

# MATERIAUX MAGNETIQUES EN ELECTROTECHNIQUE

## CHAPITRE I : MAGNETOSTATIQUE

- I. 1 Champ magnétique créée par une spire
- I. 2 Champ magnétique créée par une distribution de courants
- I. 3 Forces et couples

## CHAPITRE II : LA MATIERE AIMANTEE

- II. 1 Définition de l'aimantation
- II. 2 Champ magnétique produit par la matière aimantée à l'extérieur
  - II. 2.1 Emploi du potentiel vecteur
  - II. 2.2 Emploi du potentiel pseudo-scalaire
- II. 3 Champ magnétique à l'intérieur de la matière aimantée
- II. 4 L'équilibre magnétique
- II. 5 Corps uniformément aimanté : champ démagnétisant
  - II. 5. 1 Aimantation d'un ellipsoïde
    - II. 5. 1.1 Le champ extérieur  $H_e$  est uniforme et parallèle à un axe principal de l'ellipsoïde
    - II. 5. 1.2 Le champ extérieur n'est pas appliqué suivant un axe principal de l'ellipsoïde
  - II. 5. 2 : Aimantation d'un cylindre dans un champ  $H_e$  uniforme parallèle à son axe de révolution
  - II. 5. 3 : Aimantation d'un circuit en forme d'anneau
    - II. 5. 3. 1 Aimantation d'un tore
    - II. 5. 3. 2 Aimantation d'un tore coupé par un très petit entrefer

## CHAPITRE III : MAGNETISME ATOMIQUE

- III. 1 Le magnéton de BOHR
- III. 2 Moment magnétique d'un atome isolé
- III. 3 Moment magnétique atomique dans les solides
- III. 4 Effet d'un champ extérieur sur une distribution de moments magnétiques indépendants : le paramagnétisme
- III. 5 Classification des matériaux magnétiques

## CHAPITRE I : MAGNETOSTATIQUE

Le champ magnétique créé dans le vide par des courants est unique. On peut l'écrire soit  $\mathbf{B}$ , soit  $\mathbf{H}$ , mais c'est la même chose au facteur  $\mu_0$  près :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Le champ magnétique dérive d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

et peut dériver aussi d'un potentiel pseudo-scalaire  $v$  :

$$\mathbf{B} = -\nabla(\mu_0 v)$$

Autrement dit  $v$  est le potentiel scalaire magnétique d'où dérive  $\mathbf{H}$

### I. 1 Champ magnétique créé par une spire

Une petite spire parcourue par un courant  $I$  crée en un point  $\mathbf{P}$  éloigné un champ magnétique dipolaire ( $r \gg r'$ ), c'est-à-dire un champ  $\mathbf{B}$  qui dérive des potentiels (voir cours de théorie du champ électromagnétique) :

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{M \wedge \mathbf{r}}{r^3}$$
$$\mu_0 v = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{M \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

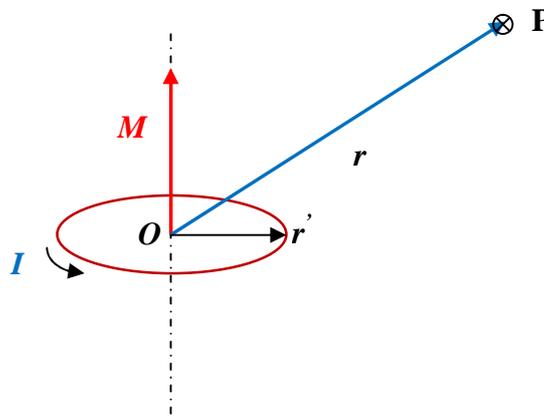


Figure I. 1: Champ magnétique créé par une spire parcourue par un courant.

La grandeur vectorielle  $M$  désigne le moment magnétique de la spire, il s'écrit sous la forme :

$$M = I \cdot S$$

Le terme  $\mu_0 v$  représente un potentiel coulombien identique au potentiel créé par un dipôle électrique. Cette analogie est l'origine de la notion de **masse magnétique** ou **pôle magnétique**. Ce sont des grandeurs fictives qui jouent en magnétostatique un rôle strictement identique aux charges électriques en électrostatique. Ces masses magnétiques fictives peuvent être commodes dans certains cas pour ramener un problème magnétique à un problème électrostatique. Elles sont obligatoirement associées par paires de charges opposées, pour rendre compte du moment magnétique qui lui, est une grandeur bien réelle, la grandeur physique de base de la magnétostatique. L'observateur du point  $\mathbf{P}$  (avec  $r \gg r'$ ) est absolument incapable de faire la distinction entre les deux modèles de dipôle suivants :

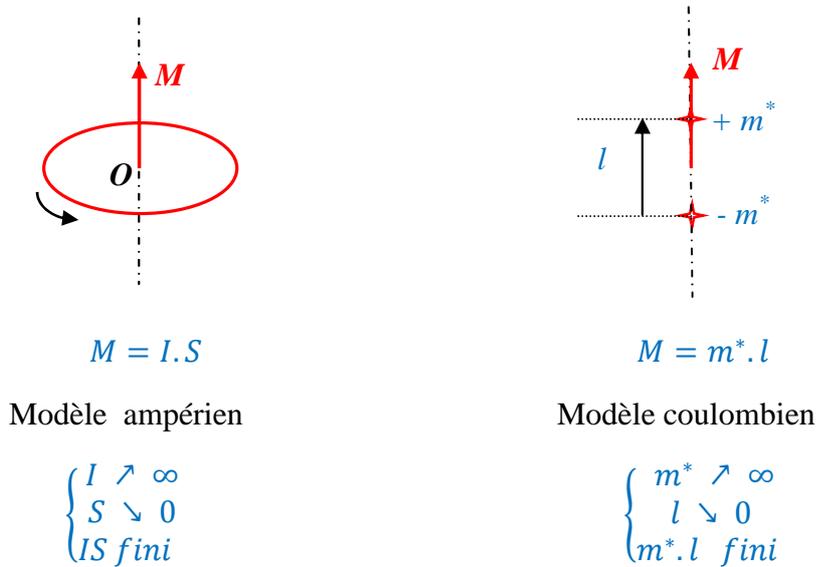


Figure I. 2 : Modèle ampérien et modèle coulombien

### I. 2 Champ magnétique crée par une distribution de courants

Le champ magnétique vu par un observateur éloigné ( $r \gg r'$ ) comprend un terme principal dipolaire et des termes d'ordres supérieurs généralement négligeables, dans la mesure où  $r \gg r'$ . L'expression du moment dipolaire d'une distribution de courant quelconque  $\tau$  est :

$$M = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} r' \wedge j dt$$

où  $j$  désigne la densité de courant au point  $P'(r')$

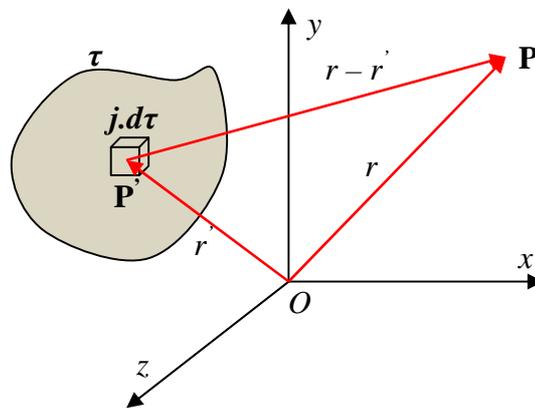


Figure I. 3 : Champ magnétique crée par une distribution localisée de courants.

### I. 3 Forces et couples

La notion de moment magnétique dipolaire n'est pas seulement utile quand on s'intéresse au champ magnétique créé par des sources données mais aussi quand on veut connaître les forces et les couples appliqués à un système plongé dans un champ magnétique extérieur. Si on appelle  $B_e$  le champ magnétique d'induction d'origine extérieure, on montre que le terme principal des forces résultantes et du couple résultant, s'écrit en fonction de  $M$  comme suit :

$$F = (M \cdot \nabla) B_e$$

$$\Gamma = M \wedge B_e$$

Le moment magnétique est une grandeur physique définie indépendamment de la matière et qui rend compte à la fois du champ magnétique créé par des sources données et des forces subies dans un champ extérieur.

## CHAPITRE II : LA MATIERE AIMANTEE

### II. 1 Définition de l'aimantation

C'est un fait d'expérience que la matière dans certaines circonstances :

- constitue une source de champ magnétique ;
- subit les actions d'un champ magnétique extérieur ;

au même titre qu'une distribution de courants. Il n'y a aucune différence de nature entre le champ des courants et le champ de la matière. Il est donc normal d'appliquer les propriétés des distributions de courants rappelées au paragraphe précédent. En outre, l'expérience montre qu'il s'agit d'une propriété atomique ou même subatomique de la matière. Un électron isolé, ou un neutron isolé, se comporte déjà comme un aimant, ou une distribution convenable et inconnue de courants.

Dans la matière aimantée, la condition  $r' \ll r$  est toujours réalisée. On peut donc connaître le champ magnétique créé en un point quelconque par la matière aimantée, ou les actions qu'elle subit, à condition de connaître la distribution équivalente des moments magnétiques. On divise donc la matière, supposée continue, en éléments de volume  $d\tau$  de moment  $dM$  et on pose :

$$\mu_0 dM = J d\tau$$

Le vecteur  $J$  est l'**intensité d'aimantation** ou plus simplement l'aimantation et il s'exprime en Teslas. Connaître la répartition de l'aimantation  $J(\mathbf{r}')$  dans un système, c'est connaître le moment équivalent en chaque point, et par conséquent être capable de calculer le champ magnétique qui en résulte et les forces subies par la matière. L'aimantation est donc une grandeur physique accessible par ses effets.

### II. 2 Champ magnétique produit par la matière aimantée à l'extérieur

Dans le vide on suppose connue la répartition de l'aimantation  $J(\mathbf{r}')$ . Pour calculer le champ magnétique  $B$  vu par l'observateur  $P(\mathbf{r})$ , on peut utiliser indifféremment la méthode du potentiel vecteur ou celle du potentiel scalaire.

#### II.2.1 Emploi du potentiel vecteur

Le milieu obéit à l'équation de Poisson (voir cours de théorie du champ électromagnétique) dont la solution pour le potentiel vecteur  $A$  est :

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{di^*}{r - r'}$$

avec :

$$di^* = \begin{cases} \frac{\nabla \wedge J}{\mu_0} d\tau = i^* d\tau & \text{densité volumique} \\ \frac{J \wedge n}{\mu_0} dS = k^* & \text{densité surfacique} \end{cases}$$

L'intégrale est étendue à la matière aimantée.

Les densités de courants fictives  $i^*$  et  $k^*$  sont les ampériens associés à l'aimantation  $J$ . En raison de la présence du facteur  $1/\mu_0$ , il s'agit de densités de courant énormes, sans rapport avec les densités de courant admissibles dans le cuivre par exemple. Application à un cylindre **SmCo5** d'aimantation  $J_0 = 0,8 T$  :

$$|k^*| = \frac{J_0}{\mu_0} = 0,8 \times 8.10^5 \text{ A.m}^{-1} = 6,4.10^5 \text{ A.m}^{-1}$$

Dans un solénoïde mince (1 mm), pour une densité volumique naturelle on trouve une densité superficielle équivalente 200 fois plus petite que la densité superficielle des ampériens.

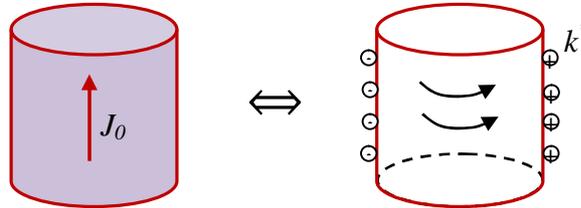


Figure II. 1 : Cylindre aimanté uniformément

## II. 2. 2 Emploi du potentiel pseudo-scalaire

Soit :

$$B = -\nabla(\mu_0.v) \quad \text{ou bien} \quad H = \frac{B}{\mu_0} = -\nabla v$$

On trouve :

$$v = \frac{1}{4\pi\mu_0} \iiint \frac{d\rho^*}{r.r'}$$

avec :

$$d\rho^* = \begin{cases} (-\nabla.J)d\tau = \rho^* d\tau \\ (J.n)dS = \sigma^* dS \end{cases}$$

Les masses magnétiques  $\rho^*$  et  $\sigma^*$  d'une part, ou les ampériens  $i^*$  et  $k^*$  d'autre part, peuvent être utilisées indifféremment au calcul des forces subies, comme pour le calcul des champs.

## II. 3 Champ magnétique à l'intérieur de la matière aimantée

Le fait que l'observateur  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  se situe maintenant à l'intérieur de la matière aimantée, donc parmi les dipôles magnétiques pose de nouveaux problèmes à la fois d'ordre mathématique et physique. On peut encore utiliser les méthodes précédentes pour calculer le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  et le potentiel scalaire  $v(\mathbf{r})$  qui restent mathématiquement bien définis, mais on ne trouve plus  $\nabla \wedge \mathbf{A}$  égal à  $-\nabla(\mu_0 \mathbf{v})$ .

On appelle champ d'induction magnétique dans la matière, le champ  $\mathbf{B}$  dérivant d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  (voir cours de théorie du champ électromagnétique) :

$$B = \nabla \wedge A$$

et champ d'excitation magnétique dans la matière, le champ  $\mathbf{H}$  :

$$H = -\nabla v$$

et entre ces deux grandeurs qui sont toute deux issues de la distribution de l'aimantation  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ , il existe une relation du type :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}$$

Quand on utilise le modèle ampérien, on aboutit au champ d'induction  $\mathbf{B}$ , alors que le modèle des masses magnétiques mène au champ d'excitation magnétique  $\mathbf{H}$ , cela aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la matière. On montre facilement que ces définitions ne remettent pas en cause les propriétés connues des champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  ni les conditions aux limites.

## II. 4 L'équilibre magnétique

Tout système magnétique est donc caractérisé par sa distribution d'aimantation  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ . Quand on connaît cette distribution on peut calculer  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  en tous les points de l'espace et les forces et les couples subis dans un champ extérieur.  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  apparaît donc comme une grandeur physique mesurable par ses conséquences.

En pratique, la distribution  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  est rarement connue. En effet, pour chaque élément de volume  $d\tau$ , l'aimantation  $\mathbf{J}$  peut dépendre de très nombreux facteurs d'origine diverses, non magnétiques (température, pression, contraintes, forme et dimension de l'échantillon) ou magnétique (champ d'excitation appliqué, influence des dipôles voisins).

En ne prenant en compte que les grandeurs magnétiques, il suffit de connaître 2 seulement parmi les 3 champs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{J}$  puisque le 3<sup>ème</sup> champ est accessible en écrivant :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}$$

Cette relation est valable en tous les points.

On appelle loi d'aimantation une relation du type :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = f[\mathbf{H}(\mathbf{r})]$$

Quand on admet l'existence d'une telle loi, il n'y a plus qu'une seule grandeur indépendante parmi les 3 vecteurs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{J}$ . Dans les cours élémentaires d'électrotechnique, on se limite souvent à une loi d'aimantation linéaire (loi de Hooke = effet proportionnel à la cause qui l'a produit)

$$\mathbf{J} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 (\mu_r - 1) \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

$\chi_m$  et  $\mu_r$  sont des nombres appelés respectivement la susceptibilité magnétique et la perméabilité magnétique relative. Une telle appellation est extrêmement grossière chaque fois qu'on a affaire à des matières ferromagnétiques. Les électrotechniciens continuent toutefois à l'utiliser pour le calcul des circuits magnétiques industriels, mais il faut toujours penser qu'il ne s'agit que d'une approximation.

## II. 5 Corps uniformément aimanté : champ démagnétisant

On imagine un corps de forme quelconque, uniformément aimanté  $\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{J}_0$ . On peut étudier le champ d'excitation  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  et le champ d'induction  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  vu par un observateur  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ . En général ces champs sont variables avec la position de l'observateur.

Soit un cylindre d'axe  $oz$  et une aimantation  $J_0$  parallèle à l'axe, figure II. 2 (a). On peut calculer facilement le champ  $H(z)$  suivant l'axe. On sait que le champ créé par un disque uniformément chargé, figure II. 2 (b), en un point de son axe vaut :

$$H = \frac{J_0}{2\mu_0} (1 - \cos \theta)$$

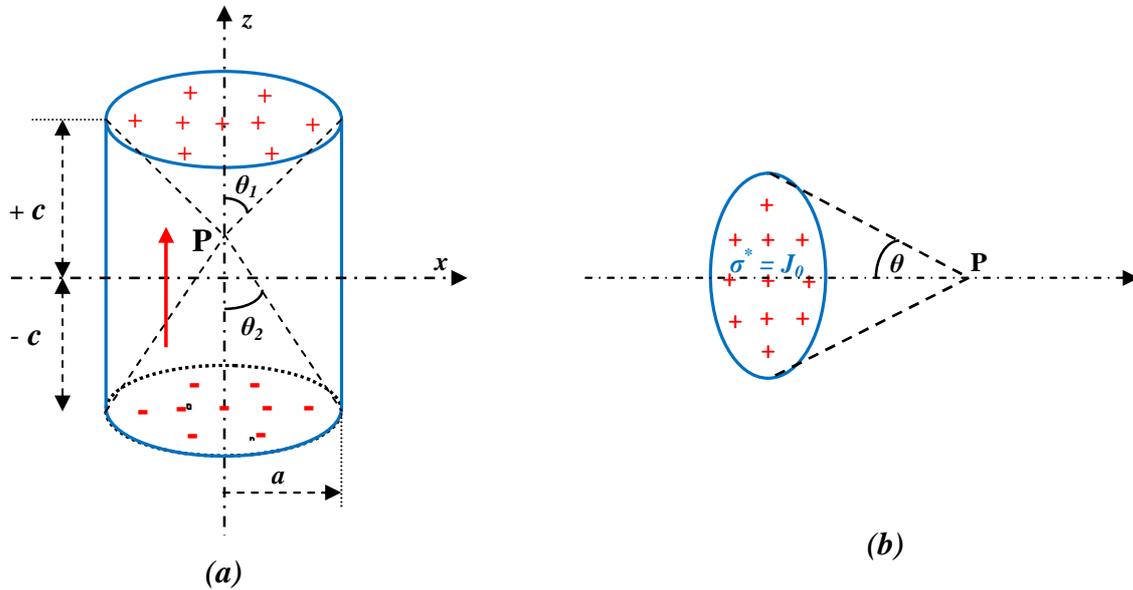


Figure II. 2 : Aimantation d'un cylindre (a) et d'un disque (b) suivant l'axe de révolution

En appliquant le principe de superpositions pour les deux faces chargé du cylindre on peut donc calcule le champ  $H(z)$ . Au point  $P(o,z)$  on obtient :

$$H_z = -\frac{J_0}{2\mu_0} [(1 - \cos \theta_1) - (1 - \cos \theta_2)]$$

$$H_z(o, o) = -\frac{J_0}{\mu_0} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right)$$

$$H_z(o, c) = -\frac{J_0}{\mu_0} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{a^2 + 4c^2}}\right)$$

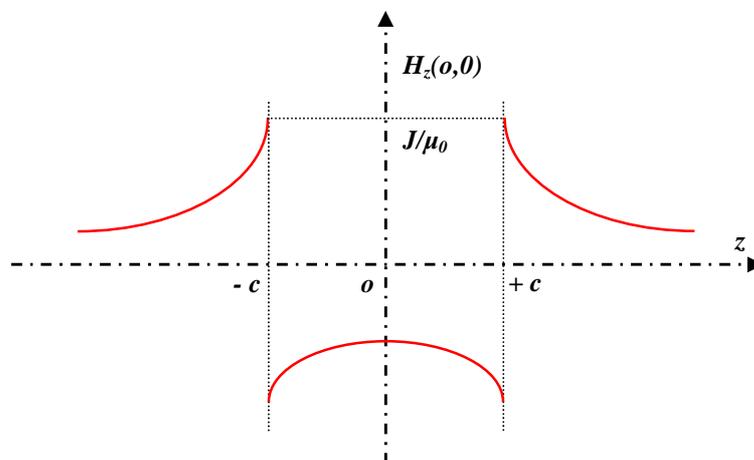


Figure II. 3 : Variation du champ magnétique le long de l'axe d'un cylindre uniformément aimanté

Si on s'écarte de l'axe  $oz$ , l'expression de  $\mathbf{H}(x,z)$  nécessite l'utilisation des intégrales elliptiques. Le point important dans cet exemple est de se rendre compte que chaque élément de volume voit un champ d'excitation différent de celui que voit un élément voisin. Pour que l'aimantation reste uniforme, il est nécessaire que  $\mathbf{J}$  en chaque point soit indépendant du champ réellement appliqué. Ce n'est généralement pas le cas sauf s'il s'agit d'un matériau idéal pour aimant permanent. Si  $\mathbf{J} = f(\mathbf{H})$ , l'état d'aimantation uniforme ne peut pas être un état d'équilibre stable.

## II. 5. 1 Aimantation d'un ellipsoïde

Les seuls volumes finis qui permettent d'obtenir simultanément pour une aimantation uniforme un champ interne uniforme sont les ellipsoïdes. Dans un ellipsoïde uniformément aimanté, quel que soit le point intérieur considéré, on trouve un champ démagnétisant de la forme :

$$\mu_0 H_d = -\|\mathbf{N}\|.J$$

où  $\|\mathbf{N}\|$  est un tenseur symétrique dont la somme des éléments diagonaux vaut toujours 1. Dans le cas d'un ellipsoïde quelconque l'expression de  $\mathbf{H}_d$  en fonction de  $\mathbf{J}$  nécessite l'utilisation des intégrales elliptiques. Cependant le problème est beaucoup plus simple dans le cas plus fréquent d'un ellipsoïde de révolution d'axe  $oz$ . On imagine l'aimantation  $\mathbf{J}$  parallèle à  $oz$  et on appelle  $\gamma = c/a$  le rapport des axes, il vient :

$$\mu_0 H_{dz} = -N_z J_z$$

avec les expressions analytiques suivantes pour  $N_z$  :

- Cas d'un ellipsoïde allongé ( $\gamma > 1$ )

$$N_z = \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left[ \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \operatorname{arg} \operatorname{ch}(\gamma) - 1 \right]$$

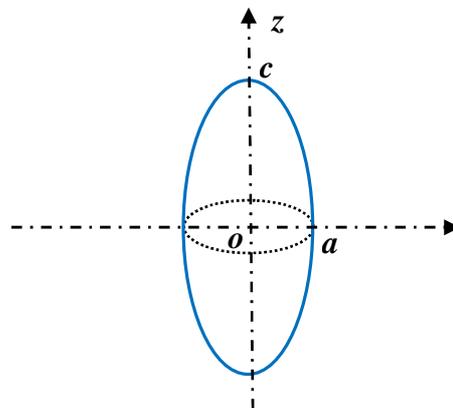


Figure II. 4 : Ellipsoïde allongé

- Cas d'un ellipsoïde aplati ( $\gamma < 1$ ) :

$$N_z = \frac{1}{1 - \gamma^2} \left[ 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \operatorname{arc} \cos \gamma \right]$$

Dans ce cas particulier :

$$N_x = N_y = \frac{1 - N_z}{2}$$

En pratique on retiendra que  $N_z$  varie en sens inverse de  $\gamma$

$$N_z = 0 \text{ pour } \gamma \rightarrow \infty$$

$$N_z = \frac{1}{3} \text{ pour } \gamma = 1$$

$$N_z = 1 \text{ pour } \gamma = 0$$

Il existe aussi des exceptions approchées suffisantes en pratique courante, ( $\sim 1\%$ ):

➤ Cas  $\gamma > 12$ :

$$N_z = \frac{1}{\gamma^2} [\text{Log } \gamma - 0,307]$$

➤ Cas  $\gamma \neq 1$  ( $0,86 < \gamma < 1,14$ ):

$$N_z = \frac{1}{3} \left( \frac{9}{5} - \frac{4}{5} \gamma \right)$$

➤ Cas  $\gamma < 0,06$ :

$$N_z = 1 - \frac{\pi\gamma}{2} + 2\gamma^2$$

## II. 5. 1. 1 Le champ extérieur $H_e$ est uniforme et parallèle à un axe principal de l'ellipsoïde

Il en va de même par raison de symétrie, de l'aimantation et du champ interne total :

$$\begin{cases} H_i = H_e - \frac{N}{\mu_0} J \\ J = f(H_i) \text{ loi d'aimantation} \end{cases}$$

Dans un matériau linéaire, de perméabilité relative vraie  $\mu_r$ , on peut écrire :

$$J = \mu_0(\mu_r - 1)H_i$$

En éliminant  $H_i$  entre ces équations, on obtient la loi d'aimantation apparente  $J(H_e)$  :

$$J = \mu_0(\mu_r - 1) \left( H_e - \frac{N}{\mu_0} J \right)$$

$$J[1 + N(\mu_r - 1)] = \mu_0(\mu_r - 1)H_e$$

$$J = \mu_0 \frac{\mu_r - 1}{1 + N(\mu_r - 1)} H_e$$

Quand  $\mu_r$  est grand  $N(\mu_r - 1) \gg 1$ , de sorte que :

$$J \approx \mu_0 \frac{H_e}{N}$$

L'aimantation obtenue ne dépend que de la forme de l'ellipsoïde et non plus de la nature du matériau. On peut effectuer un calcul similaire pour la perméabilité relative apparente  $\mu_{ap}$ .

$$\begin{cases} H_i = H_e - \frac{N}{\mu_0}(B - \mu_0 H_i) \\ B = \mu_0 \mu_r H_i = \mu_0 \mu_{ap} H_e \end{cases}$$

En divisant par  $B/\mu_0$  les 2 membres de l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{1}{\mu_r} = \frac{1}{\mu_{ap}} - N \left( 1 - \frac{1}{\mu_r} \right)$$

$$\frac{1}{\mu_{ap}} - \frac{1}{\mu_r} = N \left( 1 - \frac{1}{\mu_r} \right)$$

Si  $\mu_r$  est très grand, la perméabilité apparente vaut pratiquement :

$$\mu_{ap} = \frac{1}{N}$$

La perméabilité apparente  $\mu_{ap}$  ne dépend que de la forme de l'ellipsoïde. En pratique, même pour un ellipsoïde très allongé, la perméabilité apparente est extrêmement différente (beaucoup plus petite) que la perméabilité relative vraie.

### II. 5. 1. 2 : Le champ extérieur n'est pas appliqué suivant un axe principal de l'ellipsoïde

On décompose  $H_e$  en ses composantes suivant les axes principaux de l'ellipsoïde et on traite chaque composante comme précédemment.  $H_e$ ,  $H_i$  et  $J$  ne sont plus colinéaires. L'échantillon est soumis à un couple qui, ramené à l'unité de volume, vaut :

$$\Gamma = J \wedge H_e$$

L'ellipsoïde tend à aligner son plus grand axe suivant la direction du champ extérieur appliqué.

(Exemple : l'aiguille de la boussole)

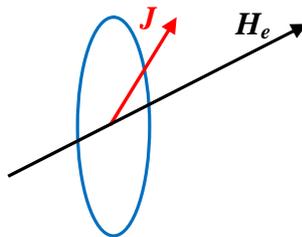


Figure II. 5 : Ellipsoïde aimanté non-uniformément

### II. 5. 2 : Aimantation d'un cylindre dans un champ $H_e$ uniforme parallèle à son axe de révolution

C'est une forme géométrique qu'on rencontre fréquemment. Si on imagine  $J$  uniforme, le champ démagnétisant varie d'un point à un autre. Comme il s'agit d'une notion commode, on peut encore parler de coefficients de champ démagnétisant à condition de préciser comment on le détermine.

Le coefficient de champ démagnétisant fluxmétrique  $N_f$  est définie par la relation suivante :

$$\mu_0 \iint_S H_d dS = -N_f \iint_S J_z \cdot dS$$

où  $S$  désigne la section médiane du cylindre

Le matériau est supposé linéaire et de susceptibilité  $\chi$ , de telle sorte que :

$$J_z = \mu_0 \chi (H_e + H_d) = \mu_0 \chi H_i$$

Le coefficient de champ démagnétisant magnétométrique moyen  $N_m$  est obtenu par :

$$\mu_0 \iiint_{\tau} H_d d\tau = -N_m \cdot J \cdot \tau$$

Où  $\tau$  est le volume du cylindre.

*Dans tous les cas où on n'a pas un ellipsoïde, le champ démagnétisant est très mal connu.*

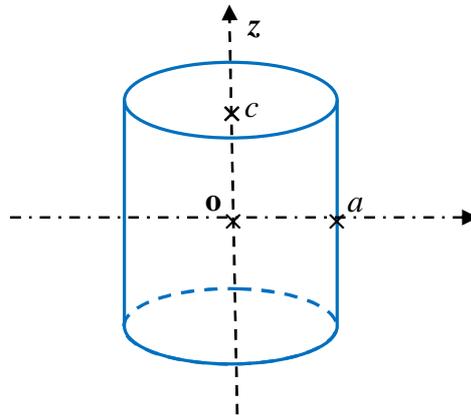


Figure II. 6 : Cylindre aimanté par un champ uniforme parallèle à l'axe de révolution

## II. 5. 3 : Aimantation d'un circuit en forme d'anneau

### II. 5. 3. 1 Aimantation d'un tore

On imagine un circuit torique fermé sur lequel on a bobiné régulièrement un enroulement d'excitation. Par raison de symétrie les lignes de champ d'excitation sont des courbes fermées (des cercles dans le cas du tore de révolution) et les lignes d'aimantation aussi pour un matériau isotrope. **Il n'y a donc pas de champ démagnétisant** puisque les sources de  $H_d$  sont dans les pôles magnétiques aux extrémités des lignes d'aimantation. Le champ magnétique d'excitation ne comprend donc que la seule composante due au courant dans l'enroulement, accessible par application du théorème d'Ampère. Le circuit torique est de ce fait une forme idéale pour mesurer l'aimantation d'un matériau doux isotrope.

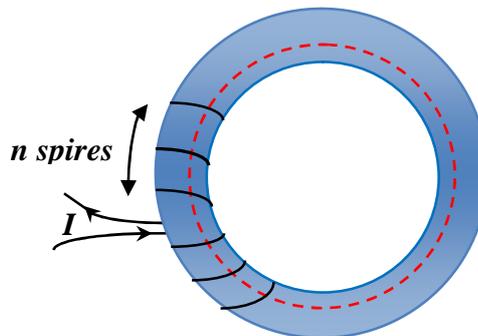


Figure II. 7 : Tore aimanté par un champ magnétique extérieur

### II. 5. 3. 2 Aimantation d'un tore coupé par un très petit entrefer

Le problème est alors trop compliqué pour chercher autre chose qu'une solution approchée. On appelle  $l$  la longueur du circuit et  $e$  celle de l'entrefer tels que :  $e/l \ll 1$  et on suppose le matériau linéaire avec des champs uniformes dans la matière et dans l'entrefer.

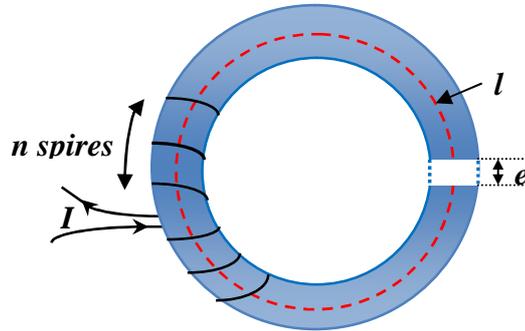


Figure II. 8 : Tore coupé par un très petit entrefer, aimanté par un champ magnétique extérieur

En tenant compte de la conservation du flux d'induction, le théorème d'Ampère devient :

$$nI = B \left( \frac{l}{\mu_0 \mu_r} + \frac{e}{\mu_0} \right)$$

et le champ d'excitation dans la matière vaut :

$$H_i = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{nI}{l + e \mu_r}$$

Le champ d'excitation  $H_{i0}$  sans entrefer vaut :

$$H_{i0} = \frac{nI}{l + e}$$

Le champ d'excitation est donc réduit par la présence de l'entrefer. La variation de champ d'excitation est donc :

$$H_i - H_{i0} = nI \left[ \frac{1}{l + e \mu_r} - \frac{1}{l + e} \right] = nI \frac{e(1 - \mu_r)}{(l + e \mu_r)(l + e)}$$

Comme l'aimantation vaut :

$$J = \mu_0 (\mu_r - 1) H_i = \mu_0 (\mu_r - 1) \frac{nI}{l + e \mu_r}$$

on trouve que la variation de champ  $H_i - H_{i0}$  s'écrit :

$$H_i - H_{i0} = -\frac{e}{l + e} \frac{J}{\mu_0} = -N \frac{J}{\mu_0}$$

La présence de l'entrefer introduit donc, dans cette approximation, un champ démagnétisant de coefficient :

$$N = \frac{e}{l + e}$$

La modification correspondante de la courbe d'aimantation devient rapidement importante dans le cas d'un matériau très doux. Dans tous les cas, avec un entrefer  $e$  dans un circuit de longueur  $l$ , la perméabilité magnétique ne pourra pas dépasser la valeur  $l/e + 1$ :

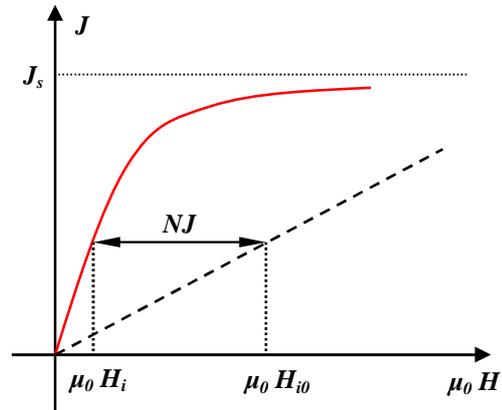


Figure II. 9 : Variation de l'aimantation dans un tore coupé par un très petit entrefer

## CHAPITRE III : MAGNETISME ATOMIQUE

Pour comprendre les propriétés pratiques des différents matériaux, il faut commencer par analyser les origines du moment magnétique.

### III. 1 Le magnéton de BOHR

C'est l'unité de moment magnétique à l'échelle atomique. Il correspond au moment magnétique d'un électron tournant sur une orbite circulaire avec un moment cinétique orbital unité :

$$\sigma = r \wedge p$$
$$|\sigma| = m\omega r^2 = \frac{h}{2\pi}$$

$h$  est la constante de PLANCK

Cet électron tournant sur une orbite circulaire équivaut à une spire parcourue par un courant :

$$I = (-e) \frac{\omega r}{2\pi}$$

et le moment magnétique associé à un tel système vaut :

$$|\mu_B| = I.S = \pi r^2 I = (-e) \frac{\omega r^2}{2}$$

Compte tenu de la valeur du moment cinétique, le magnéton de BOHR s'exprime par :

$$|\mu_B| = (-e) \frac{h}{4\pi m}$$

Il s'exprime en fonction des grandeurs fondamentales qui sont la charge de l'électron  $e$ , sa masse  $m$  au repos et la constante de PLANCK  $h$  :

$$1 \mu_B = 9,273 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

On notera que les moments cinétique  $\sigma$  et magnétique  $\mu_B$  sont antiparallèles, et que si  $\sigma$  est quantifié  $\mu_B$  l'est aussi.

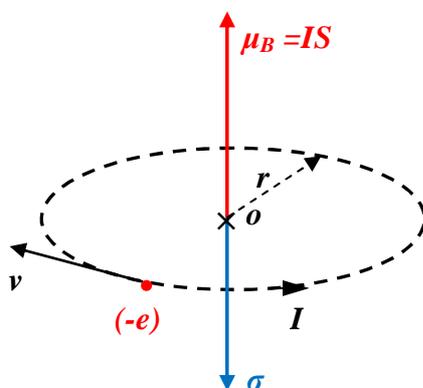


Figure III. 1 : Magnéton de BOHR

### III. 2 Moment magnétique d'un atome isolé

Un atome isolé est un atome complet, doté de tout son cortège électronique et sans interaction avec d'autres atomes voisins. On n'a affaire à des atomes isolés que dans les systèmes très dilués (les gaz). L'atome est un édifice complexe, où chaque particule composante apporte sa contribution au moment magnétique. Le moment magnétique de l'atome est donc la résultante de toutes ces contributions.

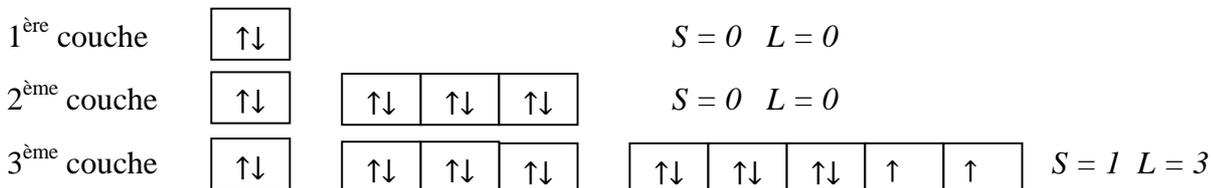
Le noyau n'apporte toujours qu'une contribution tout à fait négligeable, moins de  $1/1000$  de la contribution des électrons. On peut donc dire que le moment magnétique d'un atome ne dépend que de sa structure électronique. Quand on fixe la structure électronique, on fixe le moment magnétique.

La structure de l'édifice est complexe car chaque électron intervient de deux façons pour le moment cinétique ou pour le moment magnétique. Chaque électron a, en effet, un moment (cinétique et magnétique) de spin, et un moment (cinétique et magnétique) orbital. Les électrons se répartissent sur les niveaux d'énergie en couches et en sous-couches, comme l'indique la classification de Mendeleïev, pour satisfaire à des règles compliquées, établies au début du XX<sup>me</sup> siècle par les spectroscopistes, et expliquées ensuite par la mécanique quantique.

En général, on peut dire que les électrons ont tendance à se regrouper pour constituer des couches complètes et des sous-couches aussi complètes que possible. Or, dans une couche complète, les électrons sont appariés 2 à 2 avec des spins opposés et tous les moments résultants sont nuls (cinétique et magnétique).

**Le moment magnétique d'un atome ne peut provenir que des seuls électrons non appariés, donc des couches incomplètes.**

Exemple : on considère l'ion  $Ni^{2+}$  et on s'intéresse à l'arrangement de ses 26 électrons répartis en 3 couches



Il y a seulement 2 électrons célibataires ce qui donne  $S = 1 \quad L = 3$  pour la dernière sous-couche (3d)

Le moment de spin et le moment orbital doivent être ensuite composés pour aboutir à un moment cinétique résultant que les spectroscopistes appellent  $J$  qui vaut ici (règle de HUND)  $J = L + S = 4$ . Pour un tel état le moment magnétique est relié au moment cinétique par une relation de type :

$$M = g \cdot J \cdot \mu_B$$

où  $\mu_B$  est le magnéton de BOHR,  $J$  le moment cinétique total et  $g$  le facteur de Lande

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L-1)}{2J(J+1)}$$

Dans notre exemple  $g = 5/4$ , donc le moment magnétique pour  $Ni^{2+}$  vaut  $5\mu_B$  ce que confirme l'expérience. On peut faire une analyse similaire pour n'importe quel atome dont on connaît la structure électronique.

Le moment magnétique ne provient que des seuls électrons non appariés. Il reste toujours beaucoup plus petit que si tous les électrons pouvaient intervenir et non seulement il reste de l'ordre du  $\mu_B$  mais encore il est très sensible à l'environnement chimique. Enfin c'est parmi les éléments de

transition et les terres-rares qu'on rencontrera les atomes porteurs de moments magnétiques puisque c'est là où on aura des électrons non appariés.

Nature de l'ion	Type de la couche incomplète et nombre d'électrons	Moment cinétique total (en $\hbar/2\pi$ ) $J$	Moment magnétique atomique (en $\mu_B$ ) $M_a$
Ti <sup>2+</sup>	3d <sup>2</sup>	2	4/3
Cr <sup>3+</sup>	3d <sup>3</sup>	3/2	3/5
Mn <sup>3+</sup>	3d <sup>4</sup>	0	0
Fe <sup>3+</sup>	3d <sup>5</sup>	5/2	5
Fe <sup>2+</sup>	3d <sup>6</sup>	4	6
Co <sup>2+</sup>	3d <sup>7</sup>	9/2	6
Ni <sup>2+</sup>	3d <sup>8</sup>	4	5
Cu <sup>2+</sup>	3d <sup>9</sup>	3	3
Gd <sup>3+</sup>	4f <sup>7</sup>	7/2	7
Dy <sup>3+</sup>	4f <sup>9</sup>	15/2	10

Tableau 1 : Moment magnétique atomiques de quelques métaux

### III. 3 Moment magnétique atomique dans les solides

La plupart des solides sont des cristaux, les noyaux atomiques occupent des positions moyennes bien définies et forment des arrangements géométriques réguliers dans l'espace. Les couches profondes étant complètes, elles ne contribuent pas au moment magnétique.

Sur les couches périphériques, les électrons sont pratiquement libres. Ils forment une sorte de gaz d'électrons, responsable de nombreuses propriétés physiques comme la conductibilité électronique et thermiques. Comme ils sont en permanence désorganisés par l'agitation thermique, leur contribution magnétique reste toujours négligeable.

Le cas des matériaux de transition est particulièrement important. Ce sont encore les électrons des couches *d* incomplètes, qui sont à l'origine du moment magnétique. Contrairement à ce qui se passe pour un atome isolé, le moment atomique ne comporte pas alors un nombre entier de magnétons de Bohr.

Exemples :	Cas du fer	$\mathcal{M} = 2,2 \mu_B$
	Cas du nickel	$\mathcal{M} = 0,6 \mu_B$
	Cas du cobalt	$\mathcal{M} = 1,7 \mu_B$

En pratique le moment magnétique atomique dépasse très rarement  $2\mu_B$ .

*Le moment magnétique atomique apparaît comme une conséquence de la structure électronique de la matière. Pour le physicien, c'est une donnée de la nature, au même titre que d'autres grandeurs comme la conductibilité électronique par exemple, et il est fonction de l'environnement chimique. Dans l'état actuel de nos connaissances, il n'y a pas plus de chances qu'on découvre un jour un solide ayant  $20\mu_B$  / atome qu'un solide 10 fois plus conducteur que le cuivre à température ambiante.*

### III. 4 Effet d'un champ magnétique extérieur sur une distribution de moments magnétiques indépendants : le paramagnétisme

Soit un volume unité de matière comportant  $N$  moments  $\mathcal{M}$  tous identiques et libres de s'orienter. La thermodynamique nous enseigne que la configuration d'équilibre du système est celle qui minimise l'énergie libre :

$$F = U - TS$$

En l'absence de champ appliqué, les moments  $\mathcal{M}$  occupent toutes les orientations possibles pour réaliser l'entropie maximale, et le moment résultant est nul.

En présence d'un champ directeur  $\mathbf{B}$  chaque moment  $\mathcal{M}_i$  possède l'énergie ponctuelle :

$$U_i = -\mathcal{M}_i \cdot \mathbf{B}$$

L'agitation thermique s'oppose à un alignement parfait des moments. Dans l'état d'énergie libre minimale, la répartition des orientations des moments obéit à une statistique de Maxwell-Boltzmann. La probabilité d'observer un écart angulaire  $\theta$  entre l'orientation des moments et le champ appliqué  $\mathbf{B}$  est de la forme :

$$C e^{\frac{\mathcal{M}B \cos \theta}{kT}}$$

Où  $k$  désigne la constante de Boltzmann. En physique classique, où toutes les orientations  $\theta$  sont possibles ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), le moment apparent moyen parallèle à  $\mathbf{B}$  vaut :

$$N\mathcal{M}\mathcal{L}(x) = N\mathcal{M} \left( \coth x - \frac{1}{x} \right) ; \text{ avec : } x = \frac{\mathcal{M}B}{kT}$$

$\mathcal{L}(x)$  s'appelle la fonction de Langevin. L'aimantation maximale correspond à un alignement parfait des moments. On l'appelle l'aimantation absolue  $J_0$  :

$$J_0 = \mu_0 N\mathcal{M}$$

d'où :

$$\frac{J}{J_0} = \mathcal{L} \left( \frac{\mathcal{M}B}{kT} \right)$$

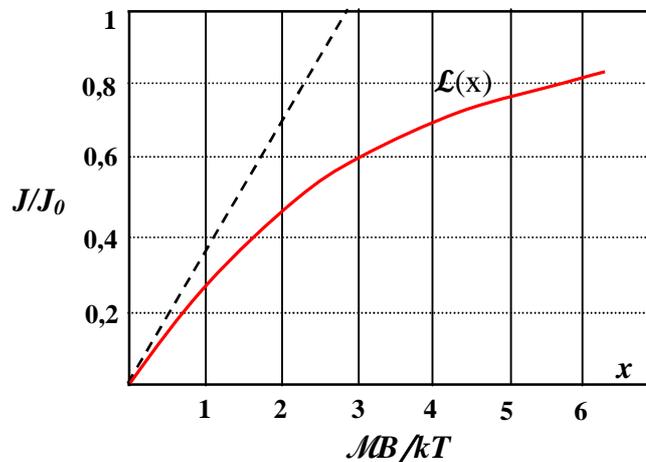


Figure III. 2 : Aimantation en fonction de  $\mathcal{M}B/kT$

A température ambiante, les seules valeurs de  $\mathcal{M}B/kT$  accessibles au laboratoire sont très petites. Exemple :

$$\mathcal{M} = 1 \mu_B = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2 ; B = 1 \text{ T} ; kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \times 300 \text{ joule} = 4,14 \cdot 10^{-21} ;$$

$$\mathcal{M}B/kT = 2,25 \cdot 10^{-3}$$

Pour une telle valeur de  $\mathcal{M}B/kT$  on obtient :

$$\frac{J}{J_0} = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{M}B}{kT}$$

L'aimantation varie linéairement avec le champ appliqué :

$$J = \mu_0(\mu_r - 1)H$$

La susceptibilité magnétique  $\mu_r - 1$  reste de l'ordre de  $10^{-3}$  et varie comme  $T^{-1}$  (loi de Curie). Une telle aimantation est bien trop petite pour supporter des applications technologiques importantes.

### III. 5 Classification des matériaux magnétiques

Le diamagnétisme (c'est-à-dire la modification des orbites électroniques par application d'un champ magnétique) et le paramagnétisme (c'est-à-dire l'orientation partielle de moments préexistants et indépendants) ne conduisent qu'à des moments magnétiques très petits.

Les seuls matériaux qui, dans un environnement favorable sont susceptibles d'acquérir une aimantation de grande amplitude (de l'ordre de  $1T$  par exemple), réussissent simultanément et c'est encore une particularité de leur structure électronique, 2 conditions :

- Le matériau doit comporter des atomes porteurs de moments magnétiques. Plus les moments sont grands et les porteurs nombreux, plus la situation est favorable.
- Ces moments ne doivent pas avoir un comportement individualiste, mais au contraire un comportement collectif.

Dans les substances ferromagnétiques, tous les moments magnétiques tendent à s'aligner parallèlement les uns aux autres, même en l'absence de champ directeur extérieur. C'est le cas du fer-silicium.

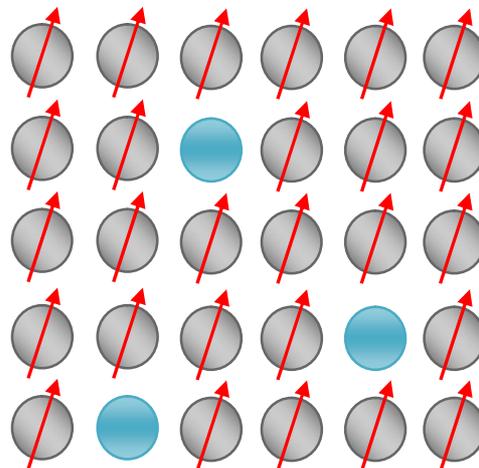


Figure III. 3 : Représentation schématique du comportement ferromagnétique du **FeSi**

Il existe des substances qu'on appelle antiferromagnétiques où les moments se partagent en 2 sous-réseaux. Dans chaque sous-réseau tous les moments s'alignent, mais les deux sous-réseaux s'opposent exactement, pour aboutir à un moment résultant nul ou très faible (exemple : **MnO**).

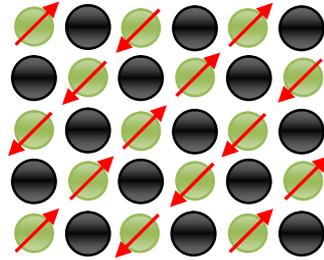


Figure III. 4 : Représentation schématique du comportement antiferromagnétique du **MnO**

Certains matériaux ressemblent au type précédent mais les deux sous-réseaux ne se compensent pas exactement parce qu'il y a par exemple différents types de moments inégalement répartis sur les 2 sous-réseaux. On parle alors de comportement ferrimagnétique. Les ferrites et les aimants TR cobalt appartiennent à cette classe de matériaux.

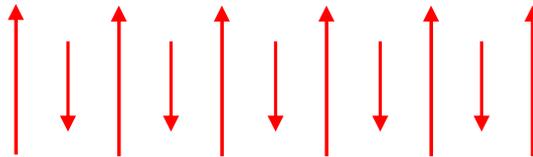


Figure III. 5 : Représentation schématique du comportement ferrimagnétique.

Pratiquement, seules les substances ferromagnétiques et ferrimagnétiques sont à l'origine de moments assez importants pour présenter un intérêt technologique.

L'agitation thermique tend à détruire l'ordre pour augmenter l'entropie, mais dans l'énergie interne d'un matériau magnétique, il existe une contribution d'origine électronique qu'on appelle l'énergie d'échange, qui impose pratiquement l'arrangement directionnel des moments.

Dans les cours de physique sur l'état de la matière, on explique que le gaz parfait est constitué par une population de particules indépendantes en désordre parfait. Seuls les gaz dilués se comportent comme le gaz parfait. Quand on rapproche les atomes, ils interagissent et vont jusqu'à former des solides c'est-à-dire des arrangements presque parfaitement ordonnés. Il en va de même en magnétisme. Le comportement paramagnétique assez peu répandu (équivalent au gaz parfait) reste limité aux systèmes dilués. Dans les solides où les interactions entre atomes voisins sont très intenses, la structure électronique favorise à la fois l'arrangement géométrique des atomes et l'arrangement directionnel des moments. L'analogie peut être encore poussée plus loin. Quand on augmente la température, face à une agitation thermique croissante, il arrive un moment qu'on appelle la température de fusion où l'ordre géométrique du cristal s'effondre brutalement. Il en va de même pour l'ordre directionnel des moments magnétiques à la température de Curie.

*Tous les moments atomiques dans un matériau ferromagnétique tendent à s'aligner spontanément sous l'effet de forces d'échange d'une amplitude considérable. A  $T = 0\text{°K}$  l'alignement est parfait et l'aimantation maximale  $J_0$ . Par températures constantes, l'aimantation à saturation locale  $J_S(T)$  décroît, d'abord très lentement, puis de plus en plus vite pour s'annuler au point de Curie ( $T = T_c$ ). Cette aimantation  $J_S(T)$  est une caractéristique importante du matériau, dépendante de sa structure électronique et insensible à l'application d'un champ extérieur.*