

ELECTROMAGNETISME DANS LES MILIEUX MATERIELS

CHAPITRE I : RAPPEL SUR LES EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

I. 1 Le champ électromagnétique

I. 2 Les équations de Maxwell dans le vide

I. 2. 1 Contenu physique de l'équation du flux magnétique

I. 2. 2 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Faraday

I. 2. 3 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Gauss

I. 2. 4 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Ampère

CHAPITRE II : CHAMP ELECTROMAGNETIQUES DANS LES MILIEUX DIELECTRIQUES

II. 1 Charges libres et charges liées

II. 1. 1 Molécules polaires et molécules non polaires

II. 1. 2 Polarisation d'un diélectrique

II. 2 Equations de Maxwell

II. 2 .1 Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique)

II. 2. 2 Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday)

II. 2. 3 Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss)

II. 2. 4 Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère)

II. 3 Conditions aux limites entre deux milieux diélectriques

II. 3. 1 Composante tangentielle du champ électrique

II. 3. 2 Composante normale de l'induction électrique

CHAPITRE III : CHAMP ELECTROMAGNETIQUES DANS LES MILIEUX MAGNETIQUES

III. 1 Matière aimantée

III. 2 Equations de Maxwell pour le champ magnétique

III. 3 Conditions aux limites entre deux milieux magnétiques

III. 3. 1 Composante tangentielle du champ magnétique

III. 3. 2 Composante normale de l'induction magnétique

III. 4 Equations de Maxwell-Gauss dans un milieu conducteur

III. 5 Equations de Maxwell dans le cas général

CHAPITRE IV : PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LES MILIEUX MATERIELS

IV. 1 Equations de propagation du champ électromagnétique

IV. 1. 1 Propagation dans les milieux diélectriques

IV. 1. 2 Propagation dans les milieux conducteurs

IV. 1. 2. 1 Effet de peau ou effet Kelvin

IV. 1. 2. 2 Vitesse de l'onde électromagnétique dans le conducteur

IV. 1. 2. 3 Champ magnétique dans le conducteur

IV. 1. 2. 4 Longueur d'onde dans le conducteur

IV. 1. 3 Propagation dans les milieux magnétiques

CHAPITRE V : REFLEXION D'ONDES SUR UN PLAN CONDUCTEUR PARFAIT ONDES STATIONNAIRES

V. 1 Onde incidente

V. 2 Interférence de l'onde réfléchie et de l'onde incidente

V. 3 Aspect énergétique de l'onde stationnaire

V. 3. 1 Densité de l'énergie

V. 3. 2 Vecteur de Poynting

RECAPITULATION

CHAPITRE I :

RAPPEL SUR LES EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

I. 1 Le champ électromagnétique

Soit dans un repère galiléen une densité de charge $\rho(\mathbf{r},t)$ en mouvement qui lui est associée une densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$. L'électromagnétisme se propose d'étudier les interactions des particules chargées. Il faut admettre que l'action de la distribution des charges en un point de position \mathbf{r} et à une date t peut toujours être caractérisé par un champ $\mathbf{C}(\mathbf{r},t) = (\mathbf{E},\mathbf{B})$ appelé champ électromagnétique : c'est un ensemble de deux champs vectoriels $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$

Le champ électromagnétique est accessible par ces effets : Une charge électrique q animée d'une vitesse \mathbf{v} placée dans un champ électromagnétique (\mathbf{E},\mathbf{B}) est soumise à une force \mathbf{F} dite force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

I. 2 Les équations de Maxwell dans le vide

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Faraday) :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

REMARQUE :

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

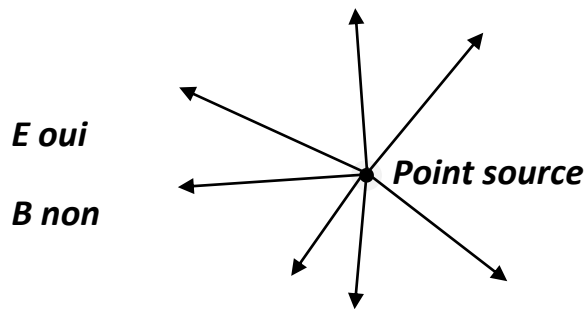
d'où l'équation de la conservation de la charge électrique :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

I. 2. 1 Contenu physique de l'équation du flux magnétique

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Cette équation exprime que le champ magnétique B est à flux conservatif. Les lignes de B ne peuvent pas diverger comme le font les lignes du champ électrique E à partir d'un point source.



La 1^{ère} et la 3^{ème} équations de Maxwell ont des structures mathématiques identiques mais la 1^{ère} ne contient pas de terme source.

I. 2. 2 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Faraday

En électrostatique le champ électrique $E(\mathbf{r})$ dérive d'un potentiel scalaire $V(\mathbf{r})$:

$$E = -\nabla V$$

d'où en régime permanent :

$$\nabla \wedge E = 0$$

En régime général :

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Leftrightarrow \oint E \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

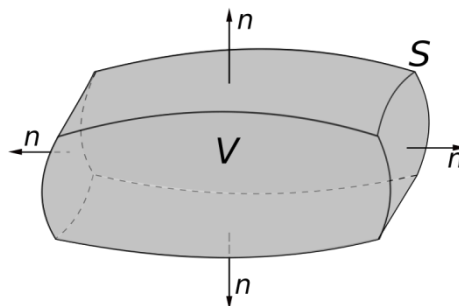
Cette relation exprime que tout champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservatif. L'équation de Maxwell – Faraday rend compte du phénomène d'induction électromagnétique.

En régime permanent : $\partial B / \partial t = 0 \Leftrightarrow \nabla \wedge E = 0$

I. 2. 3 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Gauss

Rappel du théorème de Gauss

Soit une surface fermée (S) délimitant un volume V contenant une charge Q :



$$Q = \iiint_V \rho dV$$

Le flux électrostatique Φ sortant de S s'exprime :

$$\phi = \oiint_S E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski on obtient :

$$\oiint_S E \cdot dS = \iiint_V (\nabla \cdot E) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

d'où : $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_S E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Cette équation est plus générale que le théorème de Gauss, car elle prend en compte toutes les charges (charge libres et charges liées) contenues le volume V délimité par la surface fermée (S).

I. 2. 4 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Ampère

Soit un contour (C) sur lequel s'appuie une surface S . le théorème d'Ampère de la magnétostatique exprime que :

$$\oint_C B \cdot dl = \mu_0 I$$

Où I est le courant enlacé par le contour (C) . I est le flux de la densité de courant j qui traverse la surface S .

Utilisons la formule de Stokes :

$$\oint_C B \cdot dl = \iint_S (\nabla \wedge B) \cdot dS = \mu_0 \iint_S j \cdot dS$$

d'où :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 j \Leftrightarrow \oint_C B \cdot dl = \mu_0 I$$

Cette formule est valable uniquement en régime permanent (magnétostatique) c'est le théorème d'Ampère de la magnétostatique. Le champ magnétique tourbillonne autour des courants qui l'engendrent.

En régime non permanent, calculons la circulation de B à la date t le long du contour (C) .

$$\oint_C B \cdot dl = \iint_S (\nabla \wedge B) \cdot dS = \mu_0 \left[\iint_S J \cdot dS + \iint_S \left(\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \cdot dS \right]$$

I étant l'intensité du courant qui traverse S à l'instant t :

$$I = \iint_S j \cdot dS$$

On pose :

$$j_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

d'où la formule générale du théorème d'Ampère :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_D)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I + \iint_S \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S} \right)$$

Le flux du terme \mathbf{j}_D intervient de la même manière que le flux de \mathbf{j} d'où l'usage est de conserver à \mathbf{j}_D le nom que lui a donné Maxwell : densité du courant de déplacement.

Un champ électrique dépendant du temps est, au même titre qu'un courant, une source de champ magnétique.

$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ donne naissance à un champ électrique \mathbf{E} rotationnel

$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ donne naissance à un champ magnétique \mathbf{B} rotationnel.

Conclusion :

- En statique le champ électrique \mathbf{E} peut exister en absence du champ magnétique \mathbf{B} . Exemple : un condensateur portant une charge Q .
- En magnétostatique le champ magnétique \mathbf{B} peut exister en absence de champ électrique \mathbf{E} . Exemple : un conducteur parcouru par un courant continu I .
- Quand les champs varient avec le temps, le champ magnétique \mathbf{B} ne peut pas exister sans un champ électrique \mathbf{E} , de même que \mathbf{E} ne peut pas exister sans un champ \mathbf{B} correspondant. Les termes $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ et $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ réalisent le couplage entre les deux champs. Ce couplage est à l'origine de la possibilité d'une propagation du champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) (ondes électromagnétiques).

CHAPITRE II

CHAMP ELECTROMAGNETIQUES DANS LES MILIEUX DIELECTRIQUES

II. 1 Charges libres et charges liées

On entend par **charges libres**, les charges capables de se déplacer sur des distances supérieures aux distances atomiques : exemples les électrons de la dernière couche des métaux, les ions issues de la dissociation de sels dans un liquides.

On entend par **charges liées**, les charges qui ne peuvent se déplacer qu'à l'échelle de la molécule : exemple les dipôles électriques.

II. 1. 1 Molécules polaires et molécules non polaires

Si les molécules constituant un matériau possèdent un centre de symétrie, les barycentres des charges positives et négatives sont confondues en l'absence de champ extérieur. Ces molécules sont dites **non polaires**. On peut citer quelques exemples :

- des gaz : He, Ar, H₂, N₂
- des composés chimiques : CH₄, CCl₄

➤ une macromolécule : [-CH₂-CH₂-]

Par contre, d'autres molécules, dépourvues de centre de symétrie, présentent un moment électrique permanent ; elles sont dites polaires. On peut indiquer :

➤ des composés chimiques : HF, HCl, HBr, HI, CClH₃

➤ une macromolécule : [-CHCl-CHCl-] (polychlorure de vinyle)

Chaque molécule peut être assimilée à un dipôle électrique actif en ce qui concerne leur action à des distances supérieures à ces dimensions.

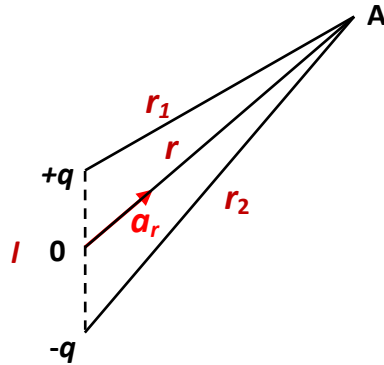


Figure II. 1 : Potentiel d'un dipôle

Pour $r \gg l$

$$V_A = \frac{p a_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$p = ql$ est le moment électrique ou le moment dipolaire de la molécule

II. 1. 2 Polarisation d'un diélectrique

Dans un milieu à structure moléculaire, chaque molécule est une distribution dont la charge totale est nulle mais elle peut être assimilée à un dipôle électrique actif. Si le milieu contient N molécules ayant chacune un moment électrique dp , on peut caractériser ce milieu par un champ vectoriel $P(r,t)$ définissant le moment électrique par unité de volume.

$$P(r,t) = \frac{dp}{d\tau}$$

$P(r,t)$ est appelée la polarisation du milieu

La charge liée d'un milieu peut être assimilée à une distribution de moments électriques. Il existe plusieurs types de polarisation (voir cours de matériaux diélectriques).

Dans un milieu linéaire et isotrope la polarisation s'exprime en fonction du champ électrique extérieur appliqué au milieu par la relation :

$$P = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot E$$

χ_e est la susceptibilité électrique

P caractérise les charges liées du milieu :

$$-\nabla \cdot P = \rho_{liées}$$

II. 2 Equations de Maxwell

II. 2.1 Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

On a montré au chapitre I que cette équation est équivalente à :

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Elle exprime que le champ magnétique \mathbf{B} est à flux conservatif. Les lignes de \mathbf{B} ne peuvent pas diverger comme le font les lignes du champ électrique \mathbf{E} à partir d'un point source.

II. 2.2 Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday)

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

On a montré également au chapitre I que cette équation est équivalente à :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Elle exprime que tout champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservatif. L'équation de Maxwell – Faraday rend compte du phénomène d'induction électromagnétique.

En régime permanent : $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0 \Leftrightarrow \nabla \wedge \mathbf{E} = 0$

II. 2.3 Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ est la densité de la charge totale dans le diélectrique :

$$\rho = \rho_{\text{libres}} + \rho_{\text{liées}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (\rho_{\text{libres}} + \rho_{\text{liées}}) = \frac{\rho_{\text{libres}}}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} = \nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{libres}}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{libre}}$$

On pose :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

et on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}}$$

\mathbf{D} est un champ vectoriel auxiliaire, on l'appelle l'excitation électrique ou l'induction électrique.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{totale}}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}}$$

Si le diélectrique est isotrope, sans charges électriques libres on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \cdot (1 + \chi_e) \cdot \mathbf{E}$$

On pose :

$$1 + \chi_e = \varepsilon_r \text{ et } \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

ε_r est la permittivité relative du milieu

ε est la permittivité absolue du milieu

χ_e est la susceptibilité électrique du milieu (voir cours de matériaux diélectrique)

La relation entre les grandeurs électriques \mathbf{D} et \mathbf{E} est :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mathbf{E} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}$$

II. 2. 4 Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère)

Pour un milieu diélectrique de permittivité ε , non magnétique $\mu = \mu_0$, l'équation de Maxwell – Ampère s'écrit :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Si le diélectrique est isotrope et de conductivité nulle, on obtient :

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

II. 3 Conditions aux limites entre deux milieux diélectriques

Soient deux milieux diélectriques séparés par une surface \mathbf{S} et caractérisés par des permittivités relatives ε_{r1} et ε_{r2} . On suppose que dans le milieu **(1)** règne un champ électrique \mathbf{E}_1 et dans le milieu **(2)** règne un champ électrique \mathbf{E}_2 .

II. 3. 1 Composante tangentielle du champ électrique

Calculons la circulation du champ électrique \mathbf{E} le long d'un rectangle **ABCD** au voisinage de l'interface \mathbf{S} entre les deux milieux comme l'indique la figure II. 1.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Si le rectangle **ABCD** est aplati ($\mathbf{AD} = \mathbf{BC} = \mathbf{0}$), la surface qui s'appuie sur le contour est nulle ainsi que le flux magnétique. En outre, les composantes normales du champ électrique forment un angle de $\pi/2$ avec \mathbf{AB} et \mathbf{CD} , leur circulation est donc nulle. La circulation du champ électrique se réduit ainsi à :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = E_{t1} \cdot AB \cdot \cos 0 + E_{t2} \cdot CD \cdot \cos \pi = 0$$

d'où la relation importante :

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}$$

Il y a continuité de la composante tangentielle du champ électrique à la surface de séparation S de deux milieux diélectriques.

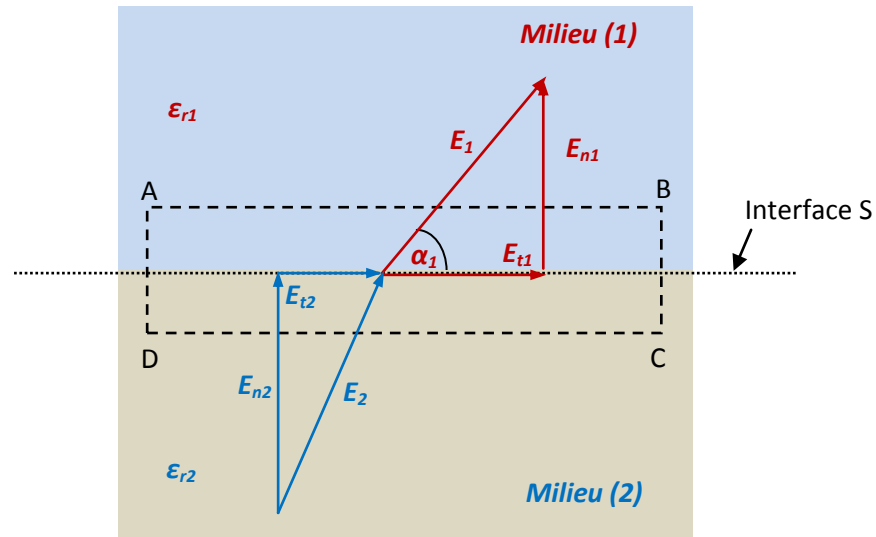


Figure II. 2 : Conditions aux limites de deux milieux diélectriques

L'induction électrique est reliée au champ électrique par $D = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E$. On obtient la relation :

$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

II. 3. 2 Composante normale de l'induction électrique

Disposons à l'interface S des deux milieux diélectriques un petit cylindre fermé (figure II. 2). Sur la surface ΔS délimitée par le cylindre et l'interface S des deux milieux, plaçons une charge libre de densité σ . Appliquons le théorème de Gauss :

$$\oiint_S D \cdot dS = \oiint_S \sigma \cdot dS$$

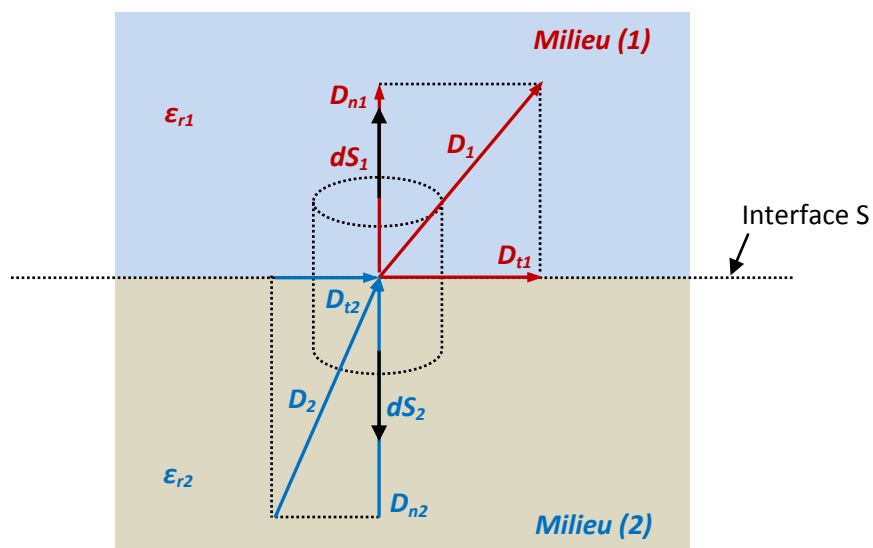


Figure II. 3 : Conditions aux limites de deux milieux diélectriques

Si le cylindre est aplati, la surface latérale du cylindre est nulle. En outre, les composantes tangentielles de l'induction électrique forment un angle de $\pi/2$ avec les surfaces de base du cylindre, leur flux est donc nulle. Le théorème de Gauss se réduit à :

$$\oiint_S D \cdot dS = \iint D_1 \cdot dS + \iint D_2 \cdot dS = D_{n1} \cdot \Delta S \cdot \cos 0 + D_{n2} \cdot \Delta S \cdot \cos \pi = \sigma \cdot \Delta S$$

d'où la relation :

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma \cdot n$$

Si l'interface est dépourvue de charges électriques ($\sigma = 0$), on obtient la relation importante :

$$D_{n1} = D_{n2}$$

Il y a continuité de la composante normale de l'induction électrique à la surface de séparation S de deux milieux diélectriques dépourvue de charges électrique.

Les composantes normales du champ électriques vérifient ainsi la relation :

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot E_{n1} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot E_{n2}$$

d'où :

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

Les angles d'incidence α_1 et α_2 des champs électriques (où des inductions électriques) par rapport à la surface de séparation S des deux milieux sont tels que :

$$\tan \alpha_1 = \frac{E_{n1}}{E_{t1}} \quad \text{et} \quad \tan \alpha_2 = \frac{E_{n2}}{E_{t2}}$$

De la relation $E_{t1} = E_{t2}$, on obtient la relation importante :

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

CHAPITRE III

CHAMP ELECTROMAGNETIQUES DANS LES MILIEUX MAGNETIQUES

III. 1 Matière aimantée

C'est un fait d'expérience que la matière dans certains cas peut être une source de champ magnétique (voir cours de matériaux). Par analogie aux diélectriques, l'aimantation J d'un milieu aimanté est définie comme étant une distribution de moments magnétiques par unité de volume.

$$J = \mu_0 \frac{dm}{dv}$$

On défini aussi de la même façon que les densités de charges liées une densité de courant liée :

$$j_{liéé} = \nabla \wedge \frac{J}{\mu_0}$$

III. 2 Equations de Maxwell pour le champ magnétique

En régime permanent où $\partial/\partial t = 0$ on peut écrire :

$$\nabla \cdot B = 0$$

Le flux magnétique est à flux conservatif.

L'équation de Maxwell – Ampère devient :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 \cdot j = \mu_0 \cdot (j_{libre} + j_{liéé}) = \mu_0 \cdot j_{libre} + \nabla \wedge J$$

$$\nabla \wedge \frac{B}{\mu_0} - \nabla \wedge \frac{J}{\mu_0} = j_{libre}$$

$$\nabla \wedge \left(\frac{B - J}{\mu_0} \right) = j_{libre}$$

On pose :

$$H = \frac{B - J}{\mu_0}$$

et on obtient :

$$\nabla \wedge H = j_{libre}$$

$$\nabla \wedge B = \mu_0 \cdot j \Leftrightarrow \nabla \wedge H = j_{libre}$$

J_{libre} est le courant de conduction dans le matériau. Cette équation est équivalente au théorème d'Ampère, on démontre facilement (voir cours de théorie du champ électromagnétique) que :

$$\oint H \cdot dl = I_{total}$$

H est un champ auxiliaire, on l'appelle l'excitation magnétique.

$$H = \frac{B - J}{\mu_0} \Leftrightarrow B = \mu_0 \cdot H + J$$

$$B = \mu_0 \cdot H + J = \mu_0 \cdot H + \mu_0 \cdot \chi_m \cdot H = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot H$$

On pose :

$$1 + \chi_m = \mu_r$$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

μ_r est la perméabilité relative du milieu ; μ est la perméabilité absolue du milieu

χ_m est la susceptibilité magnétique du milieu (voir cours de matériaux magnétique)

La relation entre les grandeurs magnétiques B et H est :

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \mu \cdot H$$

III. 3 Conditions aux limites entre deux milieux magnétiques

Soient deux milieux magnétiques séparés par une surface **S** et caractérisés par des perméabilités relatives μ_{r1} et μ_{r2} . On suppose que dans le milieu (1) règne un champ magnétique H_1 et dans le milieu (2) règne un champ magnétique H_2 .

III. 3. 1 Composante tangentielle du champ magnétique

Calculons la circulation du champ magnétique H le long d'un rectangle **ABCD** au voisinage de l'interface **S** entre les deux milieux comme l'indique la figure III. 1.

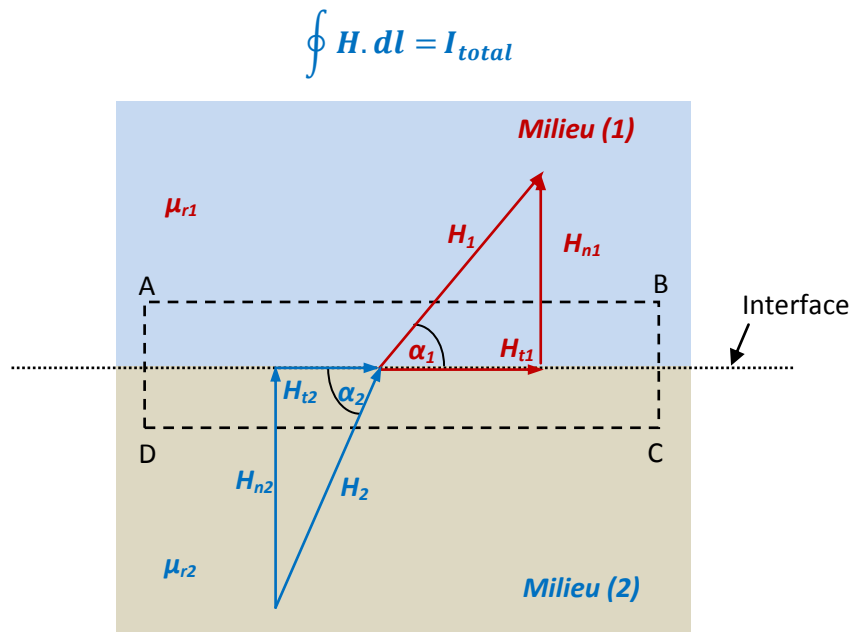


Figure III. 1 : Conditions aux limites de deux milieux magnétiques.

Si le rectangle **ABCD** est aplati ($AD = BC = 0$) et que l'interface des deux milieux est dépourvue de nappe de courants ($I_{total} = 0$) alors la circulation totale devient nulle. En outre, les composantes normales du champ magnétique forment un angle de $\pi/2$ avec **AB** et **CD**, leur circulation est nulle :

$$\oint H \cdot dl = \int_A^B H_1 \cdot dl + \int_C^D H_2 \cdot dl = H_{t1} \cdot AB \cdot \cos 0 + H_{t2} \cdot CD \cdot \cos \pi = 0$$

d'où la relation importante :

$$H_{t1} = H_{t2}$$

Il y a continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à la surface de séparation S de deux milieux magnétiques dépourvue de nappe de courants.

L'induction magnétique est reliée au champ magnétique par $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$, On peut obtenir la relation :

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

Dans le cas où l'interface entre les deux milieux est pourvue d'une nappe de courant de distribution I (A/m), on obtient :

$$\oint H \cdot dl = \int_A^B k dl = \int_A^B H_1 \cdot dl + \int_C^D H_2 \cdot dl = H_{t1} \cdot AB \cdot \cos 0 + H_{t2} \cdot CD \cdot \cos \pi = I \cdot AB$$

d'où la relation :

$$H_{t1} - H_{t2} = I \wedge n$$

n est le vecteur unitaire normal à l'interface S

Il y a discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique à la surface de séparation S de deux milieux magnétiques pourvue d'une nappe de courants.

III. 3. 2 Composante normale de l'induction magnétique

Disposons à l'interface des deux milieux magnétiques un petit cylindre fermé de section ΔS , (figure III. 2). Appliquons le principe de la conservation du flux magnétique :

$$\nabla \cdot B = 0 \Leftrightarrow \oiint_S B \cdot dS = 0$$

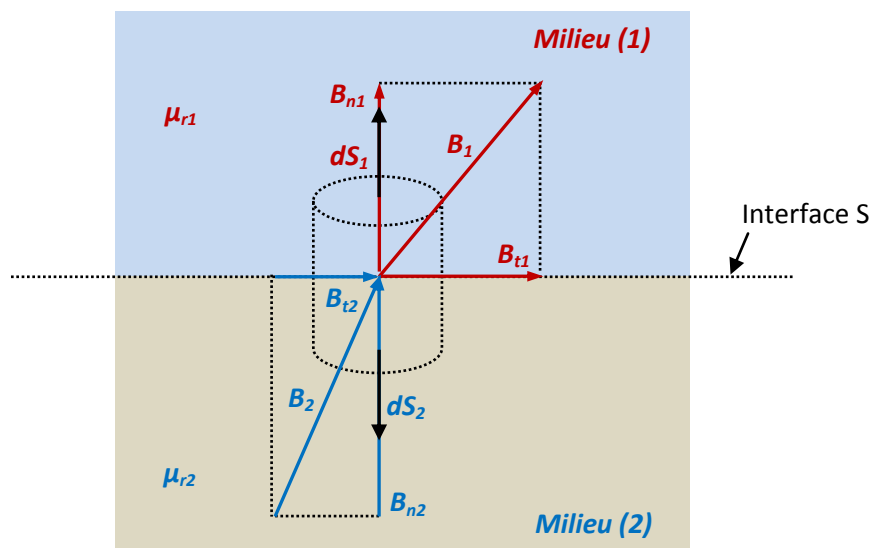


Figure III. 2 : Conditions aux limites de deux milieux magnétiques.

Si le cylindre est aplati, la surface latérale du cylindre est nulle. En outre, les composantes tangentielles de l'induction magnétique forment un angle de $\pi/2$ avec les surfaces de base ΔS , leur flux est donc nulle. On peut écrire :

$$\oiint_S B \cdot dS = \iint B_1 \cdot dS + \iint B_2 \cdot dS = B_{n1} \cdot \Delta S \cdot \cos 0 + B_{n2} \cdot \Delta S \cdot \cos \pi = 0$$

d'où la relation importante :

$$B_{n1} = B_{n2}$$

Il y a continuité de la composante normale de l'induction magnétique à la surface de séparation S de deux milieux magnétiques.

Les composantes normales du champ magnétiques vérifient ainsi la relation :

$$\mu_0 \cdot \mu_{r1} \cdot H_{n1} = \mu_0 \cdot \mu_{r2} \cdot H_{n2}$$

d'où :

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$

Les angles d'incidence α_1 et α_2 des champs magnétiques (où des inductions magnétiques) par rapport à la surface de séparation S des deux milieux sont tels que :

$$\tan \alpha_1 = \frac{H_{n1}}{H_{t1}} \quad \text{et} \quad \tan \alpha_2 = \frac{H_{n2}}{H_{t2}}$$

De la relation $H_{t1} = H_{t2}$, on obtient la relation importante :

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$

III. 4 Equations de Maxwell-Gauss dans un milieu conducteur

Dans un conducteur d'électricité ρ_{libre} est la densité volumique de charges des électrons de conduction et $\rho_{liée}$ la densité volumique de charges des cations du réseau cristallin. Dans un conducteur la densité de charges totale, en régime permanent et dans tout le domaine des fréquences hertziennes, est donnée par :

$$\rho = \rho_{libre} + \rho_{liée} = 0$$

L'équation de Maxwell – Gauss s'écrit dans ce cas :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Dans les métaux dits ferromagnétiques tels que le **fer**, le **cobalt** et le **nickel** la densité de courants liée $\mathbf{j}_{liée}$ est assimilée au comportement de spins des électrons (voir cours de matériaux magnétiques).

Dans les métaux usuels tels que l'**aluminium** et le **cuivre** $\mathbf{j}_{liée} = 0$

III. 5 Equations de Maxwell dans le cas général

Les quatre équations de Maxwell dans le cas général s'écrivent :

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Faraday) :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{libre} + \rho_{liée})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{libres} + \rho_{liées}) = \frac{\rho_{libres}}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot E + \frac{\nabla \cdot P}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \left(E + \frac{P}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{libres}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \cdot E + P) = \rho_{libre}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \cdot E + P) = \nabla \cdot (\epsilon_0 \cdot E + \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot E) = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot E = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot E = \epsilon \cdot \nabla \cdot E = \rho_{libre}$$

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{libre} + \rho_{liée}) \Leftrightarrow \nabla \cdot E = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon}$$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 \left(j_{libre} + j_{liée} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \wedge B = \mu_0 \left(j_{libre} + j_{liée} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \mu_0 \cdot \left(j_{libre} + \nabla \wedge \frac{J}{\mu_0} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \wedge \frac{B}{\mu_0} - \nabla \wedge \frac{J}{\mu_0} = j_{libre} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \left(\frac{B - J}{\mu_0} \right) = j_{libre} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

D'autre part on a :

$$H = \frac{B - J}{\mu_0}$$

et on obtient ainsi :

$$\nabla \wedge H = j_{libre} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

D'autre part on a :

$$B = \mu_0 \cdot H + J = \mu_0 \cdot H + \mu_0 \cdot \chi_m \cdot H = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot H$$

$$1 + \chi_m = \mu_r \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

et on obtient ainsi :

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \mu \cdot H$$

d'où :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 \left(j_{libre} + j_{liée} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \nabla \wedge B = \mu \cdot \left(j_{libre} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

CHAPITRE IV

PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LES MILIEUX MATERIELS

IV. 1 Equations de propagation du champ électromagnétique

On considère un milieu quelconque de permittivité ϵ et de perméabilité μ . A partir des équations de Maxwell on cherche deux équations découplées ne contenant respectivement que le champ électrique \mathbf{E} et que le champ magnétique \mathbf{B} .

Dans tout ce qui suit on désignera ρ_{libre} par ρ (la densité de charges libres) et j_{libre} par j la densité de courant de conduction dans le matériau. On peut obtenir des équations de Maxwell générales (voir la partie V du chapitre III) :

$$\begin{aligned}\nabla\Lambda(\nabla\Lambda E) &= \nabla(\nabla \cdot E) - \Delta E = \nabla\Lambda\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda B) \\ \nabla\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) - \Delta E &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu j + \mu\epsilon\frac{\partial E}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\Delta E - \mu\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon}\nabla\rho + \mu\frac{\partial j}{\partial t}$$

Si l'on prend le $\nabla\Lambda(\nabla\Lambda B)$ on obtiendra :

$$\Delta B - \mu\epsilon\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \mu(\nabla\Lambda j)$$

IV. 1. 1 Propagation dans les milieux diélectriques

On considère un milieu diélectrique de permittivité ϵ , de conductivité nulle, sans charges électriques et non magnétique de perméabilité μ_0 . Les équations de propagation du champ électrique \mathbf{E} et du champ magnétique \mathbf{B} s'écrivent :

$$\Delta E - \mu_0\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta B - \mu_0\epsilon\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation est identique à l'équation de D'Alembert où la vitesse de propagation de l'onde est :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Les solutions sont de la forme :

$$E(x, t) = E_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + E_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

$$E(y, t) = E_1\left(t - \frac{y}{v}\right) + E_2\left(t + \frac{y}{v}\right)$$

$$E(z, t) = E_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + E_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

$$B(x, t) = B_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + B_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

$$B(y, t) = B_1\left(t - \frac{y}{v}\right) + B_2\left(t + \frac{y}{v}\right)$$

$$B(z, t) = B_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + B_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

\mathbf{E} et \mathbf{B} sont représentés par la superposition de deux ondes progressive de vitesse opposées. \mathbf{E}_1 et \mathbf{B}_1 se propagent dans le sens positif et \mathbf{E}_2 et \mathbf{B}_2 se propagent dans le sens négatif.

Application au câble coaxial

On considère un câble coaxial idéal (sans pertes) de longueur l uniforme, figure IV. 1. La permittivité de l'isolant est ϵ et sa perméabilité est μ_0 . La capacité C_l et l'inductance L_l du câble sont données respectivement par (voir TD de théorie du champ électromagnétique) :

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}} l \quad (F) \quad ; \quad L_l = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) l \quad (H)$$

La capacité linéique C (capacité pour $l = 1$ m du câble) et l'inductance linéique L (inductance pour $l = 1$ m du câble) sont respectivement :

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (F/m) \quad ; \quad L = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (H/m)$$

Si l'on considère une portion de câble de longueur dx modélisée par une ligne à constantes réparties et supposée sans pertes (résistance des conducteurs $r \approx 0$ et résistance du diélectrique ($R \approx \infty$)).

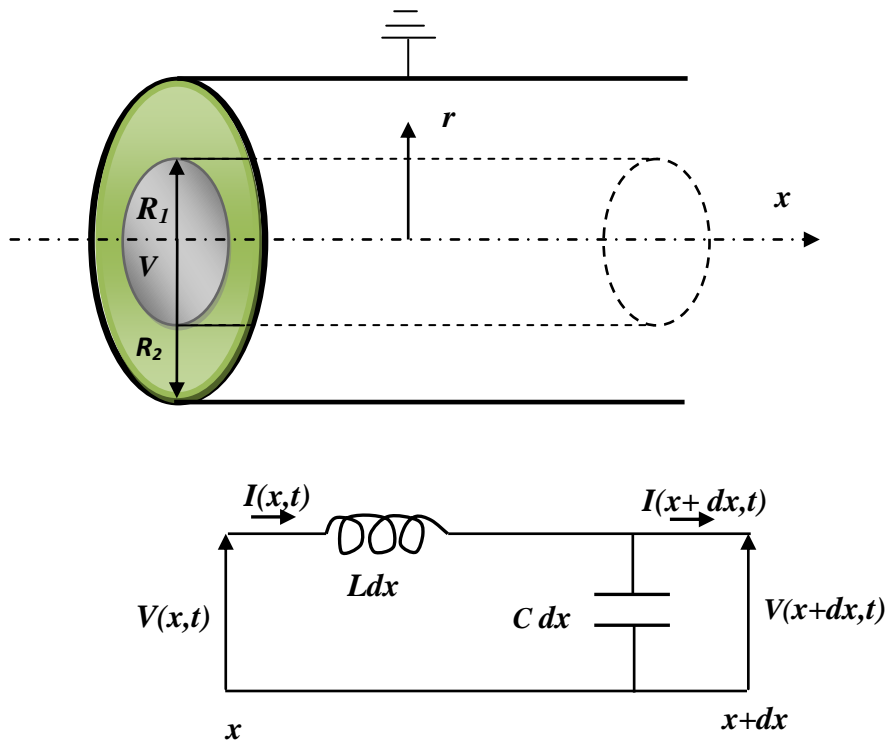


Figure IV. 1 : Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un câble coaxial.

La loi des mailles :

$$V(x, t) = V(x + dx, t) + Ldx \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{V(x, t) - V(x + dx, t)}{dx} = L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

La loi des nœuds :

$$I(x, t) = I(x + dx, t) + C dx \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{I(x, t) - I(x + dx, t)}{dx} = C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \quad (2)$$

En dérivant l'équation (1) par rapport à x et l'équation (2) par rapport à t on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} &= -L \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x \partial t} &= -C \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

En dérivant l'équation (1) par rapport à t et l'équation (2) par rapport à x on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x \partial t} &= -L \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} &= -C \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x \partial t} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) sont identiques à l'équation de D'Alembert (voir le cours d'électromagnétisme) en posant :

$$\frac{1}{v^2} = LC \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Où v est dans ce cas la vitesse de l'onde électromagnétique. En remplaçant les expressions de L et C trouvées précédemment on obtient :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

D'où la relation importante :

$$\frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r}$$

Avec : $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

Remarque importante : La mesure de la vitesse v de propagation de l'onde permet de déduire la permittivité relative ϵ_r du diélectrique.

Les équations (3) et (4) peuvent admettre comme solution :

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_0 e^{j\omega(t - \frac{x}{v})} \quad \text{et} \quad I(x, t) = I_0 e^{j\omega(t - \frac{x}{v})} \\ \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} &= -j \frac{\omega}{v} V(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = j\omega I(x, t) \\ \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} &= -L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

D'où :

$$-j \frac{\omega}{v} V(x, t) = -Lj\omega I(x, t)$$
$$Z = \frac{V(x, t)}{I(x, t)} = Lv = L \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Z est l'impédance caractéristique du câble. En remplaçant les expressions de **L** et **C** on obtient :

$$Z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\Omega)$$

On remarque que **Z** ne dépend pas de la longueur du câble

Coefficient de réflexion entre l'onde incidente et l'onde réfléchie

Si V_0 désigne l'onde incidente et V_1 désigne l'onde réfléchie on peut écrire :

$$V_0(x, t) = ZI_0(x, t) \quad \text{et} \quad V_1(x, t) = ZI_1(x, t)$$

En un point M quelconque du câble de coordonnée **x** on peut écrire :

$$I(x, t) = I_0(x, t) - I_1(x, t)$$

En bout du câble de longueur **l** :

$$V_0(l, t) = ZI_0(l, t) \quad \text{et} \quad V_1(l, t) = ZI_1(l, t)$$

$$I(l, t) = I_0(l, t) - I_1(l, t)$$

$$V(l, t) = R_u I(l, t) = V_0(l, t) + V_1(l, t)$$

$$\Rightarrow R_u (I_0(l, t) - I_1(l, t)) = ZI_0(l, t) + ZI_1(l, t)$$

$$(R_u - Z)I_0(l, t) = (R_u + Z)I_1(l, t)$$

D'où le coefficient de réflexion : $\alpha = I_1(l, t)/I_0(l, t)$

$$\alpha = \frac{R_u - Z}{R_u + Z}$$

- Si le câble est en court – circuit à son bout, $R_u = 0$, $\alpha = -1$ l'onde est réfléchie avec inversion d'amplitude.
- Si le câble est en circuit ouvert, $R_u = \infty$, $\alpha = 1$ l'onde est réfléchie sans inversion d'amplitude.
- Si la charge est adaptée, $R_u = Z$ l'onde est complètement absorbée par la charge.

Remarque importante : L'adaptation de la charge permet de mesurer l'impédance caractéristique **Z** du câble.

IV. 1. 2 Propagation dans les milieux conducteurs

Les équations de propagation du champ électromagnétique (voir cours de théorie du champ électromagnétique) dans un milieu de perméabilité μ et de permittivité ϵ quelconques sont :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu (\nabla \wedge \mathbf{j})$$

Dans les milieux conducteurs et dans tout le domaine des fréquences radio (le domaine des hyperfréquences est exclu), la loi d'Ohm est supposée vérifiée. Ceci entraîne que la densité de charges ρ est nulle à l'intérieur de ces conducteurs. Ces deux équations s'écrivent dans ce cas comme suit :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu (\nabla \wedge \mathbf{j})$$

De la loi d'Ohm locale, $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ et de l'équation de Maxwell – Faraday $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ on obtient :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

IV. 1. 2. 1 Effet de peau ou effet Kelvin

On considère un métal de conductivité σ , non magnétique de perméabilité μ_0 , de permittivité ϵ_0 et occupant le demi-plan $\mathbf{x} \geq 0$ (en coordonnées cartésiennes). Soit une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale dans le vide et considérons uniquement la propagation unidimensionnelle dans le sens positif vers le conducteur, par exemple selon l'axe \mathbf{ox} comme l'indique la figure IV. 2. A la surface du conducteur une partie de cette onde est réfléchie et une autre partie est transmise au métal suivant la même direction. Le champ électrique \mathbf{E} de l'onde transmise, en notation complexe, s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot \mathbf{a}_y$$

Où ω est la pulsation et \mathbf{k} le vecteur d'onde dans le conducteur.

On retrouve facilement le champ magnétique \mathbf{B} par l'équation de Maxwell – Faraday :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = B_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot \mathbf{a}_z$$

Avec :

$$B_0 = \frac{k}{\omega} \cdot E_0$$

Etudions l'évolution du champ électrique transmis lorsqu'il pénètre dans le conducteur ($\mathbf{x} \geq 0$)

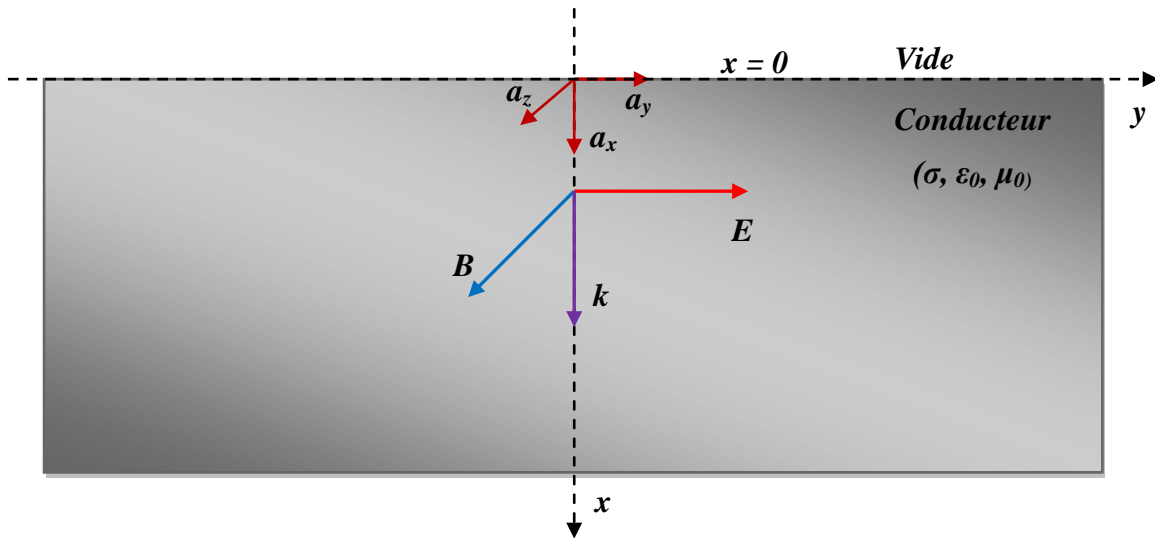


Figure IV. 2 : Propagation de l'onde électromagnétique dans le conducteur.

L'équation de propagation unidimensionnelle du champ électrique s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\frac{d^2 E}{dx^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 E}{dt^2} - \mu_0 \sigma \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = -k^2 \cdot E \quad ; \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = -\omega^2 \cdot E \quad ; \quad \frac{dE}{dt} = i\omega \cdot E \quad ; \quad \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0\sigma = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \right)$$

$k = f(\omega)$ est la relation de dispersion dans le métal.

A des hautes fréquences (domaine des hyperfréquences exclu) l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \gg 1$$

Cette approximation revient à dire que la densité de courant de déplacement est négligeable devant la densité de courant de conduction. On peut ainsi écrire :

$$k^2 = -i\omega\mu_0\sigma = -2i \frac{\omega\mu_0\sigma}{2}$$

$$(1 - i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i$$

d'où

$$k = \sqrt{-2i \frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} = \pm(1 - i) \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$$

En posant :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$$

on obtient :

$$k = \frac{1-i}{\delta}$$

L'expression du champ électrique devient ainsi :

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \frac{1-i}{\delta}x)} \cdot a_y = E_0 e^{(i\omega t - i\frac{x}{\delta} - \frac{x}{\delta})} \cdot a_y$$

$$E = E_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot a_y$$

Le facteur réel $e^{-\frac{x}{\delta}}$ traduit l'atténuation de l'onde dans le conducteur.

Le facteur $e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})}$ traduit la propagation de l'onde dans le conducteur.

δ représente la profondeur de pénétration du champ électrique dans le conducteur. On appelle δ **l'épaisseur de peau**.

De la loi d'Ohm $j = \sigma \cdot E$ on peut obtenir la densité de courant :

$$j = j_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot a_y = J(x) \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot a_y$$

avec :

$$j_0 = \sigma E_0 \quad \text{et} \quad J(x) = j_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}}$$

Les amplitudes des grandeurs j et E sont maximales à la surface du conducteur ($x = 0$) et diminuent de façon exponentielle en pénétrant dans le conducteur.

$$\text{pour } x = 0 \rightarrow J(0) = j_0$$

$$\text{pour } x = \delta \rightarrow J(\delta) = \frac{j_0}{e} \Rightarrow \frac{J(\delta)}{j_0} \approx 37\%$$

Pour une profondeur de quelques δ la densité de courant s'annule dans le conducteur.

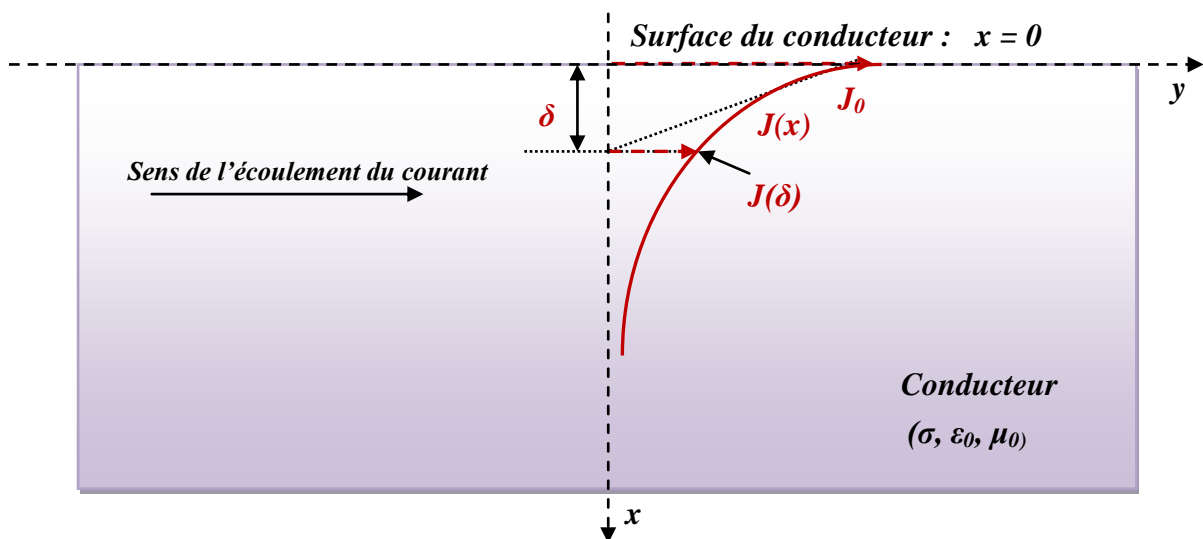


Figure IV. 3 : Variation de l'amplitude de la densité de courant dans le conducteur (valablement aussi pour le champ)

Application au calcul de la résistance d'un conducteur cylindrique

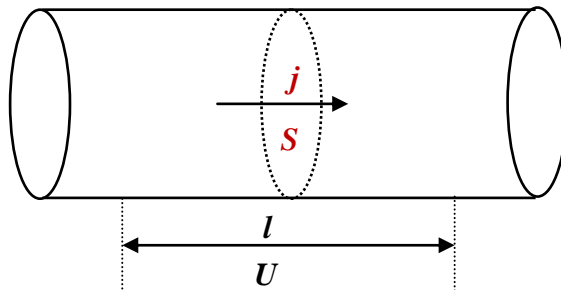


Figure IV. 4 : Conducteur cylindrique

En courant continu la densité de courant j est uniforme et le courant I est donné par :

$$I = j \cdot S = \sigma \cdot E \cdot S = \frac{\sigma S}{l} U$$

Donc la résistance du conducteur est :

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot S}$$

En courant alternatif la densité de courant j n'est plus uniforme et on distingue deux cas :

1. Si le rayon du conducteur est très grand devant l'épaisseur de peau $a \gg \delta$, l'onde pénètre sur une très petite distance et la densité de courant j n'est plus uniforme. La section utile à prendre est uniquement la couronne extérieure $S_u = 2\pi a \delta$ et la résistance est :

$$R_u = \frac{l}{\sigma \cdot 2\pi a \delta}$$

2. Si le rayon du conducteur est petit devant l'épaisseur de peau $a < \delta$, la section à prendre est celle du conducteur $S = \pi a^2$ et la résistance est :

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot \pi a^2}$$

$$R_u = R \frac{a}{2\delta}$$

La résistance est donc proportionnelle à $\sqrt{\omega}$

Pour un conducteur en cuivre de rayon $a = 1$ mm on obtient :

Exemple du cuivre : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ F/m}$; $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$

- $\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s} \rightarrow \delta = 9,3 \text{ mm}$; $R_u = R$
- $\omega = 2\pi f = 10^8 \text{ rad/s} \rightarrow \delta = 0,0163 \text{ mm}$; $R_u = 30,5 R$

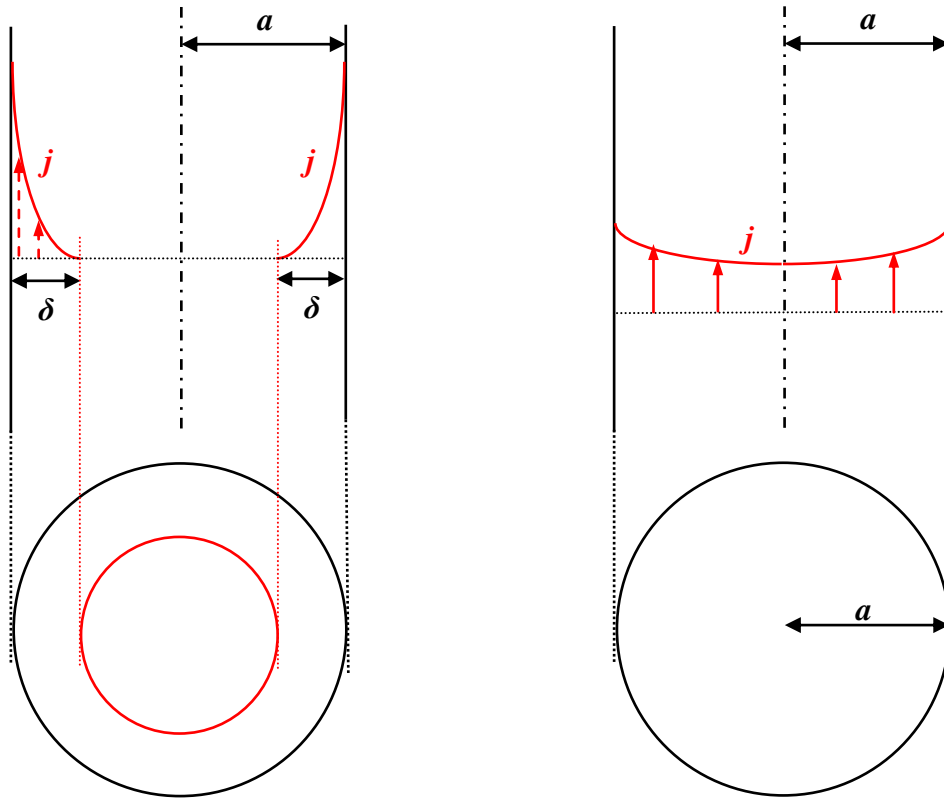


Figure IV. 5 : Section utile dans un conducteur cylindrique

IV. 1. 2 .2 Vitesse de l'onde électromagnétique dans le conducteur

La phase de l'onde est :

$$\varphi(x, t) = \omega t - \frac{x}{\delta}$$

La vitesse de phase (ou vitesse de propagation de la phase) est la vitesse de déplacement d'un plan d'onde dans la direction de propagation. Entre les instants t et $t + dt$ pour un même plan d'onde, on a :

$$\varphi(x, t) = \varphi(x + dx, t + dt) \Rightarrow \omega t - \frac{x}{\delta} = \omega t + \omega dt - \frac{x + dx}{\delta}$$

$$\Rightarrow \omega dt - \frac{dx}{\delta} = 0$$

La vitesse de phase est dz/dt , d'où :

$$v_{\varphi} = \delta \cdot \omega$$

Dans le vide $k = \omega/c$ d'où :

$$v_{\varphi} = c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Le rapport α des vitesses de phase de l'onde dans le métal et dans le vide est :

$$\alpha = \frac{\delta \omega}{c} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \cdot \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \sqrt{\frac{2 \epsilon_0 \omega}{\sigma}}$$

IV. 1 .2 .3 Champ magnétique dans le conducteur

Le champ magnétique donné au paragraphe I. 2. 1 peut se mettre sous la forme :

$$B = \frac{k}{\omega} \cdot E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot a_z = \frac{1-i}{\delta \omega} \cdot E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot a_z$$

$$B = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{(i\omega t - i\frac{1-i}{\delta}x)} (1-i) = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{(i\omega t - i\frac{x}{\delta} + \frac{x}{\delta})} \cdot \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot a_z$$

$$B = \sqrt{2} \frac{E_0}{\delta \omega} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot a_z$$

$$B = \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2 \omega}} \cdot E_0 \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot a_z$$

avec :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad \text{et} \quad \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

On remarque que le champ magnétique \mathbf{B} est en retard de phase sur le champ électrique \mathbf{E} de $\pi/4$ dans le conducteur et le rapport des amplitudes de ces deux champs est :

$$\frac{\|B\|}{\|E\|} = \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2 \omega}} = \sqrt{\frac{2}{2\epsilon_0 c^2 \omega} \frac{\omega}{\sigma}} = \frac{\sqrt{2}}{c \cdot \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega}{\sigma}}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha c}$$

Dans le vide \mathbf{B} et \mathbf{E} sont en phase et le rapport de leur amplitude est :

$$\frac{\|B\|}{\|E\|} = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$$

IV. 1. 2 .4 Longueur d'onde dans le conducteur

La longueur d'onde de l'onde transmise dans le conducteur est :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Re(k)} = 2\pi\delta$$

et la longueur d'onde dans le vide est :

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} c = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

d'où le rapport des longueurs d'onde :

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}} \ll 1$$

L'onde transmise dans le conducteur ne pénètre que sur une profondeur de quelques δ et sa longueur d'onde est $\lambda = 2\pi\delta \sim 6\delta$, donc cette onde est quasiment morte avant même qu'il n'y ait une longueur d'onde complète :

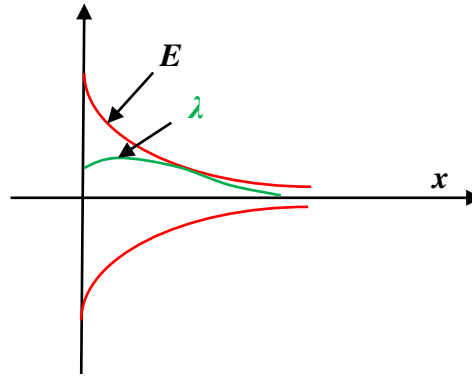


Figure IV. 6 : Longueur d'onde dans le conducteur

Conclusion:

- *Lorsqu'une onde électromagnétique arrive sur une surface métallique, le champ électrique de l'onde crée dans le métal un courant de densité $j = \sigma E$ sur une profondeur de l'ordre de δ puisque sur une profondeur plus grande $E = 0$. Ce résultat traduit l'effet de peau.*
- *Dans le cas des métaux usuels (fer, cuivre, aluminium, ...) une partie de l'onde est transmise pour le métal et une autre partie est réfléchi (réflexion partielle). Ce courant pelliculaire rayonne une onde électromagnétique à l'origine de l'onde réfléchi.*
- *Si l'épaisseur e du conducteur est très grande devant l'épaisseur de peau δ ($e \gg \delta$) alors l'onde transmise est complètement amortie dans le métal. Dans le cas où $e < \delta$ l'onde transmise est amortie partiellement et continue sa propagation à la sortie du conducteur.*
- *Dans la limite d'une conductivité $\sigma \rightarrow \infty$ (supraconducteur) l'épaisseur de peau est $\delta = 0$ l'onde incidente est complètement réfléchi (réflexion totale). Dans ce cas les amplitudes des ondes incidente et réfléchi sont égales ainsi que les amplitudes de leur vecteur d'onde, ce qui donne naissance à une onde stationnaire qui fera l'objet du prochain chapitre.*

En pratique ce phénomène de réflexion d'onde électromagnétique est quantifié par un coefficient de réflexion (voir TP sur les ondes électromagnétiques dans un câble coaxial).

IV. 1. 3 Propagation dans les milieux magnétiques

Les équations de propagation du champ dans un milieu de perméabilité μ et de permittivité ϵ quelconques sont :

$$\Delta E - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial j}{\partial t}$$

$$\Delta B - \epsilon\mu \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \mu (\nabla \wedge j)$$

Dans les milieux magnétiques conducteurs et dans tout le domaine des fréquences radio (le domaine des hyperfréquences est exclu), la loi d'Ohm est supposée vérifiée. Ceci entraîne que la densité de charges ρ est nulle à l'intérieur de ces conducteurs. Ces deux équations s'écrivent dans ce cas comme suit :

$$\Delta E - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial j}{\partial t}$$

$$\Delta B - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \mu(\nabla \wedge j)$$

De la loi d'Ohm locale, $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ et de l'équation de Maxwell – Faraday $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ on obtient :

$$\mu(\nabla \wedge j) = \mu(\nabla \wedge \sigma E) = \mu\sigma \nabla \wedge E = -\mu\sigma \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Delta E - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$\Delta B - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

On considère un matériau de conductivité σ , de perméabilité $\mu = \mu_0 \mu_r$ et de permittivité ε_0 et occupant le demi-plan $x \geq 0$ (en coordonnées cartésiennes). Le champ électrique \mathbf{E} (supposé à une seule composante selon \mathbf{Oy}) s'écrit en notation complexe sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot \mathbf{a}_y$$

Où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation et \mathbf{k} le vecteur d'onde dans le matériau.

On retrouve l'induction magnétique \mathbf{B} par l'équation $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ après intégration :

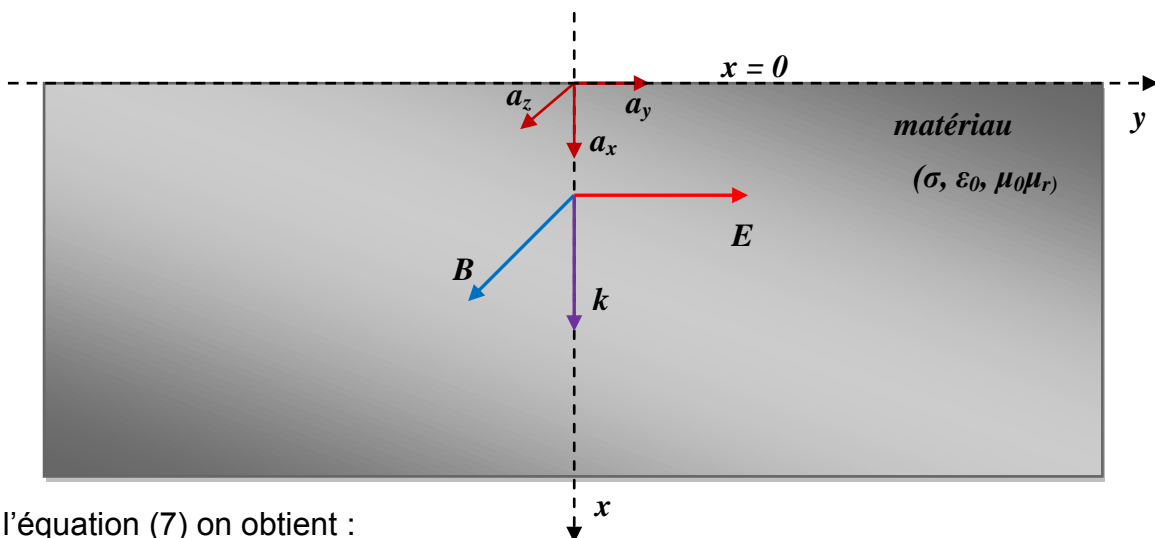
$$\mathbf{B} = B_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot \mathbf{a}_z$$

Avec :

$$B_0 = \frac{k}{\omega} \cdot E_0$$

Etudions l'évolution du champ électrique dans le matériau ($x \geq 0$). L'équation de propagation unidimensionnelle du champ électrique s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\frac{d^2 E}{dx^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \mu_r \frac{d^2 E}{dt^2} - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{dE}{dt} = 0$$



De l'équation (7) on obtient :

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = -k^2 \cdot E \quad ; \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = -\omega^2 \cdot E \quad ; \quad \frac{dE}{dt} = i\omega \cdot E$$

Avec $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ et en remplaçant ces expressions dans l'équation précédente on obtient :

$$-k^2 E + \frac{\mu_r \omega^2}{c^2} E - i\omega \mu_0 \mu_r \sigma E = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{\mu_r \omega^2}{c^2} - i\omega \mu_0 \mu_r \sigma$$

$$k = \frac{\mu_r \omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \right)$$

L'inégalité suivante est vérifiée (sauf au-delà des hyperfréquences) :

$$\frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \gg 1$$

On peut ainsi écrire :

$$k^2 = -i\omega \mu_0 \mu_r \sigma = -2i \frac{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}{2}$$

$$(1 - i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i$$

d'où

$$k = \sqrt{-2i \frac{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}{2}} = \pm (1 - i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}{2}}$$

En posant :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}}$$

on obtient :

$$k = \frac{1 - i}{\delta}$$

L'expression du champ électrique devient ainsi :

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \frac{1-i}{\delta} x)} \cdot \mathbf{a}_y = E_0 e^{(i\omega t - i\frac{x}{\delta} - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y$$

L'amplitude du champ électrique s'écrit sous la forme :

$$E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$$

De la loi d'Ohm $J = \sigma \cdot E$ et en remplaçant dans l'équation précédente on obtient la densité de courant :

$$J = \sigma E = \sigma E_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \cdot \mathbf{a}_y$$

avec : $j_0 = \sigma E_0$

L'amplitude de la densité de courant dépend de x (profondeur dans le matériau) et s'écrit sous la forme :

$$J(x) = J_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}}$$

Le facteur réel $e^{-\frac{x}{\delta}}$ traduit l'atténuation de l'onde dans le matériau.

Le facteur $e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})}$ traduit la propagation de l'onde dans le matériau.

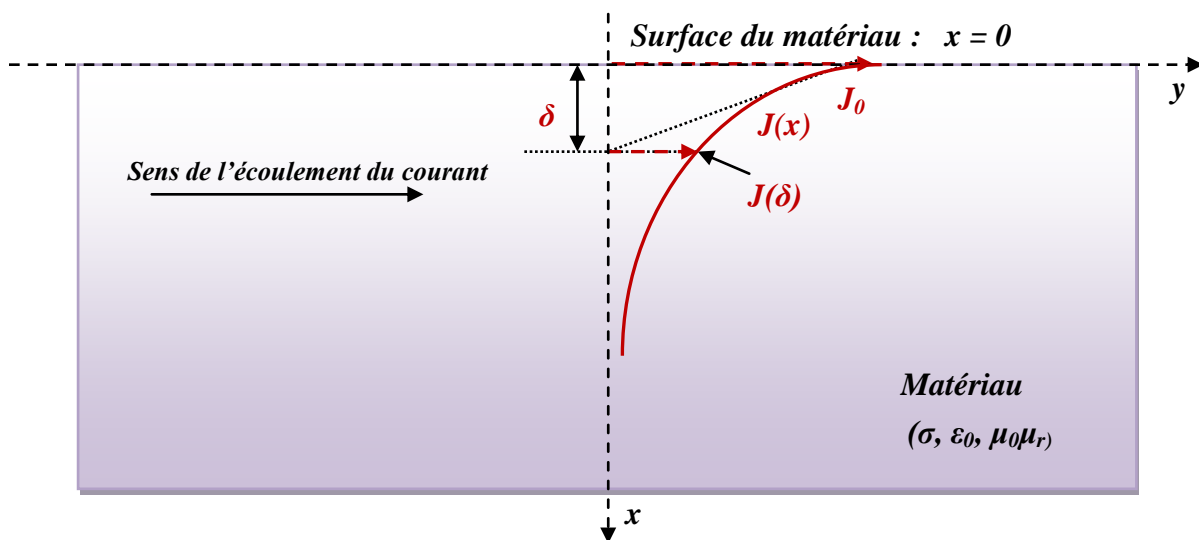
δ représente la profondeur de pénétration de la densité du courant dans le matériau. On appelle δ l'épaisseur de peau.

L'amplitude de la densité de courant J est maximale à la surface du matériau ($x = 0$) et diminue de façon exponentielle en pénétrant dans le matériau.

$$\text{pour } x = 0 \rightarrow J(0) = J_0$$

$$\text{pour } x = \delta \rightarrow J(\delta) = \frac{J_0}{e} \Rightarrow \frac{J(\delta)}{J_0} \approx 37\%$$

Pour une profondeur de quelques δ la densité de courant s'annule dans le matériau (d'où vient le mot effet de peau c'est-à-dire que le phénomène est superficiel).



Induction magnétique dans le matériau

L'induction magnétique donnée par l'équation (8) peut se mettre sous la forme :

$$B = \frac{k}{\omega} \cdot E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot a_z = \frac{1-i}{\delta \omega} \cdot E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot a_z$$

$$B = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{i(\omega t - i\frac{1-i}{\delta}x)} (1-i) = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{i(\omega t - i\frac{x}{\delta} - \frac{x}{\delta})} \cdot \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot a_z$$

$$B = \sqrt{2} \frac{E_0}{\delta \omega} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot a_z$$

En remplaçant l'expression de δ et avec $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ on obtient :

$$B = \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 c^2 \omega}} \cdot E_0 \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot a_z = B_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} a_z$$

avec :

$$B_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 c^2 \omega}} \cdot E_0$$

L'induction magnétique peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \mathbf{a}_z$$

L'amplitude de l'induction magnétique \mathbf{B} dépend de x (profondeur dans le matériau) et suit la même loi d'atténuation en exponentielle comme la densité de courant :

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}}$$

Le facteur réel $e^{-\frac{x}{\delta}}$ traduit l'atténuation de l'induction magnétique dans le matériau.

Le facteur $e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})}$ traduit la propagation de l'onde dans le matériau.

Dans la simulation avec le logiciel FEMM, la profondeur est prise comme variable r .

$$\mathbf{J}(r) = \mathbf{J}_0 \cdot e^{-\frac{r}{\delta}}$$

$$\mathbf{B}(r) = \mathbf{B}_0 \cdot e^{-\frac{r}{\delta}}$$

Ces deux expressions de l'induction magnétique et de la densité de courant sont également valables aux basses fréquences où la propagation du champ électromagnétique est négligeable.

CHAPITRE V

REFLEXION D'ONDES SUR UN PLAN CONDUCTEUR PARFAIT

ONDES STATIONNAIRES

V. 1 Onde incidente

Les relations de passage du champ électromagnétique entre deux milieux diélectriques différents et entre deux milieux magnétiques différents sont établies aux chapitres II et III. Ces relations peuvent être également appliquées au passage du champ électromagnétique entre le vide, milieu (1) et un conducteur parfait (milieu 2) non magnétique. Ces deux milieux ont une permittivité ε_0 et une perméabilité μ_0 . On obtient :

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$E_{n1} - E_{n2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot n$$

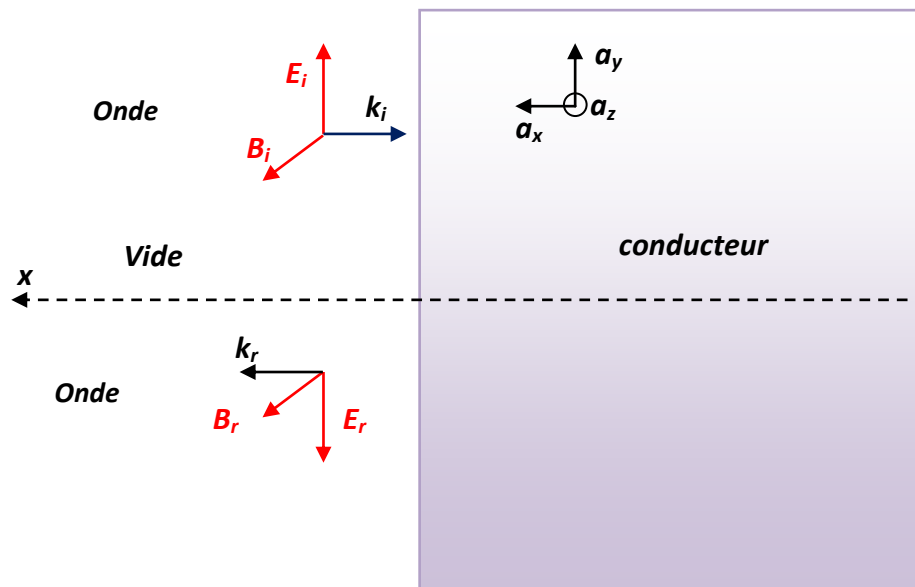
$$H_{t1} - H_{t2} = I \wedge n$$

$$B_{n1} = B_{n2}$$

$$B_{t1} - B_{t2} = \mu_0 I \wedge n$$

Où I est le courant de conduction, ρ la densité de charges libres à la surface du conducteur et n le vecteur unitaire normal à cette surface.

On considère un conducteur parfait de conductivité $\sigma \rightarrow \infty$, non magnétique de perméabilité μ_0 , de permittivité ϵ_0 et occupant le demi-plan $x \leq 0$ (coordonnées cartésiennes). Soit une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale dans le vide et considérons uniquement la propagation unidimensionnelle dans le sens négatif vers le conducteur, par exemple selon l'axe ox comme l'indique la figure ci-dessous :



A l'intérieur du conducteur parfait le champ électrique est nul. Le champ d'induction magnétique dans ce conducteur peut être obtenu à partir de l'équation de Maxwell – Faraday :

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \Rightarrow B = \text{constante}$$

En absence de champ d'induction magnétique stationnaire : $B = 0$

L'onde incidente E_i est donnée par :

$$E_i \begin{pmatrix} E_{xi} = 0 \\ E_{yi} = E_0 \cos(\omega t + kx) \\ E_{zi} = 0 \end{pmatrix}$$

L'onde incidente associée B_i est donnée par :

$$B_i \begin{pmatrix} B_{xi} = 0 \\ E_{yi} = 0 \\ B_{zi} = -B_0 \cos(\omega t + kx) \end{pmatrix}$$

En appliquant les relations de passage entre le vide et le conducteur on obtient :

$$E_{t1} = E_{t2} = 0$$

$$E_{n1} - E_{n2} = E_{n1} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot n$$

$$B_{t1} - B_{t2} = B_{t1} = \mu_0 I \wedge n$$

A la surface du conducteur parfait et en absence de champ magnétique permanent les champs électrique et magnétique sont tels que :

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot n \quad \text{et} \quad B = \mu_0 I \wedge n$$

Le champ incident E_i ne vérifie pas l'équation précédente, il faut donc admettre l'existence d'une onde réfléchie de champ électrique E_r et de champ d'induction magnétique B_r telles que :

$$E_i + E_r = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot n \quad \text{et} \quad B_i + B_r = \mu_0 I \wedge n$$

(E_r, B_r) est une onde plane progressive de pulsation ω , son vecteur d'onde est k_r perpendiculaire au plan du conducteur.

- Si k_r n'est pas \perp au plan alors B_r ne sera pas \parallel au plan conducteur
- $B_r \perp n$, $B_r \perp i$ et $i \parallel$ plan

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_r \text{ est tangent au plan} \\ B_r \text{ est tangent au plan} \end{array} \right\} \Rightarrow E_i = -E_r \Rightarrow \rho = 0$$

- $|k_r| = k$

$$E_r \left(\begin{array}{l} E_{xr} = 0 \\ E_{yr} = -E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_{zr} = 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad B_r \left(\begin{array}{l} B_{xr} = 0 \\ E_{yr} = 0 \\ B_{zr} = -B_0 \cos(\omega t - kx) \end{array} \right)$$

A $x = 0$ le courant est :

$$I = \left(\begin{array}{l} I_y = \frac{2B_0}{\mu_0} \cos \omega t \\ I_z = 0 \end{array} \right)$$

Ce qui montre l'existence d'un courant superficiel engendré par l'onde. Dans le cas limite du métal conducteur parfait, un tel courant ne dissipe aucune puissance par effet Joule. Le champ électrique E_i de l'onde incidente met en mouvement les électrons du métal (suivant l'axe oy). La nappe de courant sinusoïdale ainsi engendrée est à son tour la source d'une nouvelle onde.

- Pour $x < 0$ $E = 0$ et $B = 0$
- Pour $x > 0$, l'onde créée par la nappe de courant constitue l'onde réfléchie

V. 2 Interférence de l'onde réfléchie et de l'onde incidente

Dans le vide à $x > 0$ les ondes incidente et réfléchie se superpose. Leur amplitude ainsi que celle de leur vecteur d'onde sont égales et nous avons :

$$E = E_i + E_r \quad \text{et} \quad B = B_i + B_r$$

$$E = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(\omega t + kx) - E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ E_y = 0 \\ B_z = -B_0 \cos(\omega t + kx) - B_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

d'où :

$$E = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = -2E_0 \sin kx \cdot \sin \omega t \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ E_y = 0 \\ B_z = -2B_0 \cos kx \cdot \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Les amplitudes de \mathbf{E} et \mathbf{B} dépendent de x :

- Les nœuds (amplitude nulle) de E sont tels que : $\sin kx = 0$

$$x = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2}$$

- Les nœuds (amplitude nulle) de B sont tels que : $\cos kx = 0$

$$x = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

- Les ventres (amplitude maximale) de E sont tels que : $\sin kx = \pm 1$

$$x = n \frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{2k} = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

- Les ventres (amplitude maximale) de B sont tels que : $\cos kx = \pm 1$

$$x = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2}$$

1. Deux ventres consécutifs ou deux nœuds consécutifs de \mathbf{E} (ou de \mathbf{B}) sont distants de $\lambda/2$
2. Un nœud et un ventre consécutifs de \mathbf{E} (ou de \mathbf{B}) sont distants de $\lambda/4$

La phase de \mathbf{E} (ou de \mathbf{B}) ne dépend que du temps, il n'y a pas de propagation de la phase. Cette phase est stationnaire d'où le nom d'onde stationnaire donné à l'onde résultante (\mathbf{E}, \mathbf{B}) .

- Une onde stationnaire est caractérisée par un produit : $f(\mathbf{x}) \cdot g(t)$

- Une onde progressive est caractérisée par : $f(t - x/v)$

V. 3 Aspect énergétique de l'onde stationnaire

V. 3. 1 Densité de l'énergie

La densité de l'énergie de l'onde stationnaire est :

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = 2\varepsilon_0 E_0^2 (\sin^2 \omega t \cdot \sin^2 kx + \cos^2 \omega t \cdot \cos^2 kx)$$

La moyenne temporelle de w est donnée par :

$$\langle w \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 kx + \frac{1}{2} \cos^2 kx \right) = \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0}$$

Cette moyenne est indépendante du point considéré.

V. 3. 2 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting dans l'onde stationnaire s'écrit sous la forme :

$$\Pi = E \wedge \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ -2E_0 \sin kx \cdot \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2B_0 \cos kx \cdot \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\Pi \begin{pmatrix} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin 2kx \cdot \sin 2\omega t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de Poynting Π est nul aux ventres et aux nœuds de E et de B ce qui empêche la propagation de l'énergie électromagnétique de l'onde stationnaire. La valeur moyenne du vecteur Π est nulle en tout point :

$$\langle \Pi \rangle = 0$$

RECAPITULATION

A) Cas général : lorsque les phénomènes dépendent du temps

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$

Loi de force de Lorentz : $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$; $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant):
 $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Potentiels : $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$; $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

Jauge de Lorentz : $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

Equations de Poisson : $\square V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$; $\square \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = 0$

B) En régime quasi-permanent : lorsque les grandeurs dépendent du temps mais le phénomène de propagation est négligeable.

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$

Loi de force de Lorentz : $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$; $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant):
 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

Potentiels : $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$; $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

Jauge de Coulomb : $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

Equations de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$; $\Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = 0$

C) En régime permanent : lorsque les charges électriques sont mobiles mais les grandeurs sont indépendantes du temps $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$

Loi de Force de Lorentz : $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$; $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant) :
 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

Potentiels : $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$; $\mathbf{E} = -\nabla V$

Jauge de Coulomb : $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

Equations de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$; $\Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = 0$

D) En électrostatique : lorsque les charges électriques sont fixes

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

Loi de force de Lorentz : $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$; $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \rho \mathbf{E}$

Potentiel : $\mathbf{E} = -\nabla V$

Equation de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$

E) En magnétostatique : lorsque le champ magnétique est créé par des courants continus

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$

Loi de force de Lorentz : $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$; $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant):
 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

Potentiel : $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$

Jauge de Coulomb : $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

Equation de Poisson : $\Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = 0$

ρ est la densité de charges libres, \mathbf{j} la densité du courant de conduction, ϵ la permittivité du milieu et μ la perméabilité du milieu.