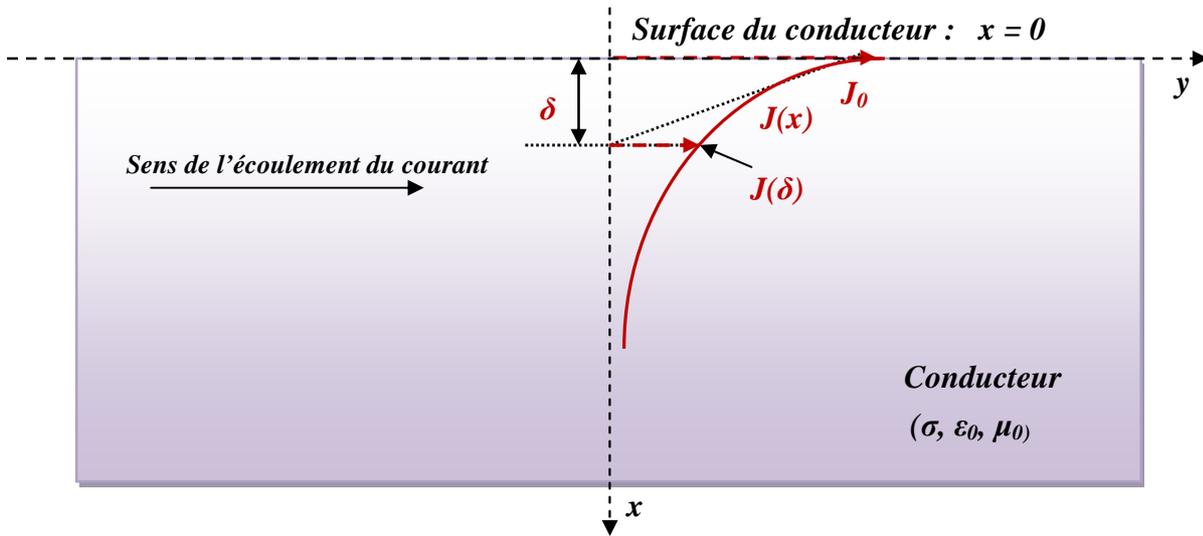


Figure VII. 3 : Variation de l'amplitude de la densité de courant dans le conducteur (valablement aussi pour le champ)

Application au calcul de la résistance d'un conducteur cylindrique

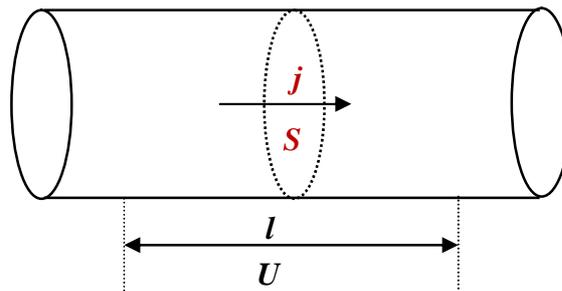


Figure VII. 4 : Conducteur cylindrique

En courant continu la densité de courant j est uniforme et le courant I est donné par :

$$I = j \cdot S = \sigma \cdot E \cdot S = \frac{\sigma S}{l} U$$

Donc la résistance du conducteur est :

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot S}$$

En courant alternatif la densité de courant j n'est plus uniforme et on distingue deux cas :

1. Si le rayon du conducteur est très grand devant l'épaisseur de peau $a \gg \delta$, l'onde pénètre sur une très petite distance et la densité de courant j n'est plus uniforme. La section utile à prendre est uniquement la couronne extérieure $S_u = 2\pi a \delta$ et la résistance est :

$$R_u = \frac{l}{\sigma \cdot 2\pi a \delta}$$

2. Si le rayon du conducteur est petit devant l'épaisseur de peau $a < \delta$, la section à prendre est celle du conducteur $S = \pi a^2$ et la résistance est :

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot \pi a^2}$$

$$R_u = R \frac{a}{2\delta}$$

La résistance est donc proportionnelle à $\sqrt{\omega}$

Pour un conducteur en cuivre de rayon $a = 1 \text{ mm}$ on obtient :

Exemple du cuivre : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ F/m}$; $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$

- $\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s} \rightarrow \delta = 9,3 \text{ mm}$; $R_u = R$
- $\omega = 2\pi f = 10^8 \text{ rad/s} \rightarrow \delta = 0,0163 \text{ mm}$; $R_u = 30,5 R$

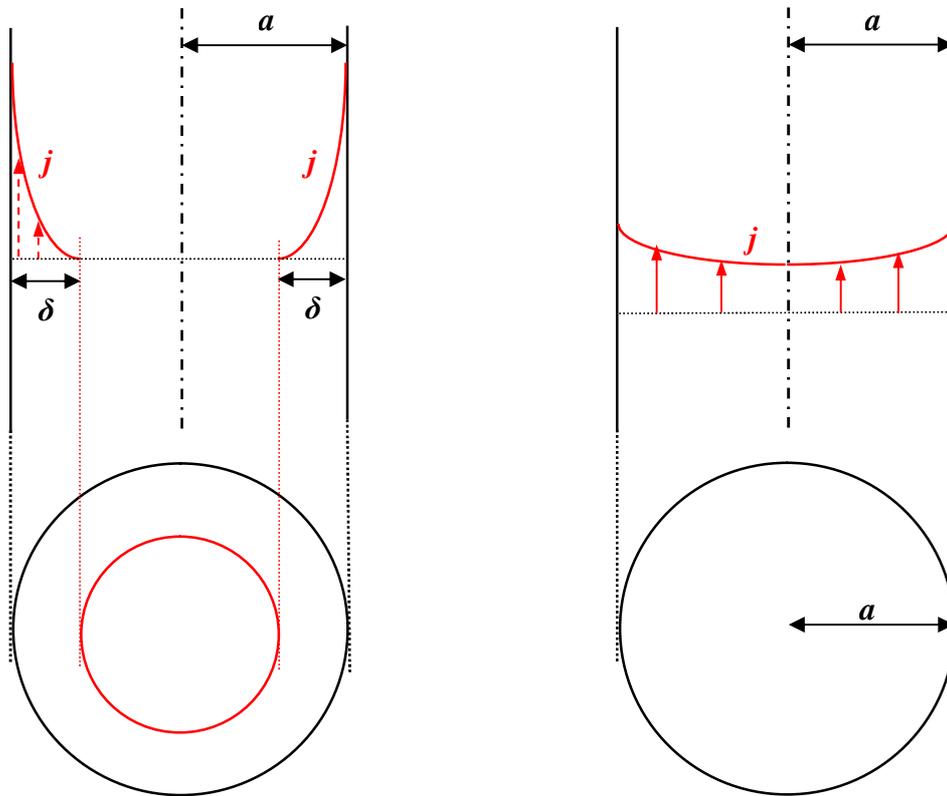


Figure VII. 5 : Section utile dans un conducteur cylindrique

IV. 1. 2.2 Vitesse de l'onde électromagnétique dans le conducteur

La phase de l'onde est :

$$\varphi(x, t) = \omega t - \frac{x}{\delta}$$

La vitesse de phase (ou vitesse de propagation de la phase) est la vitesse de déplacement d'un plan d'onde dans la direction de propagation. Entre les instants t et $t + dt$ pour un même plan d'onde, on a :

$$\varphi(x, t) = \varphi(x + dx, t + dt) \Rightarrow \omega t - \frac{x}{\delta} = \omega t + \omega dt - \frac{x + dx}{\delta}$$

$$\Rightarrow \omega dt - \frac{dx}{\delta} = 0$$

La vitesse de phase est dz/dt , d'où :

$$v_\varphi = \delta \cdot \omega$$

Dans le vide $k = \omega/c$ d'où :

$$v_{\varphi} = c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Le rapport α des vitesses de phase de l'onde dans le métal et dans le vide est :

$$\alpha = \frac{\delta \omega}{c} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \cdot \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \sqrt{\frac{2 \epsilon_0 \omega}{\sigma}}$$

IV. 1.2.3 Champ d'induction magnétique dans le conducteur

Le champ d'induction magnétique donné au paragraphe IV.1. 2. 1 peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} B &= \frac{k}{\omega} \cdot E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot a_z = \frac{1-i}{\delta \omega} \cdot E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot a_z \\ B &= \frac{E_0}{\delta \omega} e^{(i\omega t - i\frac{1-i}{\delta}x)} (1-i) = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{(i\omega t - i\frac{x}{\delta} + \frac{x}{\delta})} \cdot \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot a_z \\ B &= \sqrt{2} \frac{E_0}{\delta \omega} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot a_z \\ B &= \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2 \omega}} \cdot E_0 \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot a_z \\ B &= B_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \cdot a_z \end{aligned}$$

avec :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad ; \quad \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \quad ; \quad B_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2 \omega}} \cdot E_0$$

On remarque que le champ d'induction magnétique B est en retard de phase sur le champ électrique E de $\pi/4$ dans le conducteur. L'induction magnétique B suit la même loi d'atténuation que la densité de courant et du champ électrique dans le conducteur. Le rapport des amplitudes de ces deux champs est :

$$\frac{\|B\|}{\|E\|} = \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2 \omega}} = \sqrt{\frac{2}{2 \epsilon_0 c^2 \omega} \frac{\sigma}{\sigma}} = \frac{\sqrt{2}}{c \cdot \sqrt{\frac{2 \epsilon_0 \omega}{\sigma}}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha c}$$

Dans le vide B et E sont en phase et le rapport de leur amplitude est :

$$\frac{\|B\|}{\|E\|} = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$$

IV. 1.2.4 Longueur d'onde dans le conducteur

La longueur d'onde de l'onde transmise dans le conducteur est :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Re(k)} = 2\pi\delta$$

et la longueur d'onde dans le vide est :

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} c = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

d'où le rapport des longueurs d'onde :

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{2\omega \epsilon_0}{\sigma}} \ll 1$$

L'onde transmise dans le conducteur ne pénètre que sur une profondeur de quelques δ et sa longueur d'onde est $\lambda = 2\pi\delta \sim 6\delta$, donc cette onde est quasiment morte avant même qu'il n'y ait une longueur d'onde complète :

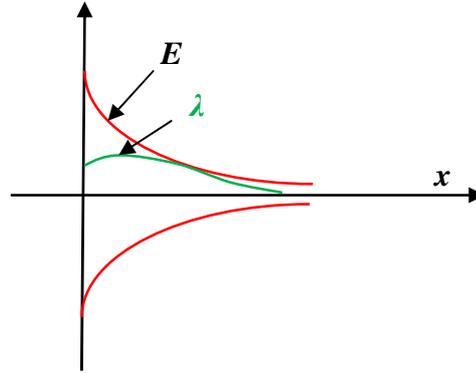


Figure VII. 6 : Longueur d'onde dans le conducteur

V Effet de peau ou effet Kelvin dans un matériau magnétique conducteur

Les équations de propagation du champ électromagnétique dans un milieu de perméabilité μ et de permittivité ϵ quelconques sont :

$$\Delta E - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial j}{\partial t} \quad (1)$$

$$\Delta B - \epsilon\mu \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \mu(\nabla \wedge j) \quad (2)$$

Dans les milieux magnétiques conducteurs et dans tout le domaine des fréquences radio (le domaine des hyperfréquences est exclu), la loi d'Ohm est supposée vérifiée. Ceci entraîne que la densité de charges ρ est nulle à l'intérieur de ces conducteurs. Ces deux équations s'écrivent dans ce cas comme suit :

$$\Delta E - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial j}{\partial t} \quad (3)$$

$$\Delta B - \epsilon\mu \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \mu(\nabla \wedge j) \quad (4)$$

De la loi d'Ohm locale, $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ et de l'équation de Maxwell - Faraday $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ on obtient :

$$\mu(\nabla \wedge j) = \mu(\nabla \wedge \sigma E) = \mu\sigma \nabla \wedge E = -\mu\sigma \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Delta E - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

$$\Delta B - \epsilon\mu \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

On considère un matériau de conductivité σ , de perméabilité $\mu = \mu_0 \mu_r$ et de permittivité ϵ_0 et occupant le demi-plan $x \geq 0$ (en coordonnées cartésiennes). Le champ électrique \mathbf{E} (supposé à une seule composante selon $\mathbf{0}_y$) s'écrit en notation complexe sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot \mathbf{a}_y \quad (7)$$

Où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation et \mathbf{k} le vecteur d'onde dans le matériau.

On retrouve l'induction magnétique \mathbf{B} par l'équation $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ après intégration :

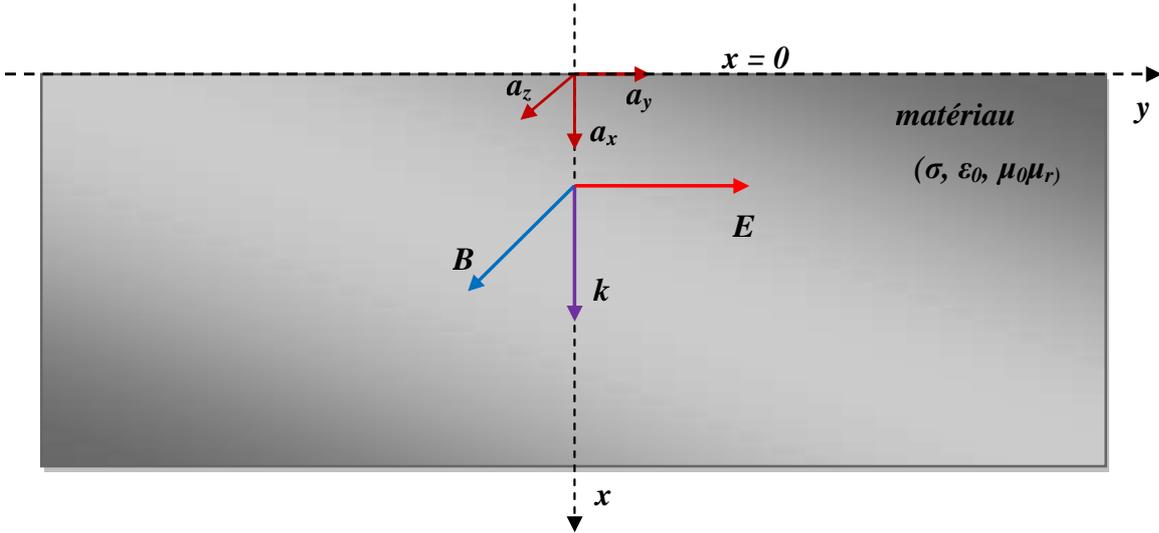
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot \mathbf{a}_z \quad (8)$$

Avec :

$$B_0 = \frac{k}{\omega} \cdot E_0 \quad (9)$$

Etudions l'évolution du champ électrique dans le matériau ($x \geq 0$). L'équation de propagation unidimensionnelle du champ électrique s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\frac{d^2 E}{dx^2} - \epsilon_0 \mu_0 \mu_r \frac{d^2 E}{dt^2} - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{dE}{dt} = 0 \quad (10)$$



De l'équation (7) on obtient :

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = -k^2 \cdot E \quad ; \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = -\omega^2 \cdot E \quad ; \quad \frac{dE}{dt} = i\omega \cdot E$$

Avec $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ et en remplaçant ces expressions dans l'équation (10) on obtient :

$$-k^2 E + \frac{\mu_r \omega^2}{c^2} E - i\omega \mu_0 \mu_r \sigma E = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{\mu_r \omega^2}{c^2} - i\omega \mu_0 \mu_r \sigma$$

$$k = \frac{\mu_r \omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \right) \quad (11)$$

L'inégalité suivante est vérifiée (sauf au-delà des hyperfréquences) :

$$\frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \gg 1$$

On peut ainsi écrire :

$$k^2 = -i\omega \mu_0 \mu_r \sigma = -2i \frac{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}{2}$$

$$(1-i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i$$

d'où

$$k = \sqrt{-2i \frac{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}{2}} = \pm(1-i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}{2}} \quad (12)$$

En posant :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}} \quad (13)$$

on obtient :

$$k = \frac{1-i}{\delta}$$

L'expression du champ électrique devient ainsi :

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \frac{1-i}{\delta} x)} \cdot \mathbf{a}_y = E_0 e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y \quad (14)$$

L'amplitude du champ électrique s'écrit sous la forme :

$$E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$$

De la loi d'Ohm $J = \sigma \cdot E$ et en remplaçant dans l'équation (14) on obtient la densité de courant :

$$J = \sigma E = \sigma E_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y \quad (15)$$

avec : $j_0 = \sigma E_0$

L'amplitude de la densité de courant dépend de x (profondeur dans le matériau) et s'écrit sous la forme :

$$J(x) = J_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (16)$$

Le facteur réel $e^{-\frac{x}{\delta}}$ traduit l'atténuation de l'onde dans le matériau.

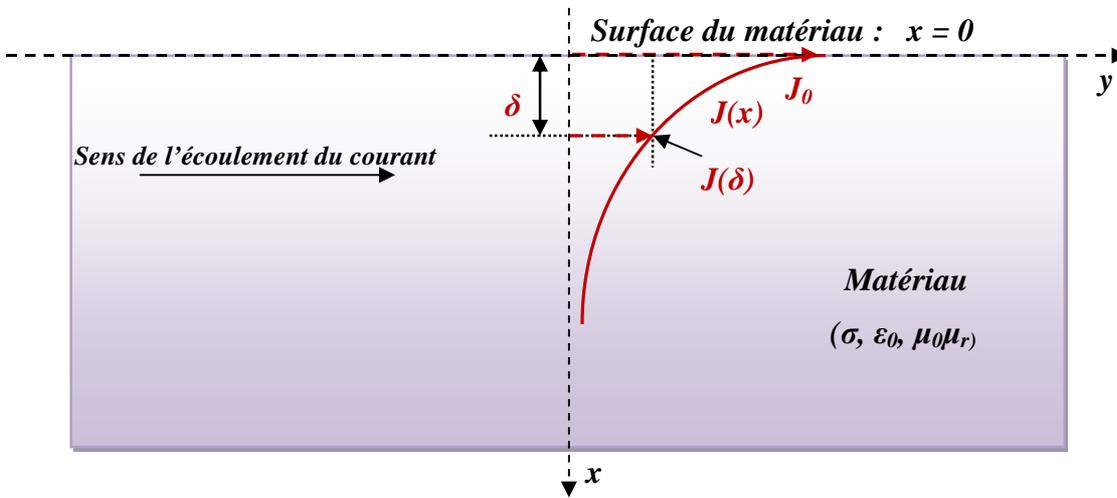
Le facteur $e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})}$ traduit la propagation de l'onde dans le matériau.

δ représente la profondeur de pénétration de la densité du courant dans le matériau. On appelle δ l'épaisseur de peau.

L'amplitude de la densité de courant J est maximale à la surface du matériau ($x = 0$) et diminue de façon exponentielle en pénétrant dans le matériau.

$$\begin{aligned} \text{pour } x = 0 &\rightarrow J(0) = J_0 \\ \text{pour } x = \delta &\rightarrow J(\delta) = \frac{J_0}{e} \Rightarrow \frac{J(\delta)}{J_0} \approx 37\% \end{aligned}$$

Pour une profondeur de quelques δ la densité de courant s'annule dans le matériau (d'où vient le mot effet de peau c'est-à-dire que le phénomène est superficiel).



Induction magnétique dans le matériau

L'induction magnétique donnée par l'équation (8) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} B &= \frac{k}{\omega} \cdot E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot a_z = \frac{1-i}{\delta\omega} \cdot E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot a_z \\ B &= \frac{E_0}{\delta\omega} e^{i(\omega t - i\frac{1-i}{\delta}x)} (1-i) = \frac{E_0}{\delta\omega} e^{i(\omega t - i\frac{x}{\delta} + \frac{x}{\delta})} \cdot \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot a_z \\ B &= \sqrt{2} \frac{E_0}{\delta\omega} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot a_z \quad (17) \end{aligned}$$

En remplaçant l'expression de δ donnée par l'équation (13) et avec $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ on obtient de l'équation (17) :

$$B = \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2 \omega}} \cdot E_0 \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot a_z = B_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} a_z$$

avec :

$$B_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2 \omega}} \cdot E_0$$

L'induction magnétique peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$B = B_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} a_z \quad (18)$$

L'amplitude de l'induction magnétique B dépend de x (profondeur dans le matériau) et suit la même loi d'atténuation en exponentielle comme la densité de courant :

$$B(x) = B_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (19)$$

Le facteur réel $e^{-\frac{x}{\delta}}$ traduit l'atténuation de l'induction magnétique dans le matériau.

Le facteur $e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)}$ traduit la propagation de l'onde dans le matériau.

Les expressions des amplitudes de l'induction magnétique et de la densité de courant sont également valables aux basses fréquences où la propagation du champ électromagnétique est négligeable.

Conclusion:

- *Lorsqu'une onde électromagnétique arrive sur une surface métallique, le champ électrique de l'onde crée dans le métal un courant de densité $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ sur une profondeur de l'ordre de δ puisque sur une profondeur plus grande $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Ce résultat traduit l'effet de peau.*
- *Dans le cas des métaux usuels (fer, cuivre, aluminium, ...) une partie de l'onde est transmise pour le métal et une autre partie est réfléchi (réflexion partielle). Ce courant pelliculaire rayonne une onde électromagnétique à l'origine de l'onde réfléchi.*
- *Si l'épaisseur e du conducteur est très grande devant l'épaisseur de peau δ ($e \gg \delta$) alors l'onde transmise est complètement amortie dans le métal. Dans le cas où $e < \delta$) l'onde transmise est amortie partiellement et continue sa propagation à la sortie du conducteur.*
- *Dans la limite d'une conductivité $\sigma \rightarrow \infty$ (supraconducteur) l'épaisseur de peau est $\delta = 0$ l'onde incidente est complètement réfléchi (réflexion totale). Dans ce cas les amplitudes des ondes incidente et réfléchi sont égales ainsi que les amplitudes de leur vecteur d'onde, ce qui donne naissance à une onde stationnaire qui fera l'objet du prochain chapitre.*

En pratique ce phénomène de réflexion d'onde électromagnétique est quantifié par un coefficient de réflexion (voir TP sur les ondes électromagnétiques dans un câble coaxial).

CHAPITRE VIII

REFLEXION D'ONDES SUR UN PLAN CONDUCTEUR PARFAIT

ONDES STATIONNAIRES

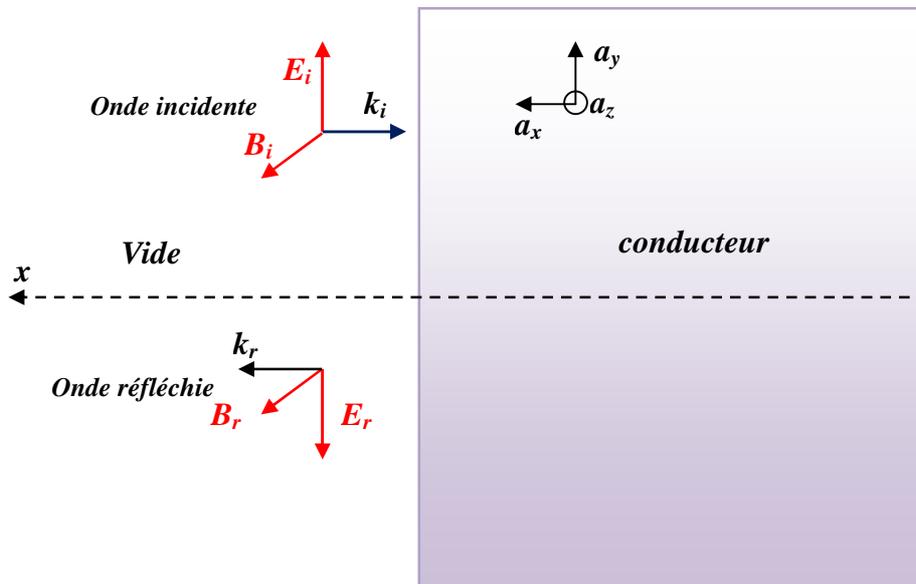
V. 1 Onde incidente

Les relations de passage du champ électromagnétique entre deux milieux diélectriques différents et entre deux milieux magnétiques différents sont établies aux chapitres II et III. Ces relations peuvent être également appliquées au passage du champ électromagnétique entre le vide, milieu (1) et un conducteur parfait (milieu 2) non magnétique. Ces deux milieux ont une permittivité ϵ_0 et une perméabilité μ_0 . On obtient :

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2} \\ E_{n1} - E_{n2} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot n \\ H_{t1} - H_{t2} &= I \wedge n \\ B_{n1} &= B_{n2} \\ B_{t1} - B_{t2} &= \mu_0 I \wedge n \end{aligned}$$

Où I est le courant de conduction, ρ la densité de charges libres à la surface du conducteur et n le vecteur unitaire normal à cette surface.

On considère un conducteur parfait de conductivité $\sigma \rightarrow \infty$, non magnétique de perméabilité μ_0 , de permittivité ϵ_0 et occupant le demi-plan $x \leq 0$ (coordonnées cartésiennes). Soit une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale dans le vide et considérons uniquement la propagation unidimensionnelle dans le sens négatif vers le conducteur, par exemple selon l'axe ox comme l'indique la figure ci-dessous :



A l'intérieur du conducteur parfait le champ électrique est nul. Le champ d'induction magnétique dans ce conducteur peut être obtenu à partir de l'équation de Maxwell – Faraday :

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \Rightarrow B = \text{constante}$$

En absence de champ d'induction magnétique stationnaire : $B = 0$

L'onde incidente E_i est donnée par :

$$E_i \begin{pmatrix} E_{xi} = 0 \\ E_{yi} = E_0 \cos(\omega t + kx) \\ E_{zi} = 0 \end{pmatrix}$$

L'onde incidente associée \mathbf{B}_i est donnée par :

$$\mathbf{B}_i \begin{pmatrix} B_{xi} = 0 \\ E_{yi} = 0 \\ B_{zi} = -B_0 \cos(\omega t + kx) \end{pmatrix}$$

En appliquant les relations de passage entre le vide et le conducteur on obtient :

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2} = 0 \\ E_{n1} - E_{n2} &= E_{n1} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot n \\ B_{t1} - B_{t2} &= B_{t1} = \mu_0 I \wedge n \end{aligned}$$

A la surface du conducteur parfait et en absence de champ magnétique permanent les champs électrique et magnétique sont tels que :

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot n \quad \text{et} \quad B = \mu_0 I \wedge n$$

Le champ incident \mathbf{E}_i ne vérifie pas l'équation précédente, il faut donc admettre l'existence d'une onde réfléchie de champ électrique \mathbf{E}_r et de champ d'induction magnétique \mathbf{B}_r telles que :

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot n \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r = \mu_0 I \wedge n$$

$(\mathbf{E}_r, \mathbf{B}_r)$ est une onde plane progressive de pulsation ω , son vecteur d'onde est \mathbf{k}_r , perpendiculaire au plan du conducteur.

- Si \mathbf{k}_r n'est pas \perp au plan alors \mathbf{B}_r ne sera pas \parallel au plan conducteur
- $\mathbf{B}_r \perp \mathbf{n}$, $\mathbf{B}_r \perp \mathbf{i}$ et $\mathbf{i} \parallel$ plan

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_r \text{ est tangent au plan} \\ \mathbf{B}_r \text{ est tangent au plan} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{E}_i = -\mathbf{E}_r \Rightarrow \rho = 0$$

- $|\mathbf{k}_r| = k$

$$\mathbf{E}_r \begin{pmatrix} E_{xr} = 0 \\ E_{yr} = -E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_{zr} = 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_r \begin{pmatrix} B_{xr} = 0 \\ E_{yr} = 0 \\ B_{zr} = -B_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

A $x = 0$ le courant est :

$$I = \begin{pmatrix} I_y = \frac{2B_0}{\mu_0} \cos \omega t \\ I_z = 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui montre l'existence d'un courant superficiel engendré par l'onde. Dans le cas limite du métal conducteur parfait, un tel courant ne dissipe aucune puissance par effet Joule. Le champ électrique \mathbf{E}_i de l'onde incidente met en mouvement les électrons du métal (suivant l'axe oy). La nappe de courant sinusoïdale ainsi engendrée est à son tour la source d'une nouvelle onde.

- Pour $x < 0$ $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{B} = 0$
- Pour $x > 0$, l'onde créée par la nappe de courant constitue l'onde réfléchie

V. 2 Interférence de l'onde réfléchie et de l'onde incidente

Dans le vide à $x > 0$ les ondes incidente et réfléchie se superpose. Leur amplitude ainsi celle de leur vecteur d'onde sont égales et nous avons :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E = E_i + E_r \quad \text{et} \quad B = B_i + B_r \\ E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(\omega t + kx) - E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ E_y = 0 \\ B_z = -B_0 \cos(\omega t + kx) - B_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

d'où :

$$E = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = -2E_0 \sin kx \cdot \sin \omega t \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ E_y = 0 \\ B_z = -2B_0 \cos kx \cdot \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Les amplitudes de \mathbf{E} et \mathbf{B} dépendent de x :

- Les nœuds (amplitude nulle) de \mathbf{E} sont tels que : $\sin kx = 0$

$$x = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2}$$

- Les nœuds (amplitude nulle) de \mathbf{B} sont tels que : $\cos kx = 0$

$$x = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

- Les ventres (amplitude maximale) de \mathbf{E} sont tels que : $\sin kx = \pm 1$

$$x = n \frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{2k} = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

- Les ventres (amplitude maximale) de \mathbf{B} sont tels que : $\cos kx = \pm 1$

$$x = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2}$$

1. Deux ventres consécutifs ou deux nœuds consécutifs de \mathbf{E} (ou de \mathbf{B}) sont distants de $\lambda/2$
2. Un nœud et un ventre consécutifs de \mathbf{E} (ou de \mathbf{B}) sont distants de $\lambda/4$

La phase de \mathbf{E} (ou de \mathbf{B}) ne dépend que du temps, il n'y a pas de propagation de la phase. Cette phase est stationnaire d'où le nom d'onde stationnaire donné à l'onde résultante (\mathbf{E}, \mathbf{B}) .

- Une onde stationnaire est caractérisée par un produit : $f(x) \cdot g(t)$
- Une onde progressive est caractérisée par : $f(t - x/v)$

V. 3 Aspect énergétique de l'onde stationnaire

V. 3. 1 Densité de l'énergie

La densité de l'énergie de l'onde stationnaire est :

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = 2\varepsilon_0 E_0^2 (\sin^2 \omega t \cdot \sin^2 kx + \cos^2 \omega t \cdot \cos^2 kx)$$

La moyenne temporelle de w est donnée par :

$$\langle w \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 kx + \frac{1}{2} \cos^2 kx \right) = \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0}$$

Cette moyenne est indépendante du point considéré.

V. 3. 2 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting dans l'onde stationnaire s'écrit sous la forme :

$$\Pi = E \wedge \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ -2E_0 \sin kx \cdot \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2B_0 \cos kx \cdot \cos \omega t \end{pmatrix}$$
$$\Pi \begin{pmatrix} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin 2kx \cdot \sin 2\omega t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de Poynting Π est nul aux ventres et aux nœuds de E et de B ce qui empêche la propagation de l'énergie électromagnétique de l'onde stationnaire. La valeur moyenne du vecteur Π est nulle en tout point :

$$\langle \Pi \rangle = 0$$

RECAPITULATION

A) Cas général : lorsque les phénomènes dépendent du temps

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$

Loi de force de Lorentz : $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$; $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant) : $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Potentiels : $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$; $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

Jauge de Lorentz : $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

Equations de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$; $\Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = 0$

B) En régime quasi-permanent : lorsque les grandeurs dépendent du temps mais le phénomène de propagation est négligeable.

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$

Loi de force de Lorentz : $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$; $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant) : $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

Potentiels : $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$; $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

Jauge de Coulomb : $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

Equations de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$; $\Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = 0$

C) En régime permanent : lorsque les charges électriques sont mobiles mais les grandeurs sont indépendantes du temps $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$

Loi de Force de Lorentz : $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$; $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant) : $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

Potentiels : $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$; $\mathbf{E} = -\nabla V$

Jauge de Coulomb : $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

Equations de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$; $\Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = 0$

D) En électrostatique : lorsque les charges électriques sont fixes

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

Loi de force de Lorentz : $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$; $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \rho \mathbf{E}$

Potentiel : $\mathbf{E} = -\nabla V$

Equation de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$

E) En magnétostatique : lorsque le champ magnétique est créé par des courants continus

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$

Loi de force de Lorentz : $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$; $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant): $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

Potentiel : $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$

Jauge de Coulomb : $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

Equation de Poisson : $\Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = 0$

ρ est la densité de charges libres, \mathbf{j} la densité du courant de conduction, ε la permittivité du milieu et μ la perméabilité du milieu.