

LES MATERIAUX DIELECTRIQUES EN ELECTROTECHNIQUE « COMPORTEMENT AUX FAIBLES CHAMPS ELECTRIQUES »

CHAPITRE I : LA POLARISATION DES DIELECTRIQUES

- I. 1 Mise en évidence de la polarisation des diélectriques
- I. 2 Moment dipolaire
- I. 3 Potentiel d'un dipôle
- I. 4 Polarisation des diélectriques
- I. 5 Généralisation du théorème de Gauss
- I. 6 Conditions aux limites de deux diélectriques
- I. 7 Applications
 - I. 7. 1 Interface conducteur-isolant
 - I. 7. 2 Condensateur plan
 - I. 7. 3 Condensateur cylindrique (câble coaxial)

CHAPITRE II : LES DIFFERENTS TYPES DE POLARISATION

- II. 1 La polarisation électronique
- II. 2 La polarisation ionique
- II. 3 La polarisation dipolaire ou d'orientation
- II. 4 Le champ local
- II. 5 Relation de Clausius-Mossotti

CHAPITRE III : COURANTS DE CONDUCTION ET DE DEPLACEMENT DANS UN ISOLANT

- III. 1 Loi d'Ohm
- III. 2 Equation de continuité
- III. 3 Relation entre résistance et capacité
- III. 4 Courant de déplacement
- III. 5 Phénomène de relaxation de charges
- III. 6 La conduction des isolants

CHAPITRE IV : COURANTS D'ABSORPTION ET DE RESORPTION DANS LES ISOLANTS

- IV. 1 Courant d'absorption et courant de résorption dans un isolant
- IV. 2 Courant d'absorption réversible
- IV. 3 Courant d'absorption
 - IV. 3. 1 Calcul de $P(t)$ après l'application d'une impulsion de tension E_0
 - IV. 3. 2 Détermination de la fonction $\phi(t)$

IV. 4 Polarisation interfaciale

IV. 4. 1 Hypothèses de base

IV. 4. 2 Exemple simple

IV. 5 Applications

**CHAPITRE V : REPONSE EN FREQUENCE ET PERTES DIELECTRIQUES
DANS LES ISOLANTS**

V. 1 La réponse en fréquence

V. 2 Les pertes diélectriques

V. 3 Circuit équivalent

CHAPITRE I : LA POLARISATION DES DIELECTRIQUES

Diélectrique : C'est une substance dont la propriété électromagnétique fondamentale est d'être polarisable par un champ électrique.

Isolant : C'est une substance qui a une conductivité suffisamment faible pour être utilisée afin de séparer des pièces conductrices portées à des potentiels différents.

On peut considérer synonyme les mots isolant et diélectrique. On réserve le nom de diélectrique aux substances polarisables.

Parmi les milieux isolants on peut citer le vide caractérisé par la constante :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} = 8,854 \times 10^{-12} \text{ (F/m)}$$

ϵ_0 est souvent appelée permittivité du vide, en réalité la permittivité est une propriété électrique caractéristique d'un milieu constitué d'atomes et de molécules et qu'elle traduit l'état de polarisation d'un diélectrique.

I. 1 Mise en évidence de la polarisation des diélectriques

Soit un condensateur formé par deux armatures planes, parallèles, séparées par une distance d et soumises à une différence de potentiels U , figure I. 1.

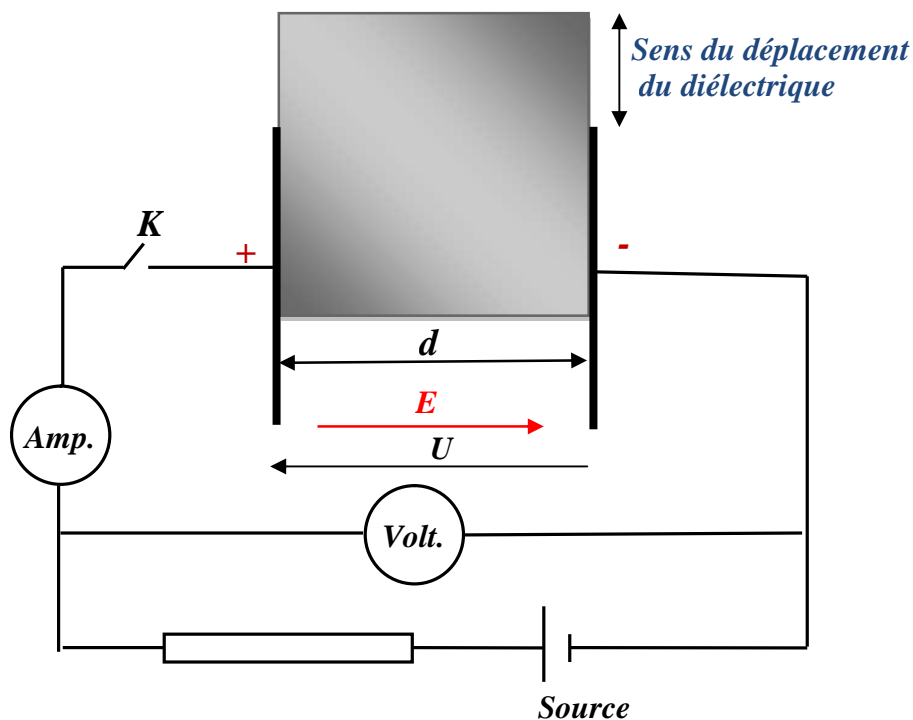


Figure I. 1 : Mise en évidence de charges de polarisation

Lorsqu'on introduit un isolant entre les armatures du condensateur, on note la présence d'un courant de courte durée qui disparaît dès que cesse le déplacement de l'isolant. Lorsque ce dernier est retiré, on constate à nouveau la circulation d'un courant mais de sens inverse.

Il faut admettre que sous l'action du champ électrique, des charges électriques apparaissent sur l'isolant, elles compensent en partie l'action des charges que portent les armatures du condensateur. Pour que la tension entre les armatures reste inchangée, la source doit fournir les charges complémentaires égales aux charges produites sur le diélectrique. Ceci explique la circulation d'un courant, qui traduit l'apparition de charges de polarisation.

Il est impossible de séparer les charges de polarisation, ces dernières ne peuvent se déplacer que dans les limites d'une seule molécule.

Le phénomène de polarisation est caractérisé par l'apparition d'une mince couche de charges négatives sur une face du matériau et d'une mince couche de charge positives sur l'autre face. Par contre, à l'intérieur du diélectrique, il y a généralement compensation des charges de polarisation.

On constate également qu'après l'introduction du diélectrique entre les armatures du condensateur, la capacité du système augmente. Si C_0 est la capacité du condensateur placé dans le vide et C celle mesurée après l'introduction du matériau, on trouve :

$$\frac{C}{C_0} = \epsilon_r \quad I.1$$

ϵ_r est la **permittivité relative**, elle est souvent appelée **constante diélectrique**, c'est une caractéristique du diélectrique.

La permittivité ϵ est définie par la relation :

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad I.2$$

Valeurs typiques de ϵ_r :

Air	1,000536	20 °C, 1 atm
SF ₆	1,002084	20 °C, 1 atm
Huiles minérales	2,2	25 °C
Polychlorobiphényles	4,5 - 4,7	25 °C
Polyéthylène	2,3	25 °C
Polypropylène	2,2	25 °C
Verre	4,0 - 7,5	25 °C
Mica	6 - 11	25 °C
Résines époxydes	3,0 - 4,5	
Cellulose (Papier Kraft)	5,9	fibre
Eau	81,0	25 °C

Il faut admettre que sous l'action du champ électrique entre les armatures du condensateur les charges présentes dans le diélectrique se répartissent de telle sorte que leur action à distance ne soit pas nulle en moyenne. Il apparaît des dipôles après la séparation de charges positives et négatives. Si les molécules présentent déjà un caractère dipolaire, elles s'orientent dans le champ électrique.

I. 2 Moment dipolaire

Pour une charge ponctuelle q placée au point de coordonnées \mathbf{r} , le moment électrique par rapport à l'origine $\mathbf{0}$ s'écrit : $q \times \mathbf{r}$, et pour N charges ponctuelles, le moment électrique \mathbf{p} est défini par la relation :

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{i=N} q_i \times \mathbf{r}_i$$

Si $\sum_{i=1}^{i=N} q_i = 0$, le moment électrique est indépendant du choix de l'origine : la charge positive totale du système est égale à la charge négative totale. Dans ce cas :

$$\mathbf{p} = Q \times \mathbf{l} \quad \text{I.3}$$

Le moment électrique ne dépend que de la distance \mathbf{l} reliant les barycentres des charges positives et négatives avec : $\sum q_i^+ = +Q$ et $\sum q_i^- = -Q$

$Q \times \mathbf{l}$ s'appelle également le **moment dipolaire** du système.

I. 3 Potentiel d'un dipôle

Dans le système $\mathbf{0}, x, y, z$, plaçons une charge $+q$ au point $z = l/2$ et la charge $-q$ au point $z = -l/2$ (figure I. 2). Le potentiel V_p au point \mathbf{A} se calcule facilement et le milieu considéré est le vide.

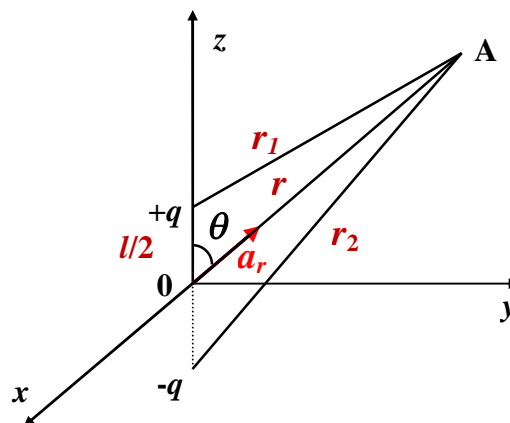


Figure I. 2 : Potentiel d'un dipôle

$$V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Si $r \gg l$ on obtient :

$$V_A = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{pa_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad I.4$$

I. 4 Polarisation des diélectriques

Considérons le cas d'un diélectrique non polaire. Si on le soumet à l'action d'un champ électrique, les centres des charges positives et négatives ne vont plus coïncider, chaque atome ou molécule se déforme et peut être assimilé à un dipôle dont le moment électrique est :

$$p = q \cdot dl$$

D'un point de vue macroscopique, pour un volume Δv et si N est le nombre d'atomes ou molécules par unité de volume, alors :

$$\sum_{i=1}^{N \cdot \Delta v} p_i = N p \Delta v = P \Delta v$$

P est le moment dipolaire par unité de volume, il est également appelé **polarisation** du diélectrique.

Si $\Delta v \rightarrow 0$, alors :

$$P = \frac{dp}{dv} \quad I.5$$

Dans un diélectrique de volume fini v , la polarisation P est non uniforme (figure I. 3). Au point $\mathbf{A}(x,y,z)$, le moment dipolaire dû aux charges séparées qui sont présentes dans le volume élémentaire dv s'écrit :

$$dp = P dv$$

et le potentiel au point $\mathbf{B}(x',y',z')$ situé hors du diélectrique se calcule comme suit :

$$dV_B = \frac{dp \cdot a_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P \cdot a_r \cdot dv}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dv$$

et pour l'ensemble du diélectrique :

$$V_B = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v P \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dv$$

Si les dérivées sont prises par rapport aux coordonnées de \mathbf{A} , cette équation devient :

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v P \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dv$$

En tenant compte de la relation vectorielle :

$$\nabla \left(\frac{P}{r} \right) = \frac{1}{r} \nabla \cdot P + P \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

alors :

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \left[\nabla \left(\frac{P}{r} \right) - \frac{\nabla \cdot P}{r} \right] dv$$

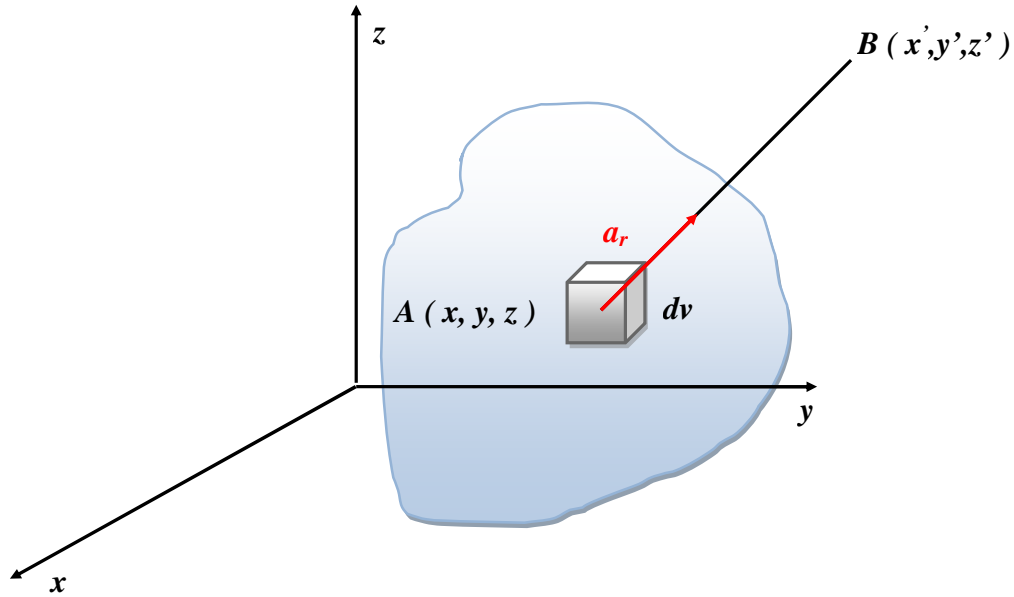


Figure I. 3 : Potentiel crée par un diélectrique polarisé

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky, on obtient :

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{P \cdot ds}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{-\nabla \cdot P dv}{r}$$

S est la surface délimitant le volume v du diélectrique. En posant :

$$\sigma_p = P \cdot a_n \quad \text{et} \quad \rho_p = -\nabla \cdot P \quad I.6$$

On obtient :

$$V_B = \oint_S \frac{\sigma_p \cdot ds}{4\pi\epsilon_0 r} + \iiint_v \frac{\rho_p \cdot dv}{4\pi\epsilon_0 r} \quad I.7$$

Cette formule montre que les dipôles contenus dans le volume v produisent à l'extérieur de ce volume le même potentiel et par suite le même champ qu'une distribution fictive de charges qui seraient réparties dans le volume v et sur la surface S du diélectrique avec des densités ρ_p et σ_p . Ces charges sont liées et doivent être distinguées des charges libres.

En l'absence de charges libres, le diélectrique est électriquement neutre, autrement dit la somme de toutes les charges de polarisation est nulle. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \oint_S \sigma_p \cdot ds + \iiint_v \rho_p \cdot dv &= 0 \\ \oint_S P \cdot ds + \iiint_v -(\nabla \cdot P) \cdot dv &= 0 \quad I.8 \end{aligned}$$

I. 5 Généralisation du théorème de Gauss

Pour des charges libres placées dans le vide, le théorème de Gauss peut s'écrire :

$$\oint_S \epsilon_0 E \cdot ds = \iiint_v \rho \cdot dv \quad \text{et} \quad D = \epsilon_0 \cdot E$$

ρ est la densité de charges libres présentes dans le volume délimité par une surface S .

Si on introduit un diélectrique dans ce volume, il faut tenir compte également des charges dues au phénomène de polarisation. On a :

$$\oiint_S \varepsilon_0 E \cdot ds = \iiint_v (\rho + \rho_P) \cdot dv = \iiint_v \rho \cdot dv + \iiint_v \rho_P \cdot dv$$

avec ρ_P , la densité volumique des charges liées dues à la polarisation.

$$\oiint_S \varepsilon_0 E \cdot ds = \iiint_v \rho \cdot dv + \iiint_v -(\nabla \cdot P) \cdot dv = \iiint_v \rho \cdot dv - \oiint_S P \cdot ds$$

$$\oiint_S (\varepsilon_0 \cdot E + P) \cdot ds = \iiint_v \rho \cdot dv$$

Ceci montre que l'induction D dans le diélectrique satisfait à la relation :

$$D = \varepsilon_0 \cdot E + P \quad I.9$$

La plupart des diélectriques ou isolants utilisés en électrotechnique sont homogènes, linéaires et isotropes. Dans ce cas, il existe une relation simple entre P et E (voir figure I. 4).

$$P = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot E \quad I.10$$

La constante χ_e est appelée susceptibilité électrique. Alors, on a également :

$$D = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \cdot E$$

et en posant : $1 + \chi_e = \varepsilon_r$ et $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r = \varepsilon$

on obtient :

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E \quad ; \quad D = \varepsilon \cdot E$$

ε_r est la permittivité relative et ε la permittivité. P s'écrit aussi :

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \cdot E \quad I.11$$

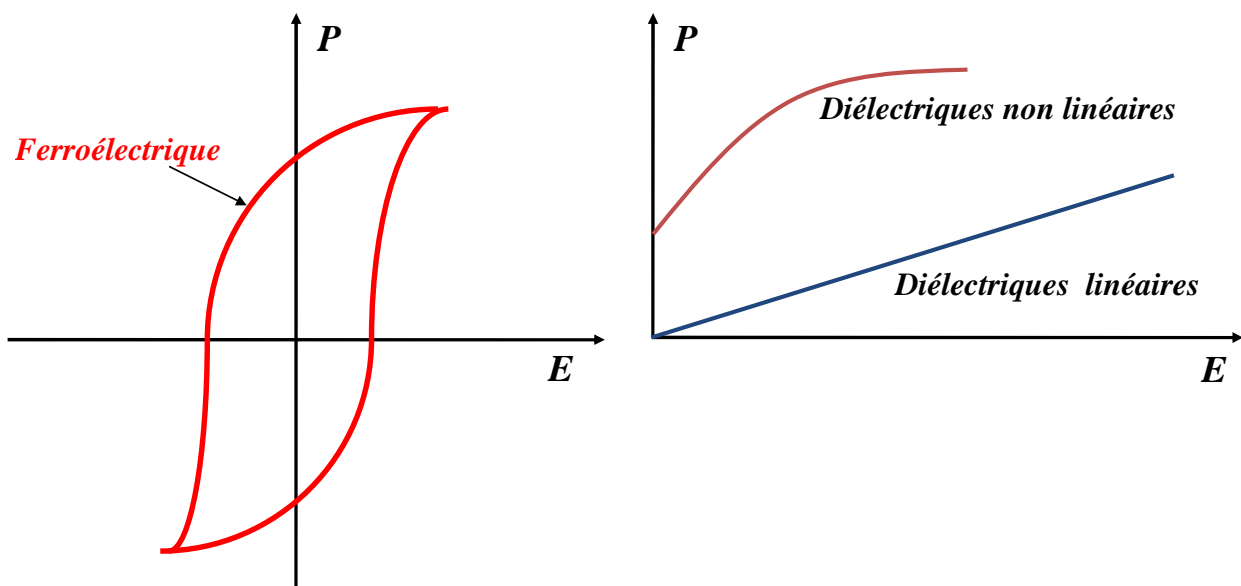


Figure I. 4 : Diélectriques linéaires et diélectriques non linéaires

I. 6 Conditions aux limites de deux diélectriques

Disposons à l'interface de deux diélectriques un petit cylindre (figure I. 5). Sur la surface ΔS délimitée par le cylindre, plaçons une charge libre de densité σ .

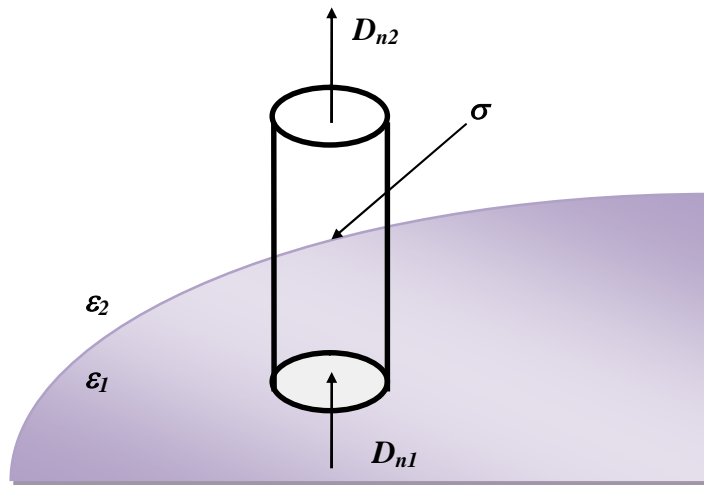


Figure I. 5 : Conditions aux limites de deux milieux diélectriques

En appliquant le théorème de Gauss, on établit la relation :

$$(D_{n2} - D_{n1}) \cdot \Delta S = \sigma \cdot \Delta S$$

D_{n1} et D_{n2} sont les composantes normales de l'induction dans les milieux de permittivités ϵ_1 et ϵ_2 d'où :

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad I. 12$$

et si : $\sigma = 0$, on obtient la relation importante.

$$\epsilon_1 \cdot E_{n1} = \epsilon_2 \cdot E_{n2} \quad I. 13$$

On peut montrer également que les composantes tangentielles du champ électrique E_{t1} et E_{t2} sont continues :

$$E_{t2} = E_{t1}$$

I. 7 Applications

I. 7. 1 Interface conducteur-isolant

Dans le conducteur E et D sont nuls. Par conséquent, il en est de même pour les composantes tangentielles de E et D dans les diélectriques.

S'il existe à l'interface des charges superficielles de densité σ , la relation I. 12 donne :

$$D = D_n \quad \text{et} \quad E = E_n = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

I. 7. 2 Condensateur plan

On soumet deux armatures métalliques situées à la distance d à une différence de potentiel U qui est maintenue constante, figure I. 6.

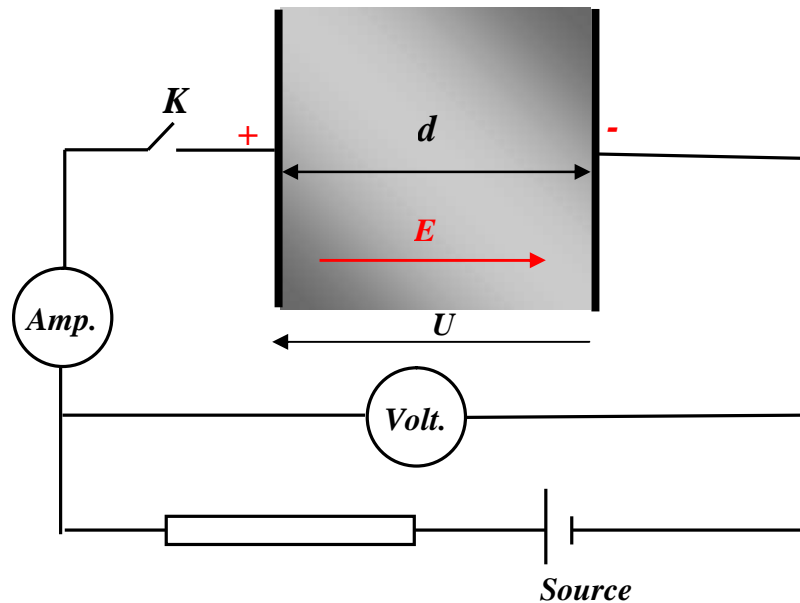


Figure I. 6 : Condensateur plan.

En supposant le champ homogène entre les armatures, il s'exprime simplement par la relation :

$$E = \frac{U}{d}$$

Si les armatures sont dans le vide :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

En introduisant un diélectrique de permittivité ϵ et d'épaisseur d entre les armatures, figure I. 6 :

$$E = \frac{\sigma'}{\epsilon}$$

D'où :

$$\sigma' = \epsilon_r \cdot \sigma$$

On déduit facilement que :

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0}$$

$$\sigma_p = \pm(\sigma' - \sigma)$$

Si le diélectrique a une épaisseur d_1 inférieure à d (figure I. 7), calculons la répartition des contraintes sur le matériau E_i et sur le vide E_0 (épaisseur d_2).

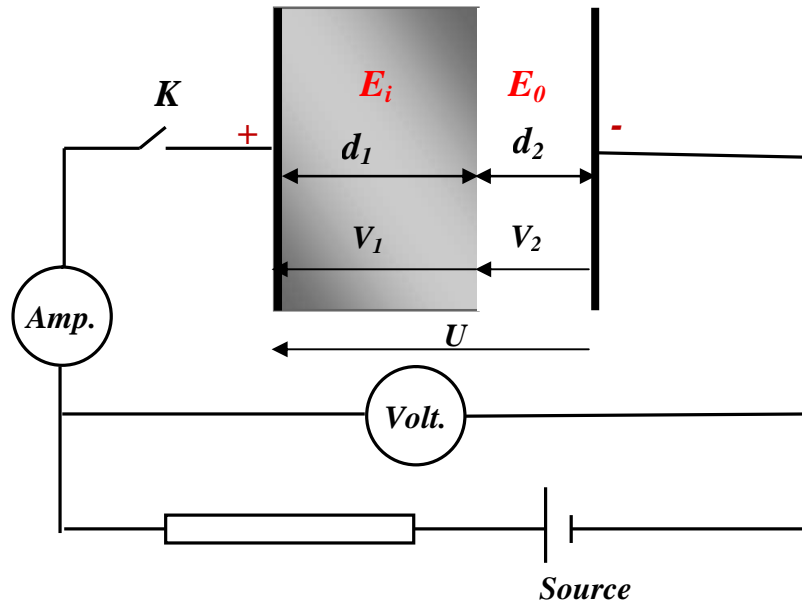


Figure I. 7: Condensateur plan à double couche du diélectrique.

A l'interface diélectrique – vide, en supposant qu'il n'y a pas de charges libres présentes, on a d'après les relations I. 12 et I. 13 :

$$D_0 = D_i$$

d'où :

$$\varepsilon_0 \cdot E_0 = \varepsilon \cdot E_i$$

D'autre part, il existe la relation :

$$V_1 + V_2 = E_i \cdot d_1 + E_0 \cdot d_2 = U$$

d'où :

$$E_i = \frac{U}{d_1 + \varepsilon_r \cdot d_2} \quad \text{et} \quad E_0 = \frac{U \cdot \varepsilon_r}{d_1 + \varepsilon_r \cdot d_2} \quad \text{I. 14}$$

C'est le milieu dont la permittivité est la plus élevée qui est le moins contraint par le champ.

I. 7.3 Condensateur cylindrique (câble coaxial)

On prend, comme exemple, un câble dont les rayons du conducteur et de l'écran sont respectivement r_0 et R , figure I. 8.

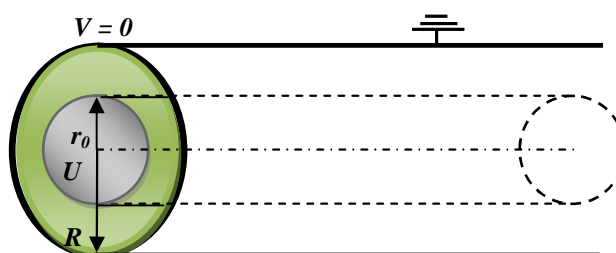


Figure I. 8 : Câble coaxial (condensateur cylindrique)

Le milieu entre les conducteurs est régie par l'équation de Laplace. Si le câble est supposé de longueur infinie, le potentiel V à une distance r s'écrit :

$$\nabla^2 V = \Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

$$r \frac{dV}{dr} = K$$

K est une constante d'intégration et le champ électrique est donné par la relation :

$$E = - \frac{dV}{dr}$$

Si le potentiel sur l'écran est $V = 0$ et $V = U$ est celui du conducteur, alors :

$$E = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{R}{r_0}}$$

En appelant E_{max} et E_{min} les champs maximum et minimum, on obtient aisément les relations suivantes :

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{R}{r_0}$$

$$E \cdot r = \text{constante}$$

L'épaisseur de l'isolant peut être calculée en fonction de E_{max} :

$$R - r_0 = r_0 \left[e^{\left(\frac{U}{r_0 \cdot E_{max}} \right)} - 1 \right]$$

De même,

$$E_{max} = \frac{U}{r_0 \cdot \ln \frac{R}{r_0}}$$

présente un minimum, en considérant r_0 comme une variable, si r_0 et R satisfont à la relation :

$$\frac{R}{r_0} = e = 2,718$$

Dans ce cas :

$$R - r_0 = 1,718 \times r_0$$

et le champ sur le conducteur s'écrit :

$$E_0 = \frac{U}{r_0}$$

Pour réduire la différence entre E_{max} et E_{min} , et donc utiliser les possibilités du diélectrique, on utilise un diélectrique constitué par des couches de matériaux dont les permittivités sont différentes.

En effet :

$$- \frac{dV}{dr} = E = \frac{D}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{q}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r}$$

q est la charge par unité de longueur du conducteur.

En intégrant, on trouve que :

$$U = \frac{q}{2\pi \cdot \epsilon_0} \int_{r_0}^R \frac{dr}{\epsilon_r \cdot r}$$

et donc :

$$E = \frac{U}{\epsilon_r \cdot r \int_{r_0}^R \frac{dr}{\epsilon_r \cdot r}} \quad I.15$$

Si la relation $\epsilon_r \cdot r = \text{constante}$ est satisfaite, alors :

$$E = \frac{U}{R - r_0}$$

Ceci correspond à la meilleure utilisation du diélectrique.

CHAPITRE II : LES DIFFERENTS TYPES DE POLARISATION

Dans un diélectrique polarisé, on peut penser également qu'il existe un champ électrique local E_l ; il induit un moment dipolaire p au niveau de chaque molécule :

$$p = \alpha \cdot E_l$$

α est une constante représentant la polarisabilité de la molécule.

La polarisation P est reliée au nombre de molécules par unité de volume N (voir relation I. 5) :

$$P = N \cdot \alpha \cdot E_l \quad \text{II. 1}$$

Dans le chapitre précédent, on a divisé les diélectriques en deux groupes selon qu'ils sont constitués de molécules polaires ou non.

Si les molécules possèdent un centre de symétrie, les barycentres des charges positives et négatives sont confondues en l'absence de champ extérieur. Ces molécules sont dites non polaires.

Exemples :

- des gaz : He, Ar, H₂, N₂
- des composés chimiques : CH₄, CCl₄
- une macromolécule : [-CH₂-CH₂-]

Par contre, d'autres molécules, dépourvues de centre de symétrie, présentent un moment électrique permanent, elles sont dites polaires. Exemple :

- des composés chimiques : HF, HCl, HBr, HI, CClH₃
- une macromolécule : [-CHCl-CHCl-] (polychlorure de vinyle)

Compte tenu de cette division des diélectriques en deux groupes, on conçoit que, sous l'action d'un champ électrique, les molécules vont se polariser selon des mécanismes différents. Très schématiquement, on peut envisager des déformations du nuage électronique des atomes constituant les molécules, des déplacements relatifs de charges positives et négatives dans un solide ionique, des orientations de molécules polaires. Chacun de ces types de polarisation est caractérisé par un coefficient α .

II. 1 La polarisation électronique

Le déplacement des électrons par rapport au noyau d'un atome fait apparaître une polarisation dont le temps d'établissement est très court ($\sim 10^{-15}$ s) :

$$P = N \cdot \alpha_e \cdot E_l$$

α_e est une constante dépendant du rayon r de l'atome ($\alpha_e = 4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3$).

Pour un diélectrique neutre ou pratiquement non polaire, présentant ce type de polarisation, la relation de Maxwell $n = \sqrt{\epsilon_r}$ entre l'indice de réfraction et la permittivité est vérifiée.

II. 2 La polarisation ionique

Il se produit un déplacement mutuel des ions constituant la molécule dans un temps de l'ordre de 10^{-13} s à 10^{-12} s. la relation de Maxwell n'est pas satisfaite. On a également :

$$P = N. \alpha_i. E_l$$

Ces deux types de polarisation par déformation ne sont pratiquement pas affectés par la température. Dans la limite de la précision des mesures, on peut considérer qu'ils ne sont pas liés à une dissipation irréversible d'énergie. Par conséquent, ils ne donnent pas lieu à des pertes diélectriques.

II. 3 La polarisation dipolaire ou d'orientation

Ce type de polarisation est étudiée par Debye, elle consiste dans l'orientation de molécules dipolaires sous l'action du champ électrique. Elle dépend de la température et apparaît dans les gaz, les liquides et les corps amorphes très visqueux.

Ce type de polarisation provoque une dissipation d'énergie pendant la relaxation des dipôles. Par exemple, sous l'influence d'un champ alternatif, il apparaît des pertes diélectriques.

Le temps de relaxation d'un dipôle tournant dans un liquide de viscosité η a été calculé par Debye :

$$\tau = 4\pi. \frac{\eta. r^3}{kT} = \frac{3. \eta. v}{kT}$$

r est le rayon de la molécule

k est la constante de Boltzmann

v est le volume de la molécule

La polarisation P a été calculée par Langevin et Debye :

$$P = N. \alpha_d. E_l$$

Avec :

$$\alpha_d = \frac{p^2}{3. kT}$$

p est le moment dipolaire de la molécule.

Sur la figure II. 1 on a représenté l'évolution de la polarisation molaire en fonction de la fréquence.

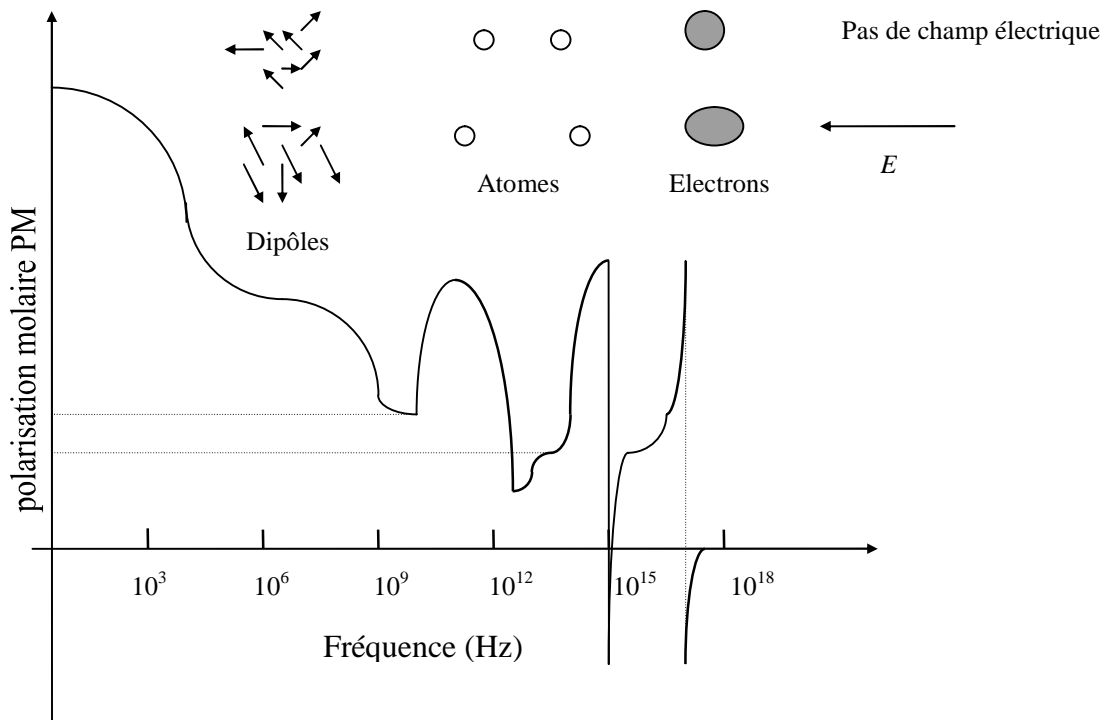


Figure II. 1 : Représentation schématique de la polarisation

II. 4 Le champ local

Le champ local E_l agissant sur une entité polarisable telle qu'une molécule ou un atome peut être considéré comme la somme de deux composantes :

$$E_l = E + \sum E_D$$

E est le champ électrique appliqué aux électrodes et $\sum E_D$ est la contribution des dipôles entourant le point considéré du diélectrique. Une évaluation de E_l a été faite par Lorenz.

Décrivons une sphère de rayon r dans l'isolant autour de la molécule située au point considéré qui est choisi comme centre, figure II. 2.

On appelle E_l le champ dû à l'action des molécules (dipôles) situées sur la paroi interne de la cavité et E_2 celui dû aux molécules (dipôles) situées dans la sphère :

$$E_l = E + E_1 + E_2$$

Pour évaluer E_l , il faut tenir compte des charges apparentes présentes au niveau de la cavité, soit $P \cdot \cos \theta$ par unité d'aire (voir figure II. 2) :

$$E_1 = \int_0^\pi \frac{2\pi \cdot r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot P \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{P}{3\epsilon_0}$$

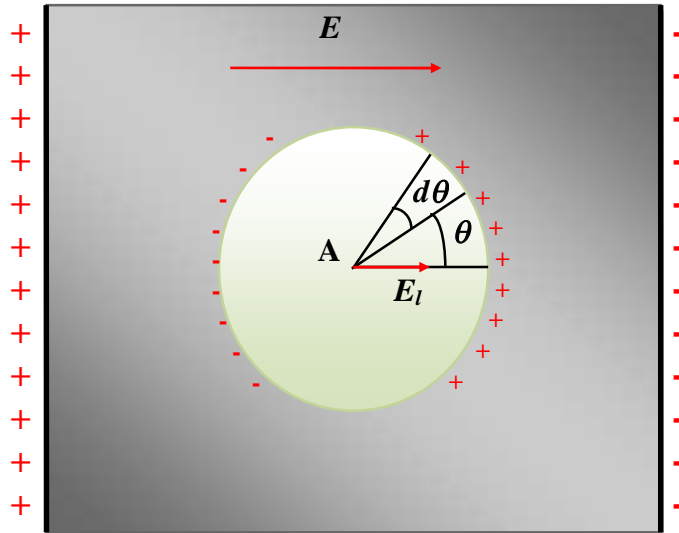


Figure II 2 : Calcul du champ locale par le model de Lorentz

Pour des raisons de symétrie, on peut admettre que $E_2 = 0$, alors :

$$E_l = E + \frac{P}{3\epsilon_0} \quad II.2$$

Cette relation permet de calculer la susceptibilité électrique χ_e du diélectrique. En effet :

$$P = N \cdot \alpha \cdot E_l$$

$$P = N \cdot \alpha \cdot \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

et

$$P = \frac{N \cdot \alpha}{1 - \frac{N \cdot \alpha}{3\epsilon_0}} \cdot E$$

et comme

$$P = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot E$$

On obtient :

$$\chi_e = \frac{\frac{N \cdot \alpha}{\epsilon_0}}{1 - \frac{N \cdot \alpha}{3\epsilon_0}} \quad II.3$$

II. 5 Relation de Clausius-Mossotti

Si l'on tient compte de la relation I. 11 :

$$P = \epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot E$$

on obtient :

$$E_l = \frac{(\epsilon_r + 2) \cdot E}{3}$$

On établit facilement la relation de Clausius-Mossotti :

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N \cdot \alpha}{3\epsilon_0} \quad II.4$$

En introduisant M (le poids moléculaire), ρ (la densité) et N_A (le nombre d'Avogadro), cette expression s'exprime sous une autre forme :

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \cdot \frac{M}{\rho} = \frac{N_A \cdot \alpha}{3\epsilon_0}$$

$N_A \cdot \alpha / 3\epsilon_0$ est appelée polarisation molaire P_M .

Lorsque $\epsilon_r = n^2$, il est possible de calculer aisément la polarisation molaire P_M à partir de :

$$R_M = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{M}{\rho} = \frac{N_A \cdot \alpha}{3\epsilon_0}$$

appelée aussi réfraction molaire.

Cette expression n'est pas valable pour des molécules dipolaires capables de s'orienter dans un champ électrique.

La constante α_d reflétant la constitution de dipôles a été calculée :

$$\alpha_d = \frac{p^2}{3kT}$$

Pour des molécules polaires, on peut utiliser la relation :

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \cdot \frac{M}{\rho} = \frac{N_A}{3\epsilon_0} \left(\alpha_e + \frac{\mu^2}{3kT} \right) \quad II.5$$

CHAPITRE III : ETUDE DES COURANTS DE CONDUCTION ET DE DEPLACEMENT DANS UN ISOLANT

Quand des charges électriques se déplacent sous l'action d'un champ électrique, il s'établit un courant I , par définition :

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

ΔQ est la quantité de charges qui traversent une surface S pendant le temps Δt .

Au point P , considérons une surface dS et supposons que les charges dQ , traversant dS , ont une vitesse u dans la même direction (figure III. 1a). Si ρ est la densité volumique des charges, on peut établir facilement la relation :

$$dQ = \rho \cdot u \cdot dt \cdot dS$$

et

$$dI = \frac{dQ}{dt} = \rho \cdot u \cdot dS = J \cdot dS$$

En posant :

$$J = \rho \cdot u \quad \text{III. 1}$$

J est la densité de courant.

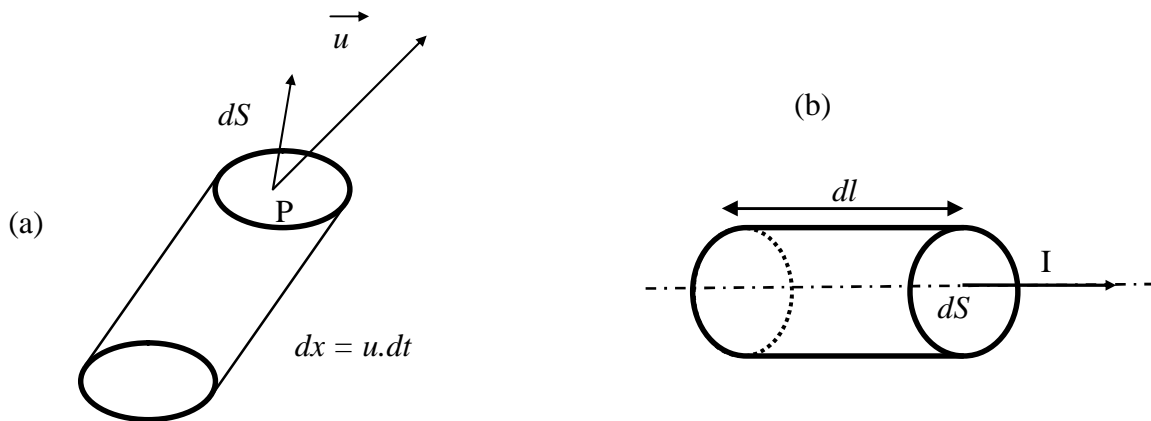


Figure III. 1 : Élément dl d'un conducteur parcouru par un courant I .

Le courant de conduction résulte du mouvement des charges qui se déplacent, sur de grandes distances, jusqu'aux armatures permettant d'appliquer une différence de potentiel au diélectrique.

III. 1 Loi d'Ohm

Soit un volume élémentaire du diélectrique $dV = dS \cdot dl$ soumis à une différence de potentiel $-dV$ (figure III. 1b). Calculons l'intensité du courant correspondant :

$$dI = J \cdot dS$$

et :

$$-dV = I \cdot dR = J \cdot dS \cdot \frac{dl}{\sigma \cdot dS}$$

σ est la conductivité du diélectrique. On obtient J :

$$J = -\frac{dV}{dl} \cdot \sigma = \sigma \cdot E$$

$$J = \sigma \cdot E \quad \text{III.2}$$

E est la composante du champ électrique dans l'axe du tube.

Soumis à des champs électriques faibles, la plupart des isolants utilisés en électrotechnique présentent une conductivité ohmique.

III. 2 Equation de continuité

Considérons à l'intérieur d'un conducteur parcouru par un courant une surface fermée S . Comme les charges ne peuvent ni disparaître, ni être créées, le principe de conservation exige que :

$$\oiint_S J \cdot dS = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_v \rho \cdot dv = \iiint_v \frac{d\rho}{dt} dv$$

En utilisant la formule de la divergence, on obtient :

$$\iiint_v \nabla \cdot J \cdot dv = -\iiint_v \frac{d\rho}{dt} \cdot dv$$

$$\nabla \cdot J = -\frac{d\rho}{dt}$$

$$\nabla \cdot J + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{III.3}$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de continuité du courant.

III. 3 Relation entre résistance et capacité

On montre aisément que le produit de la capacité C par la résistance volumique R d'un condensateur ne dépend pas de ses dimensions géométriques, mais seulement des propriétés du diélectrique. On a en effet :

$$C \cdot R = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad \text{III.4}$$

III. 4 Courant de déplacement

Dans un diélectrique, l'équation de Maxwell – Gauss se traduit par la relation :

$$\nabla \cdot D = \rho$$

ρ est la densité volumique de charges.

Si le champ électrique dépend du temps, la relation précédente devient :

$$\nabla \cdot \frac{dD}{dt} = \frac{d\rho}{dt}$$

et en tenant compte de l'équation de continuité (relation III. 3), on obtient :

$$\nabla \cdot \left(J + \frac{dD}{dt} \right) = 0$$

d'où :

$$\oiint_S \left(J + \frac{dD}{dt} \right) \cdot dS = 0$$

$\frac{\partial D}{\partial t}$ a les dimensions d'une densité de courant, c'est le courant de déplacement J_D :

$$J_D = \frac{dD}{dt}$$

D'après Maxwell, toute variation du champ électrique doit provoquer l'apparition d'un champ magnétique rotationnel. Ceci entraîne nécessairement la présence d'un courant électrique.

Pour un diélectrique qui présente une polarisation P , l'induction est donnée par la relation I. 9 :

$$D = \varepsilon_0 \cdot E + P$$

Dans ce cas, le courant de déplacement s'écrit :

$$J_D = \varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt} + \frac{dP}{dt} \quad \text{III.5}$$

avec :

$$\varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt} \text{ la densité du courant de déplacement dans le vide}$$

$$\frac{dP}{dt} \text{ la densité du courant de polarisation}$$

Remarque

Soit un condensateur plan de capacité C où le diélectrique est par exemple du vide :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}$$

qui est soumis à la tension :

$$V = V_0 \cdot e^{j\omega t}$$

Calculons le courant de charge ou courant capacitif I_C :

$$I_C = C \frac{dV}{dt} = j\omega CV$$

et le courant de déplacement I_0 dans le vide est à savoir :

$$I_0 = J_0 \cdot S = \frac{dD}{dt} \cdot S = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \cdot S$$

sachant que :

$$E = \frac{V}{d}$$

on en déduit :

$$I_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt} \cdot S = \frac{\varepsilon_0}{d} \cdot S \cdot \frac{dV}{dt} = C \frac{dV}{dt} = j\omega CV = I_C$$
$$I_C = I_D$$

Cette relation montre bien qu'il y a continuité du courant à travers le condensateur.

III. 5 Phénomène de relaxation de charges

Un isolant est chargé à l'aide d'une haute tension et supposant que ce matériau (de permittivité ε) reste fixe. On peut observer que la densité de charge ρ diminue plus ou moins lentement.

D'après :

- l'équation de la continuité du courant :

$$\nabla \cdot J = -\frac{d\rho}{dt}$$

- de la loi d'Ohm locale :

$$J = \sigma \cdot E$$

- de la troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \rho = 0$$

La solution de cette équation est :

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{avec} \quad T = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad \text{III.6}$$

où :

ρ_0 (C/m³) est la densité de charge initiale au temps $t = 0$

T (s) est la constante de temps de relaxation des charges

Si nous examinons le cas du cuivre et du mica, on peut calculer :

$$T_{cu} = \varepsilon / \sigma \approx 10^{-19} \text{ s} \quad (\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ S.m} \text{ et } \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})$$

$$T_{mica} = \varepsilon / \sigma = 14 \text{ h} \quad (\sigma = 10^{-15} \text{ S.m} \text{ et } \varepsilon_r = 6)$$

Lorsqu'une substance est placée dans un champ électrique variable de période T_s , elle est considérée :

- comme un conducteur si $T/T_s \leq 1$
- comme isolant si $T/T_s \geq 1$

III. 6 La conduction des isolants

Aux champs faibles, la conduction des isolants présente généralement un caractère ohmique. Pour les gaz et les liquides, il est admis qu'elle est due à la présence d'ions. De même, dans les solides tels que les verres, les céramiques et les polymères le passage du courant électrique est souvent attribué au déplacement d'ions. En ce qui concerne les polymères, de nombreux chercheurs insistent sur le rôle joué par les ions résultants de la dissociation d'impuretés qui ont été introduites dans le matériau lors des opérations de fabrication et de mise en œuvre.

A partir des relations III. 1 et III. 2, on a :

$$\sigma = \sum_i n_i \cdot q_i \cdot \mu_i$$

n_i est le nombre de porteurs de i dont la charge et la mobilité sont respectivement q_i et μ_i .

Dans la plupart des cas, la conductivité σ varie avec la température T de telle façon que :

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{\Delta W}{kT}}$$

ΔW est l'énergie d'activation et k est la constante de Boltzman.

Aux champs élevés, la conduction des isolants perd son caractère ohmique. Pour les isolants gazeux, la croissance exponentielle du courant s'explique essentiellement par le modèle de Townsend. Quant aux liquides, plusieurs théories peuvent rendre compte des courants élevés selon qu'ils sont contaminés ou non par des impuretés. Deux modèles sont les plus utilisés :

- L'effet Onsager ;
- L'effet Fowler-Nordheim.

Le premier dépend de la dissociation d'impuretés dissoutes dans le liquide, le deuxième consiste en une injection d'électrons à partir d'une électrode.

CHAPITRE IV : ETUDE DES COURANTS D'ABSORPTION DANS LES ISOLANTS

IV. 1 Courant d'absorption et courant de résorption dans un isolant

Plaçons une plaque d'isolant solide d'épaisseur d entre deux électrodes métalliques de surface S et appliquons une ddp U constante (K_1 fermé et K_2 ouvert) à ce système constituant un condensateur plan, figure IV. 1.

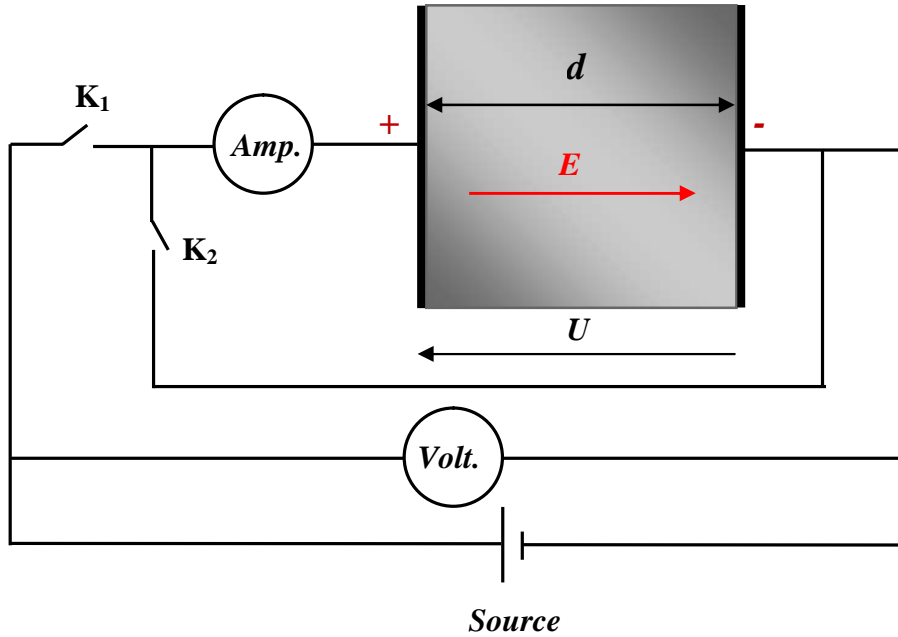


Figure IV. 1 : Charge et décharge d'un condensateur

Si l'on suppose que cet isolant est dépourvu de toute conductibilité, un courant normal de charge i_1 s'écoule dans le circuit et varie avec le temps (courant de charge du condensateur idéal). Il peut être calculé à l'aide de l'équation différentielle suivante :

$$L \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C} = 0$$

L et R étant la self-inductance et la résistance du circuit et $C = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot S/d$ la capacité du condensateur, calculé d'après ses dimensions et la permittivité relative de l'isolant. Compte tenu des petites valeurs de L et R l'opération de charge se termine pratiquement après une fraction de seconde. Mais il n'existe pas d'isolant qui soit entièrement dépourvu de conductibilité. En régime stabilisé, le diélectrique est traversé par un courant de conduction i_c , il est déterminé par la valeur de la ddp U appliquée sur les armatures du condensateur et par les dimensions et la conductibilité spécifique de l'isolant ($i_c = U/R_{isolant}$).

Déchargeons le condensateur par un court-circuit (K_1 ouvert et K_2 fermé). $U = 0$, il n'y a plus de courant de conduction, alors $i_c = 0$. Le courant de décharge i_2 doit suivre les mêmes lois que i_1 pour un isolant normal et $i_1 = i_2$.

En pratique, tous les isolants solides soumis à des champs électriques faibles ne permettant pas l'injection de charges au niveau des électrodes, sont parcourus par des **courants résiduels** ou **anormaux** qui persistent pendant des jours et même des mois qui sont désignés par i'_1 et i'_2 respectivement pour la charge et la décharge (figure IV. 2). On les appelle respectivement **courant d'absorption** et **courant de résorption**. Les courants totaux de charge I_1 et de décharge I_2 sont alors respectivement :

$$I_1 = i_1 + i_c + i'_1$$

$$I_2 = i_2 + i'_2$$

Pour beaucoup d'isolants $i'_1 = i'_2$, c'est à dire que nous avons un courant anormal réversible. On peut avoir en plus un courant anormal irréversible, alors : $i'_2 = 0$, c'est le cas des liquides isolants contaminés.

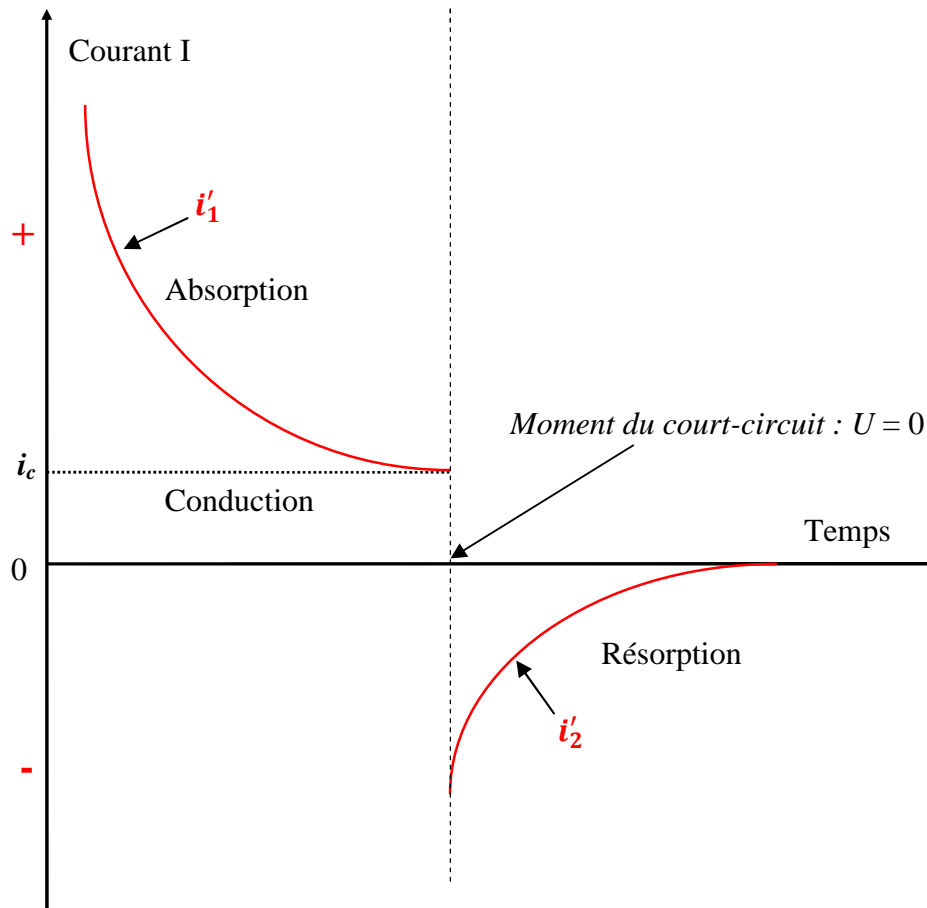


Figure IV. 2 : Formes des courants d'absorption et de résorption dans un isolant

IV. 2 Courant d'absorption réversible

Les premières études systématiques ont été faites par Kohlrausch en 1854, elles reçurent une forte impulsion lors des expériences de J. Hopkinson et J. Curie. Ce dernier (en 1889) a découvert

que la variation en fonction du temps du courant d'absorption réversible peut être exprimé par la formule empirique :

$$i'_1(t) = a \cdot t^{-n} \quad \text{IV.1}$$

a et n sont des constantes.

En changeant la valeur de la tension, la variation du courant en fonction du temps reste la même, mais les valeurs augmentent proportionnellement à la chute de tension. On peut écrire que :

$$i'_1(t) = k \cdot C \cdot V_0 \cdot \phi(t)$$

k est une constante, $\phi(t)$ est une fonction telle que : $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ et C est la capacité.

La température a également une influence marquée sur le courant d'absorption.

IV. 3 Courant d'absorption

Si l'on soumet un isolant à un champ électrique $E(t)$ dépendant du temps, l'induction électrique s'écrit :

$$D(t) = \varepsilon_0 \cdot E(t) + P(t)$$

La réponse est instantanée pour la contribution du vide, c'est-à-dire $\varepsilon_0 \cdot E(t)$. Par contre, la polarisation $P(t)$ ne va s'établir qu'avec un retard plus ou moins long selon la nature du diélectrique.

On définit une fonction $\phi(t)$ pour caractériser la réponse à des contraintes électriques dont les plus utilisées sont obtenues avec :

- l'impulsion de Dirac $\delta(t)$
- l'échelon unité $\gamma(t)$

IV. 3. 1 Calcul de $P(t)$ après l'application d'une impulsion de tension E_0

Étudions la réponse de l'isolant à une impulsion $E_0 \cdot \delta(t)$ sachant que l'impulsion unité $\delta(t)$ est la limite quand $\Delta t \rightarrow 0$ de la fonction :

$$F_{\Delta t}(t) = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \Delta t$$

$$F_{\Delta t}(t) = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{pour } t > \Delta t$$

$$\int_0^{\infty} F(t) \cdot dt = 1$$

et que la réponse à $\delta(t)$ est $\phi(t)$.

Si le champ électrique appliqué tend vers une impulsion de Dirac temporelle $E_0 \cdot \delta(t)$, la polarisation $P(t)$ prend la forme simple :

$$P(t) = \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \Delta t \cdot \phi(t)$$

La réponse $\phi(t)$ est une fonction réelle qui vérifie :

$$\phi(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

Un champ électrique quelconque $E(t)$ peut s'écrire sous la forme d'impulsion de Dirac. Le milieu étant linéaire et le principe de superposition s'applique.

En considérant la figure IV. 3, la réponse à $E(t)$ est de la forme :

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_i P_i(t) = \sum_i \varepsilon_0 \cdot E(u_i) \cdot \phi(t - u_i) \cdot \Delta u \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \cdot E(u) \cdot \phi(t - u) \cdot du = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \cdot E(t - u) \cdot \phi(u) \cdot du \\ P(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \cdot \phi(u) \cdot E(t - u) \cdot du \quad \text{IV. 3} \end{aligned}$$

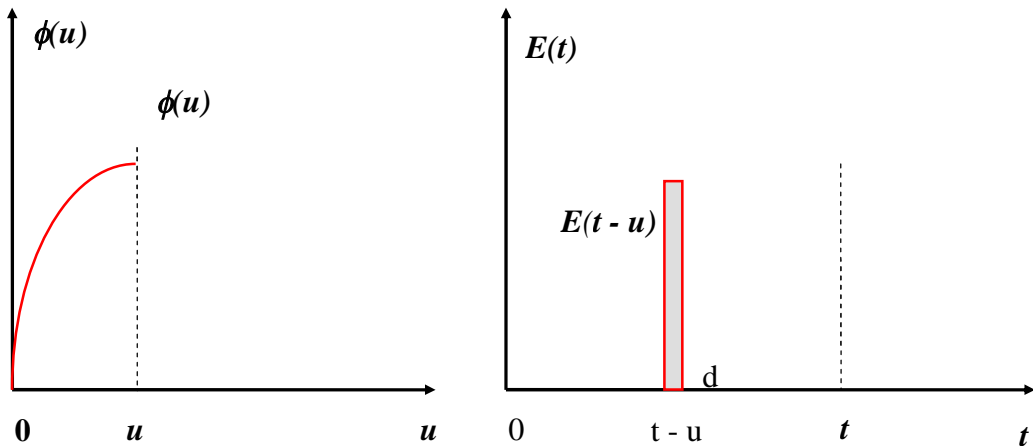


Figure IV. 3 : Réponse temporelle à un échelon de champ E d'un isolant

Le phénomène qui était présent au temps u dans le passé, à partir du temps t pris comme origine se passe effectivement au temps $t - u$.

Compte tenu des propriétés de $\phi(t)$, on a pu étendre le domaine d'intégration à $-\infty$; on note que $P(t)$ est un produit de convolution de fonctions.

IV. 3. 2 Détermination de la fonction $\phi(t)$

La réponse de l'isolant à un échelon de tension E_0 , sachant que l'échelon unité $\gamma(t)$ est défini par les conditions :

$$\gamma(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

$$\gamma(t) = 1 \text{ pour } t > 0$$

se calcule facilement. Puisque E_0 est constant on peut écrire :

$$P(t) = \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \int \phi(u) du$$

et :

$$D(t) = \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \left[\gamma(t) + \int_0^t \phi(u) du \right]$$

La densité du courant d'absorption j'_1 s'écrit d'après l'équation III. 5 :

$$j'_1 = \frac{dD(t)}{dt} = \varepsilon_0 \cdot E_0 [\delta(t) + \phi(t)] + j_c = \varepsilon_0 \cdot E_0 [\delta(t) + \phi(t)] + \sigma_c \cdot E_0 \quad IV. 4$$

On a tenu compte du courant de conduction $j_c = \sigma_c \cdot E_0$

Pratiquement la fonction $\phi(t)$ est obtenue à partir du courant de résorption qui est mesuré après l'application d'un échelon de tension.

En se reportant à la définition de la susceptibilité électrique (paragraphe I. 5), on peut établir la relation suivante :

$$P_0 = \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \int_0^{\infty} \phi(t) dt = \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \chi_e(0) \quad IV. 5$$

Ceci montre que l'intégrale de la fonction $\phi(t)$ doit rester finie.

IV. 4 Polarisation interfaciale

A l'aide de deux propriétés considérées comme indépendantes, la permittivité ε et la conductivité σ Maxwell a établi une théorie de l'absorption qui concerne les milieux diélectriques hétérogènes.

Dans un diélectrique homogène, il montre qu'aucune charge résiduelle ne peut apparaître. Par contre, l'association de deux diélectriques possédant des permittivités et des conductivités différentes est à l'origine du phénomène d'absorption. Il peut s'agir de deux matériaux solides, mais également d'un complexe constitué par un solide et un liquide (le papier imprégné par exemple). Un matériau seul peut également être concerné à condition que sa structure soit hétérogène : par exemple les polyéthylènes qui sont formés d'une phase amorphe non ordonnée et d'une phase cristalline, ces deux phases étant fortement imbriquées l'une dans l'autre.

Disposons deux plaques d'isolants entre les armatures d'un condensateur et appliquons un échelon de tension U au temps $t = 0$. Les permittivités relatives des deux diélectriques sont désignées par ε_1 et ε_2 et les conductivités par σ_1 et σ_2 comme l'indique la figure IV. 4

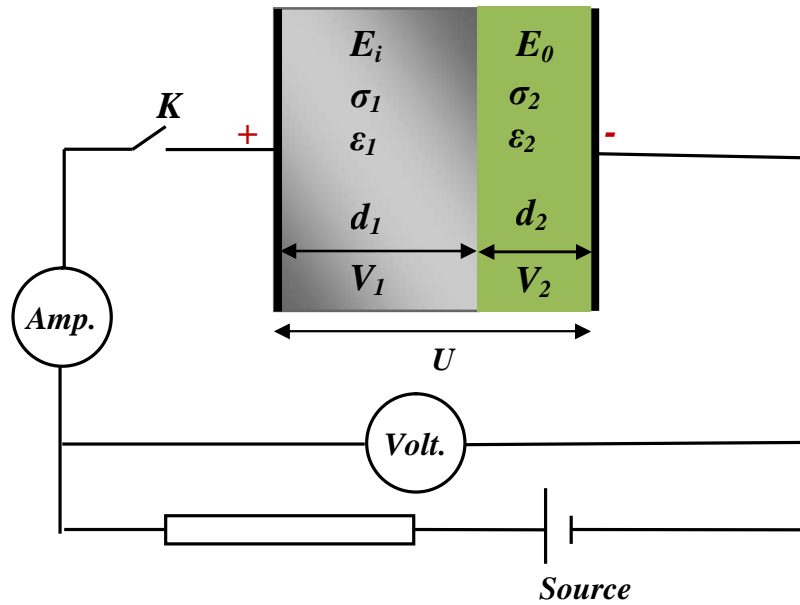


Figure IV. 4 : Condensateur plan à double couche du diélectrique.

IV. 4. 1 Hypothèses de base

- Au temps $t = 0$, les inductions électriques D_1 et D_2 sont égales puisqu'il n'y a pas de charges piégées à l'interface :

$$\epsilon_0 \cdot \epsilon_1 \cdot E_1 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_2 \cdot E_2$$

Comme les courants de conduction i_{c1} et i_{c2} sont différents dans les deux couches, il apparaît une charge interfaciale Q_{12} .

- Au temps $t = \infty$, lorsque l'équilibre est atteint, $i_{c1} = i_{c2}$, dans ce cas :

$$E_1 \cdot \sigma_1 = E_2 \cdot \sigma_2$$

- Durant la période transitoire :

$$D_1 - D_2 = Q_{12}$$

En dérivant par rapport à t , on obtient :

$$\frac{dD_1}{dt} - \frac{dD_2}{dt} = \frac{dQ_{12}}{dt}$$

Si on fait recours à la définition du courant de conduction :

$$\frac{dQ_{12}}{dt} = i_{c1} - i_{c2}$$

le courant traversant chaque diélectrique s'écrit :

$$i_1 = i_{c1} + \frac{dD_1}{dt}$$

$$i_2 = i_{c2} + \frac{dD_2}{dt}$$

A ces deux solutions, ajoutons également l'équation différentielle :

$$\frac{dD_1}{dt} - \frac{dD_2}{dt} = i_{c1} - i_{c2} \quad \text{IV. 6}$$

IV. 4. 2 Exemple simple

Si les épaisseurs d_1 et d_2 des deux plaques sont égales : $d_1 = d_2 = d$, on peut écrire :

➤ à $t = 0$

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot E_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_2 \cdot E_2$$

et

$$V_1 + V_2 = U \Rightarrow d \cdot E_1 + d \cdot E_2 = d \cdot (E_1 + E_2) = U \quad \text{IV. 7}$$

d'où :

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{U}{d}$$

$$E_2 = \frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{U}{d}$$

➤ à l'équilibre (au temps $t = \infty$) $i_{c1} = i_{c2}$ et d'autre part on a :

$$i_{c1} = \sigma_1 \cdot E_1 \quad \text{et} \quad i_{c2} = \sigma_2 \cdot E_2$$

Ceci donne les relations :

$$E_1 = \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \cdot \frac{U}{d}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \cdot \frac{U}{d}$$

➤ Quant au régime transitoire, il nécessite la prise en compte des relations IV. 6 et IV. 7 ; on obtient les deux équations différentielles suivantes :

$$\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot \frac{dE_1}{dt} + (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot E_1 = \frac{U}{d} \cdot \sigma_2$$

$$\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot \frac{dE_2}{dt} + (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot E_2 = \frac{U}{d} \cdot \sigma_1$$

La résolution de la première de ces équations différentielles donne :

$$E_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{U}{d} + K \cdot e^{-t/\tau}$$

avec K = constante d'intégration et :

$$\tau = \varepsilon_0 \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

est une constante de temps.

Remarquons que si $d_1 \neq d_2 \neq d$, alors :

$$\tau = \varepsilon_0 \cdot \frac{d_1 \cdot \varepsilon_2 + d_2 \cdot \varepsilon_1}{d_1 \cdot \sigma_1 + d_2 \cdot \sigma_2}$$

Si l'on détermine K , alors :

$$E_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{U}{d} + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \cdot \frac{U}{d} \cdot e^{-t/\tau}$$

et :

$$J = \frac{U}{d \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)} \cdot \left[\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \frac{(\sigma_1 \cdot \varepsilon_2 - \sigma_2 \cdot \varepsilon_1)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \cdot e^{-t/\tau} \right] \quad \text{IV. 8}$$

La densité du courant J est la somme d'une densité de courant de conduction et d'une densité de courant d'absorption qui décroît exponentiellement.

Notons que le courant d'absorption est nul si $\sigma_1 \cdot \varepsilon_2 = \sigma_2 \cdot \varepsilon_1$

IV. 5 Applications

La mesure du courant d'absorption fournit une évaluation de l'imperfection d'une isolation. En courant alternatif on va se rendre compte que les pertes diélectriques, qui s'expriment par la tangente de l'angle des pertes $\tan(\delta)$, ne sont qu'une autre manifestation des effets du courant d'absorption.

Résistance d'isolement

Il faut que le courant d'absorption soit devenu négligeable pour accéder au courant de conduction et à la résistance d'isolement. En pratique, comme le courant final n'est pas atteint rapidement, par convention, il a été décidé en 1895, dans l'industrie des câbles que la mesure de la résistance d'isolement devrait être effectuée après la mise sous tension.

Mise en court-circuit

Après la mise en court-circuit d'un câble composite ou d'un condensateur, on peut observer, lorsque le circuit est ouvert à nouveau, la réapparition d'une tension entre les bornes. Des règles précises doivent être observées pour éviter tout accident.

Indice de polarisation

Dans l'industrie des machines tournantes, on utilise l'indice de polarisation I_P pour caractériser l'état d'une isolation. On peut le définir à partir du rapport des courants mesurés à 1 minute et 10 minutes après l'application d'une tension continue.

$$I_P = \frac{I_{1mn}}{I_{10mn}} \approx \frac{i_c + i'_{1mn}}{i_c} = 1 + \frac{i'}{i_c}$$

$$I_P = 1 + \frac{I_{\text{absorption}}}{I_{\text{conduction}}}$$

Si $I_P \leq 1,5$ l'isolation est trop humide ou vieille ou polluée superficiellement.

CHAPITRE V : REPONSE EN FREQUENCE ET PERTES DIELECTRIQUES DES ISOLANTS

Utilisons le même dispositif expérimental qu'au chapitre IV, mais appliquons à l'isolant une différence de potentiel alternative :

$$V = V_0 \cdot e^{i\omega t}$$

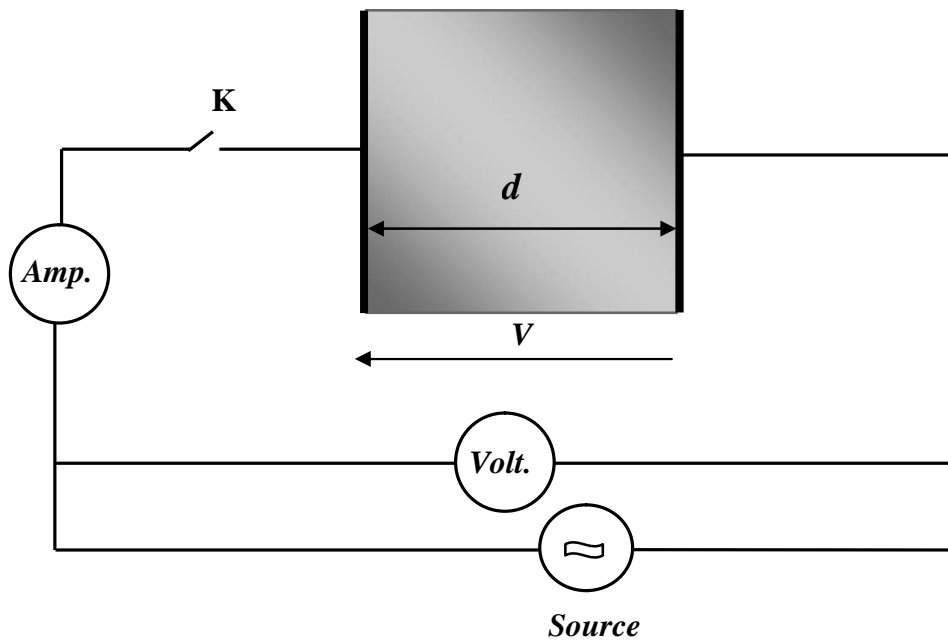


Figure V. 1 : Condensateur plan sous tension alternative sinusoïdale

Si l'isolant est parfait, il ne peut être traversé que par un courant capacitif :

$$i_c = \omega \cdot C \cdot V$$

En pratique, l'imperfection du matériau se traduit par la circulation d'un courant d'absorption et d'un courant de conduction et par conséquent :

$$i > \omega \cdot C \cdot V$$

En considérant globalement les effets des phénomènes d'absorption et de conduction, on peut représenter l'isolant sous forme d'un circuit équivalent composé d'une résistance R_p et d'une capacité C_p , montées en parallèle. Dans ce cas :

$$i = V \cdot \sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \omega^2 \cdot C_p^2}$$

On constate que le courant i n'est pas en quadrature avec la tension (figure V. 2) l'écart se mesure à l'aide de $\tan(\delta)$:

$$\tan(\delta) = \frac{1}{\omega \cdot R_p \cdot C_p} \quad \text{V. 1}$$

$\tan(\delta)$ est appelé **le facteur de dissipation diélectrique**.

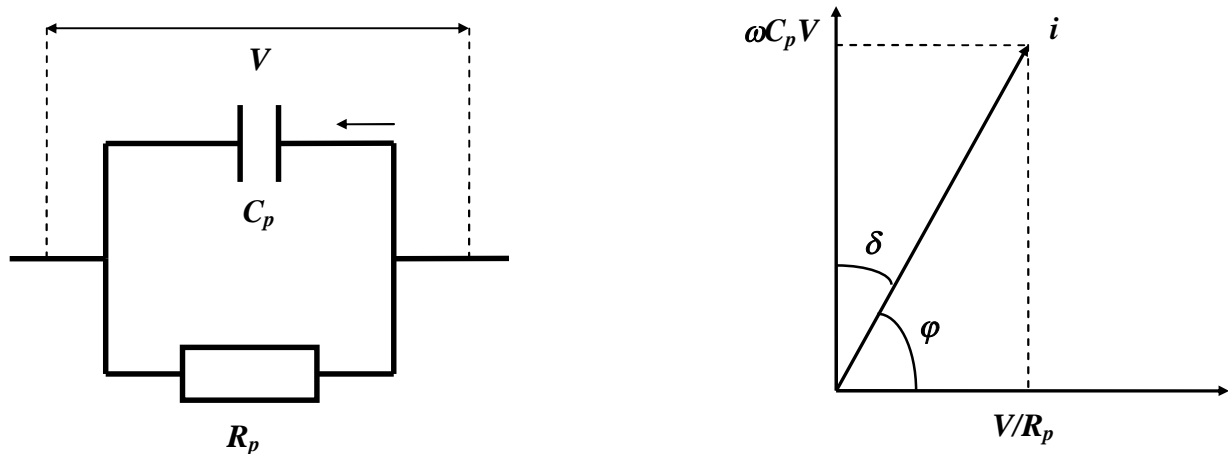


Figure V. 2 : Schéma équivalent et diagramme de Fresnel

Observons également que le facteur de puissance $\cos\varphi$ peut s'écrire :

$$\cos\varphi = \frac{\tan(\delta)}{\sqrt{[\tan(\delta)]^2 + 1}}$$

comme dans la pratique industrielle, $\tan(\delta) \ll 1$, il en résulte que :

$$\cos\varphi = \tan(\delta) \approx \frac{1}{\omega \cdot R_p \cdot C_p}$$

V. 1 La réponse en fréquence

Nous avons vu que la réponse d'un diélectrique à une fonction de $E(t)$ quelconque est donnée par un produit de convolution (équation IV. 3) :

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \cdot \phi(u) \cdot E(t - u) \cdot du$$

Pour obtenir la réponse en fréquence, il suffit de prendre la transformation de Fourier de $P(t)$ et du produit de convolution. En ce qui concerne $P(t)$:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Au second membre, on obtient le produit de deux transformées de Fourier celles des deux fonctions $\phi(t)$ et $E(t)$, soit $\chi(\omega)$ et $E(\omega)$:

$$P(\omega) = \varepsilon_0 \cdot E(\omega) \cdot \chi(\omega)$$

en posant :

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} \phi(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) - j\chi''(\omega)$$

on obtient les deux relations importantes suivantes :

$$\chi'(\omega) = \int_0^{\infty} \phi(t) \cdot \cos(\omega t) dt \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \int_0^{\infty} \phi(t) \cdot \sin(\omega t) dt \quad \text{V.2}$$

Les transformées de Fourier sont données par :

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$P(\omega) = \varepsilon_0 \cdot E(\omega) \cdot \chi(\omega)$$

$$\chi(\omega) = \int_0^{+\infty} \phi(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$\chi'(\omega) = \int_0^{\infty} \phi(t) \cdot \cos(\omega t) dt \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \int_0^{\infty} \phi(t) \cdot \sin(\omega t) dt$$

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) - j\chi''(\omega)$$

$$P = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E$$

Elles permettent par intégration numérique le tracé de $\chi'(\omega)$ et $\chi''(\omega)$ en fonction de la fréquence.

V. 2 Les pertes diélectriques

Un courant i traverse l'isolant et en tenant compte des relations II. 2 et II. 5, la densité de courant s'écrit :

$$J = \sigma_c \cdot E(t) + \frac{dD(t)}{dt}$$

L'utilisation de la transformée de Fourier donne :

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \sigma_c \cdot E(\omega) + j\omega \cdot D(\omega) = \sigma_c \cdot E(\omega) + j\omega \cdot [\varepsilon_0 \cdot E(\omega) + P(\omega)] \\ &= \sigma_c \cdot E(\omega) + j\omega \cdot [\varepsilon_0 \cdot E(\omega) + \varepsilon_0 \cdot E(\omega) \cdot \chi(\omega)] \\ &= \{\sigma_c + j\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot [1 + \chi'(\omega) - j\chi''(\omega)]\} \cdot E(\omega) \\ &= \{\sigma_c + \varepsilon_0 \cdot \omega \cdot \chi''(\omega) + j\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot [1 + \chi'(\omega)]\} \cdot E(\omega) \end{aligned}$$

la composante de $J(\omega)$ en phase avec le champ $E(\omega)$ est à l'origine des pertes actives. Elles sont produites par les phénomènes de conduction et d'absorption. La composante $\chi''(\omega)$ de la susceptibilité est appelée **pertes diélectriques**.

On pose :

$$\varepsilon_0 \cdot [1 + \chi'(\omega) - j\chi''(\omega)] = \varepsilon(\omega) \quad \text{V.3}$$

avec :

$$\varepsilon_0 \cdot [1 + \chi'(\omega)] = \varepsilon'(\omega)$$

$$\varepsilon_0 \cdot [j\chi''(\omega)] = j\varepsilon''(\omega)$$

On obtient :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)$$

On retrouve ainsi une relation comparable à celle donnée en I. 10 :

$$D(\omega) = \varepsilon(\omega).E(\omega)$$

Ceci traduit bien la linéarité du milieu. La densité de courant s'écrit alors :

$$J = [\sigma + \varepsilon_0 \cdot \omega \cdot \varepsilon''(\omega) = j\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon'(\omega)].E(\omega) \quad \text{V. 4}$$

Si on ne considère que les pertes diélectriques, on obtient également la relation :

$$\tan(\delta) = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

ε'' est appelé indice de pertes (*loss index*).

Les pertes par unité de volume se calculent facilement :

$$P = \varepsilon_0 \cdot \omega \cdot \varepsilon'' \cdot E^2(\omega) = \varepsilon_0 \cdot \omega \cdot \varepsilon' \cdot E^2(\omega) \cdot \tan \delta \quad \text{V. 5}$$

$\varepsilon' \cdot \tan(\delta)$ est le facteur de pertes. On remarque qu'une comparaison des performances de deux matériaux ne peut être faite que par une évaluation du produit $\varepsilon' \cdot \tan(\delta)$.

En pratique, il n'est pas possible de s'affranchir des pertes par conduction, dans ce cas :

$$\tan(\delta) = \frac{\varepsilon''(\omega) + \frac{\sigma_c}{\omega \cdot \varepsilon_0}}{\varepsilon'(\omega)}$$

Exemples

Les isolants utilisés en électrotechnique présentent des caractéristiques remarquables. Citons quelques valeurs typiques :

	$\tan(\delta)$ à 50 Hz
Papier imprégné d'huiles minérales	$2 \cdot 10^{-3}$
Polyéthylène haute et basse densité	3 à $4 \cdot 10^{-4}$
Polypropylène	$2 \cdot 10^{-4}$

V. 3 Circuit équivalent

Il est parfois nécessaire de disposer d'un circuit équivalent constitué par une résistance R_s en série avec la capacité C_s . Les caractéristiques R_s et C_s peuvent être reliées à celles du circuit équivalent parallèle (figure V. 3). On peut établir les 2 relations suivantes :

$$R_s = R_p \cdot \frac{[\tan(\delta)]^2}{1 + [\tan(\delta)]^2}$$

$$C_s = C_p \cdot \{1 + [\tan(\delta)]^2\}$$

On remarque que :

$$\tan(\delta) = \frac{1}{\omega \cdot C_p \cdot R_p} = \omega \cdot R_s \cdot C_s$$

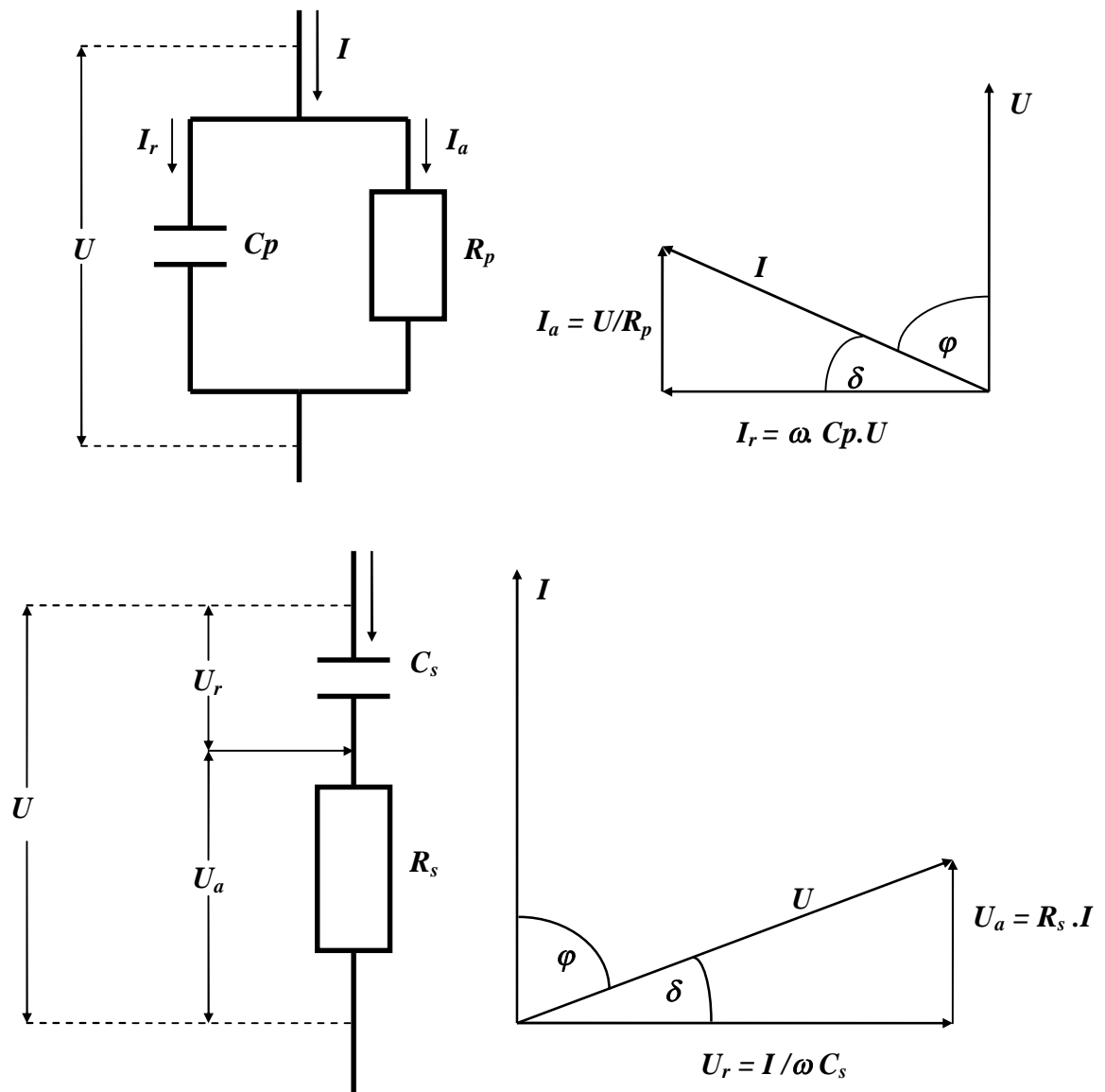


Figure V. 3 : Schéma parallèle et schéma série équivalents