Mécanique du point

Table des matières

Objectifs

Objectifs du module :

A travers ce module mes étudiant seront capable de :

* Mettre en pratique les concepts d'espace et de temps physiques et du repérage de mobiles dans différentes bases de cet espace;

* Appliquer la cinématique du point matériel qui permet d'étudier le mouvement sans se préoccuper des causes qui le provoquent et cela dans des référentiels fixes et des référentiels en mouvement relatif les uns par rapport aux autres;

*Construire la forme d'une équation à partir d'hypothèses sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique.

* Énoncer le concept de forces et d'interactions physiques, de mouvement et de repos;

* Interpréter les principes de la dynamique d'un point matériel et d'un système dans un référentiel galiléen et dans un référentiel non galiléen et de maîtriser leurs applications dans la résolution des problèmes;

* Exercer les notions de travail et d'énergie cinétique, potentielle et mécanique d'un point matériel et d'un système;

Pré-requis :

o Calcul différentiel.

o Calcul des primitives et intégrales.

o Les vecteurs. analyse trigonométrique.

o Notions de base en physique.

Chapitre II : Les vecteurs

I

1. Objectifs et Pré-requis

Objectifs :

A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de :

- Définir un vecteur et donner ses propriétés.
- Représenter un vecteur
- Déterminer l'expression d'un vecteur en utilisant ses coordonnées dans différents repère.
- Appliquer le calcul vectoriel : sommes des vecteurs, produit scalaire, produit vectoriel
- Utiliser la divergence, le gradient,....

Pré-requis :

- Notions de géométrie, coordonnées cartésiennes, repère....
- Dérivation, sommation de vecteurs ......

2. Définition

On appelle grandeur vectorielle toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module.

Exemple

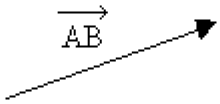
le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique...

3. Propriétés des vecteurs

3.1. Représentation graphique d'un vecteur

Un vecteur est représenté par un segment orienté.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :



3.2. Le vecteur unitaire

c'est un vecteur de module égal à l'unité (le nombre un). On peut exprimer un vecteur parallèle au vecteur unitaire sous la forme :

$$\vec{v} = v \,.\, \vec{u}$$

Les vecteurs unitaires permettent de définir la direction et le sens d'un vecteur non nul de E (E est un espace vectoriel norme, réel ou complexe). Tout vecteur non nul $\vec{V}$ est la multiplication du vecteur unitaire $\vec{U}$ par un nombre réel strictement positif, à savoir la norme $\|\vec{V}\| de\, \vec{V}$

$\vec{V} = \|\vec{V}\| . \vec{U}$.

En physique, pour dénoter les vecteurs unitaires, il est usuel d'utiliser un accent circonflexe : . En mécanique quantique, les états sont des vecteurs unitaires d'espaces de Hilbert. En particulier, les fonctions d'onde sont des fonctions sur IR^3 de carré sommable et de norme L^2 égale à 1.

En désignant les deux vecteurs unitaires $\vec{i}\ et\ \vec{j}$, respectivement dans les directions des deux axes OX et OY, nous pouvons écrire :

$$\vec{V} = V \cos(\theta) \vec{i} + V \sin(\theta) \vec{j}$$

Or

$$\vec{V} = V \vec{U}\ d'où\ \vec{U} = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j}$$

Quant à la norme du vecteur $\vec{V}$, elle vaut :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

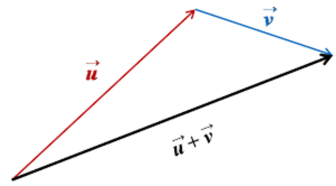
3.3. La somme géométrique des vecteurs

Cette opération fait appel au dessin, c'est pour cette raison qu'on la qualifie de géométrique.

$$\vec{S}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$$
$$\|\vec{S}\|=\sqrt{\|\vec{V}_1\|^2+\|\vec{V}_2\|^2+2.\|\vec{V}_1\|.\|\vec{V}_2\|.\cos(\alpha)}$$

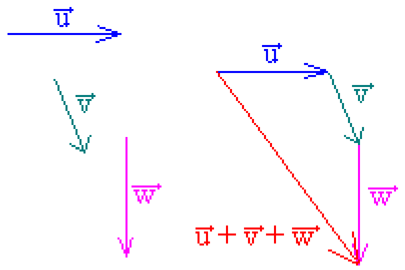
3.3.1. Nous présenterons dans ce qui suit le cas de 2 vecteurs puis celui de 3 vecteurs.

a) La somme de deux vecteurs



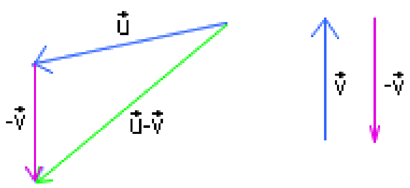
b) La somme de plusieurs vecteurs :

$$\vec{A}=\vec{U}+\vec{V}+\vec{W}$$



3.4. Soustraction de deux vecteurs

On ne sait pas faire la soustraction mais plutôt l'addition pour cela on fait la somme d'un vecteur avec l'inverse du vecteur qu'on veut soustraire de ce dernier.



Pour construire $\vec{u}-\vec{v}$
on construit $\vec{u}+(-\vec{v})$.

$$\vec{D}=\vec{V}_1-\vec{V}_2$$
$$\|\vec{D}\|=\sqrt{\|\vec{V}_1\|^2+\|\vec{V}_2\|^2-2.\|\vec{V}_1\|.\|\vec{V}_2\|.\cos(\alpha)}$$

Exemple

Trouver la résultante $\vec{S}$ des 2 vecteurs $\vec{V}_1 \, et \, \vec{V}_2$ puis calculer le module de cette résultante.

même question pour leur différence $\vec{D}$.

Solution :

$$\vec{S}=\vec{V}_1+\vec{V}_2 ; \vec{S}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j} \Rightarrow \|\vec{S}\|=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

Dans le cas de la différence de deux vecteurs, on obtient :

$$\vec{D}=\vec{V}_1-\vec{V}_2 ; \vec{D}=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j} \Rightarrow \|\vec{D}\|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

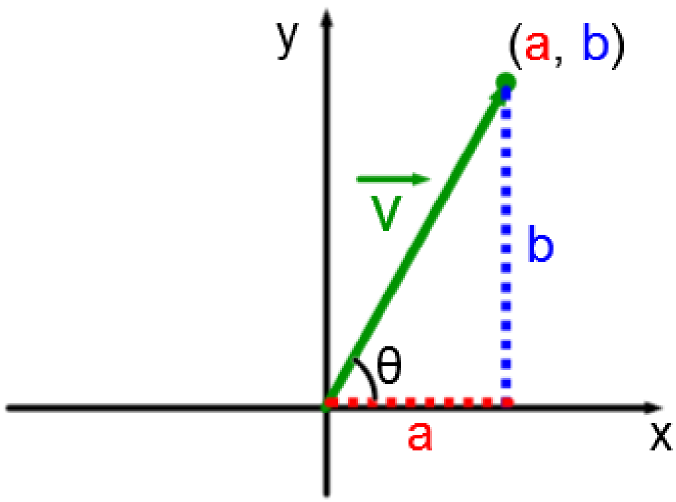
3.5. Composantes d'un vecteur

Chaque vecteur peut être considéré comme étant la somme de deux vecteurs ou plus (le nombre de possibilités est illimité).

Dans le plan, soit le repère $\mathbb{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$:

3.5.1. En coordonnées rectangulaires (dans le plan) :

on décompose le vecteur V suivant l'axe des X et l'axe des Y, comme indiqué sur la figure



$$\vec{V}=\vec{V}_x+\vec{V}_y \; avec \; V_x=V\cos(\theta) \; et \; V_y=V\cos(\theta)$$

En désignant les deux vecteurs unitaires $\vec{i} \; et \; \vec{j}$ respectivement dans les directions des deux axes OX et OY, nous pouvons écrire :

$$\vec{V}=V(\vec{i}\cos(\theta)+\vec{j}\sin(\theta))$$

Or, $\vec{V}=V.\vec{u}$ d'où $\vec{u}=\vec{i}\cos(\theta)+\vec{j}\sin(\theta)$

Quant à la norme du vecteur $\vec{V}$, elle vaut : $V=\|\vec{V}\|=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ [Ceci en utilisant les coordonnées x et y nous pouvons aussi écrire].

Exemple

Trouver la résultante des deux vecteurs $\vec{V}_1(x_1,y_1)$ *et* $\vec{V}_2(x_2,y_2)$ dans le repère g $\mathbb{R}(O,\vec{i},\vec{j})$

$$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}\Rightarrow\|\vec{V}\|=V=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

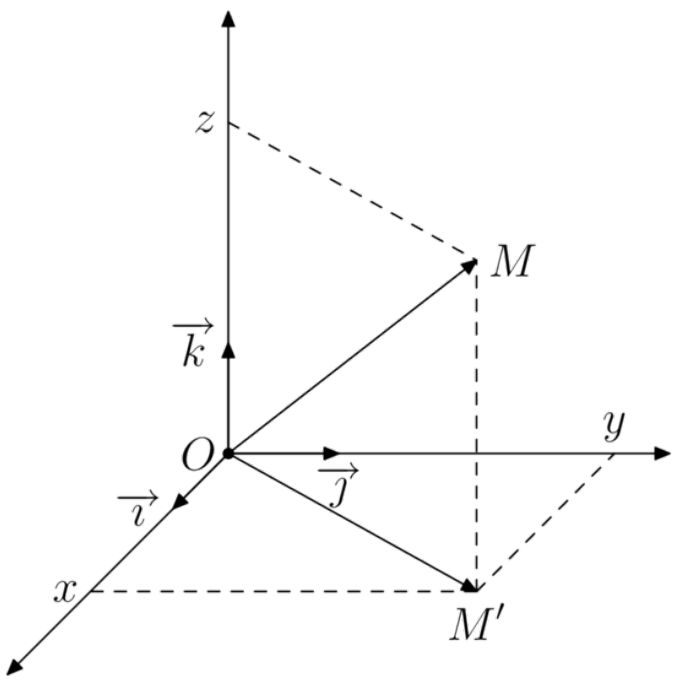
3.5.2. En coordonnées rectangulaires dans l'espace :

dans le repère $\mathbb{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (base orthonormée), nous remarquons nous remarquons que.

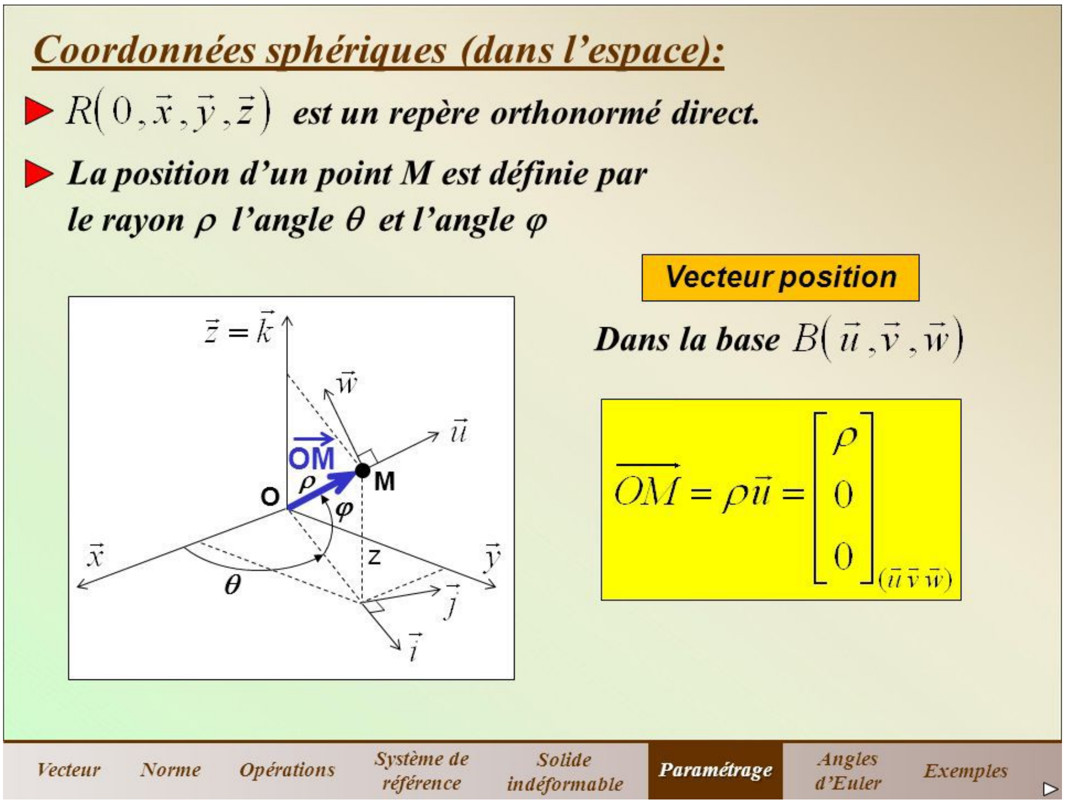
$$\vec{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

Le module de ce vecteur :

$$\|\vec{OM}\|=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$$



En coordonnées sphériques



On a alors les composantes du vecteur $\vec{OM}$ en coordonnées sphériques :

$$x = \|\vec{OM}\| \sin(\varphi).\cos(\theta)\ ;\ y = \|\vec{OM}\| \sin(\varphi).\sin(\theta)\ ;\ z = \|\vec{OM}\| \cos(\varphi)$$

4. Produit scalaire

4.1. Définition

On appelle produit scalaire de deux vecteurs V1 et V2 le nombre réel

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = V_1 . V_2 \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

ou

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \frac{1}{2}[\|\vec{V}_1 + \vec{V}_1\|^2 - \|\vec{V}_1\|^2 - \|\vec{V}_2\|^2]$$

4.2. Cas particulier

On distingue plusieurs cas pour la valeur du produit scalaire, comme suit :

$$Si\, \vec{V}_1 = \vec{0}\, ou\, \vec{V}_2 = \vec{0},\, Alors\, \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \vec{0}$$

$$Si\, \vec{V}_1 \neq \vec{0}\, ou\, \vec{V}_2 \neq \vec{0},\, Alors :$$

$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = 0$$

$$\vec{V}_1 \| \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0 \Rightarrow \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 1 \Rightarrow \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = V_1 . V_2$$

Exemple

Le d'une force $\vec{F}$ qui provoque le déplacement $\vec{AB}$ est donné par la formule :

$$W = F . AB . \cos(\alpha)\, tel\, que\, \alpha = (\vec{F}, \vec{AB})$$

On dit que $\vec{W}$ est le produit scalaire de $\vec{F}$ par $\vec{AB}$

$$W = \vec{F} . \vec{AB} = F . AB . \cos(\vec{F}, \vec{AB})$$

4.3. Expression analytique du produit scalaire

4.3.1. Dans le plan

Soit deux les vecteurs $\vec{V}_1 \, et \, \vec{V}_2$ contenus dans le plan $ℝ(0,\vec{i},\vec{j})$, tel que :

$$\vec{V}_1(x_1, y_1) et \, \vec{V}_2(x_2, y_2)$$

Dans le repère $ℝ(0,\vec{i},\vec{j})$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2=(x_1.\vec{i}+y_1.\vec{j}).(x_2.\vec{i}+y_2.\vec{j})=x_1.x_2\vec{i}.\vec{i}+x_1.y_2\vec{i}.\vec{j}+x_2.y_1\vec{j}.\vec{i}y_1.y_2\vec{j}.\vec{j}$$

On a d'une part

$$\vec{i}\perp\vec{j}\Rightarrow\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{i}=0;$$

et d'autre part

$$\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{i}^2=\vec{j}^2=1$$

4.3.2. Dans l'espace

On a les 2 vecteurs suivants $\vec{V}_1 \, et \, \vec{V}_2 \, représentés \, dans \, ℝ^3(0,\vec{i},\vec{j},\vec{j})$

$$\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1) et \, \vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1 \, ; \vec{i}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{j}.\vec{k}=0 \, et \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_2=x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2$$

4.4. Propriétés du produit scalaire

* Le produit scalaire est commutatif

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2=\vec{V}_2.\vec{V}_1$$

** Non associatif, en effet le produit

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2.\vec{V}_3)$$

n'existe pas car le résultat serait un vecteur.

*** Distributif par rapport à la somme vectorielle :

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2+\vec{V}_3)=\vec{V}_1.\vec{V}_2+\vec{V}_2.\vec{V}_3$$

Exemple

Calculer l'angle compris entre les deux vecteurs :

$$\vec{V}_1=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k} \, et \, V_2=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$$

Réponse : partant de l'expression du produit scalaire, on peut écrire

$$\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\vec{V}_1 . \vec{V}_2}{V_1 . V_2}$$

Or

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = -3+4-3 = -2 \, ; \vec{V}_1 = \sqrt{9+4+1} = 3{,}74 \, ; \vec{V}_2 = \sqrt{1+4+9} = 3{,}74$$

D'où

$$\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\vec{V}_1 . \vec{V}_2}{V_1 . V_2} = \frac{-2}{14} = -0{,}143 \Rightarrow \theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 96{,}2\,°$$

5. Produit Vectoriel

5.1. Définition

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\vec{V}_1 \, et \, \vec{V}_2$$

le vecteur W perpendiculaire au plan qu'ils constituent, nous par convention :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

5.2. Expression du produit vectoriel de deux vecteurs

Le vecteur W est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs, son sens est déterminé par la règle de la main droite (l'index indiquant W), son module est donné par la formule :

$$W = \|\vec{W}\| = V_1 . V_2 . \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Important :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \, et \; \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \, , \, \vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j} \, , \, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

et

$$|\vec{i} \wedge \vec{j}| = |\vec{i} \wedge \vec{k}| = |\vec{j} \wedge \vec{k}| = 1$$

Remarque

la grandeur :

$$W = |W| = V_1 . V_2 . \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

représente l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs, ce qui laisse sous entendre la possibilité de lier un vecteur à une certaine surface.

5.3. Caractéristiques Produit vectoriel

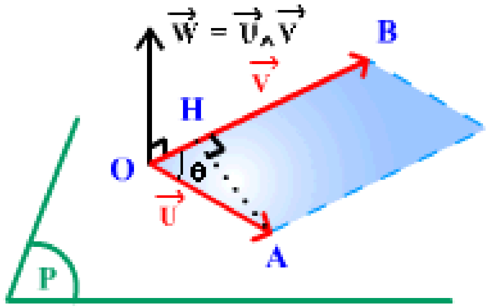
5.3.1. Expression analytique du produit vectoriel

On utilisant les coordonnées cartésiennes dans le repère IR(O,i,j,k), on peut écrire le produit vectoriel des vecteurs :

$$\vec{u}(x_1, y_1, z_1) \, et \, \vec{v}(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2.y_3 - x_3.y_2 \\ x_3.y_1 - x_1.y_3 \\ x_1.y_2 - x_2.y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{W} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$



Exemple

Calcul du produit vectoriel et son module

Exemple 9.3.4

Effectuer le produit vectoriel $\vec{u} \times \vec{v}$, sachant que :

$$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

Calculer l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs.

Le produit vectoriel est donné par :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-9-2)\,\vec{i} - (6+5)\,\vec{j} + (4-15)\,\vec{k}$$
$$= -11\,\vec{i} - 11\,\vec{j} - 11\,\vec{k}$$

On sait que ce vecteur est perpendiculaire aux deux vecteurs donnés et que son module donne l'aire du parallélogramme construit sur ceux-ci.

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = \sqrt{(-11)^2 + (-11)^2 + (-11)^2} = \sqrt{3 \times 11^2} \approx 19{,}05$$

Par conséquent, l'aire du parallélogramme est d'environ 19,05 unités d'aire.

5.3.2. Propriétés du produit vectoriel

a) Anticommutatif

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$$

b) Non associatif

$$\vec{V} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{W}) \neq (\vec{V} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{W}$$

c) Distributif par rapport à la somme vectorielle :

Exemple

Calculer le vecteur $\vec{W}$, produit des deux vecteurs : $\vec{V}_1$ = (2,1, 1) et $\vec{V}_2$ = (1,0, 2) ,

en déduire l'angle compris entre eux.

Réponse :

$$\vec{W} = [(1.-2)-(0.-1)]\vec{i} - [(2.-2)-()1.-1]\vec{j} + [(2.0)-(1.1)]\vec{k} \Rightarrow \vec{W} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$V_1 = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}\, ; V_2 = \sqrt{0^2+1^2+2^2} = \sqrt{5}\, ; W = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14} = 3{,}74$$

$$W = V_1 . V_2 \sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{W}{V_1 . V_2} = 0{,}683 \Rightarrow \theta = 43{,}06\,°$$

5.4. Produit mixte :

Le produit mixte de trois vecteurs est invariant par permutation circulaire c'est-à-dire que :

$$(\vec{U} \wedge \vec{V}).\vec{W} = (\vec{V} \wedge \vec{W}).\vec{U} = (\vec{W} \wedge \vec{U}).\vec{V}$$

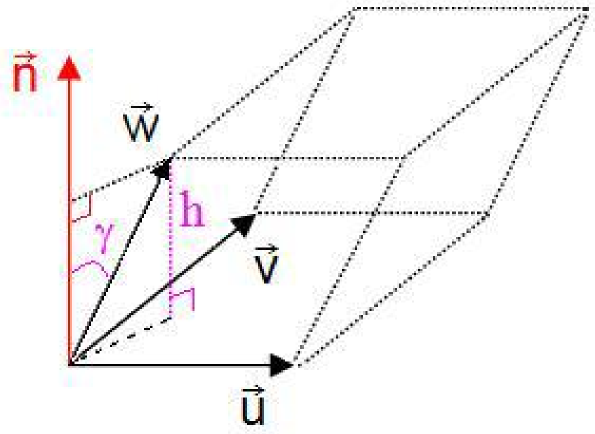
$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (y_2 z_3 - y_3 z_2) x_1 - (x_2 z_3 - x_3 z_2) y_1 + (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1$$

Par contre toute permutation entre deux vecteurs laissant le troisième en la même position change le produit mixte en son opposé par exemple/

$$(\vec{U} \wedge \vec{V}).\vec{W} = -(\vec{V} \wedge \vec{U}).\vec{W} \; (\textit{résultant de l'anticommutativité du produit vectoriel})$$

Interprétation géométrique de la valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs non coplanaires :

il représente le volume du parallélépipède construit à partir des vecteurs u,v et w.


$\vec{n}$
$\vec{w}$
γ
h
$\vec{v}$
$\vec{u}$

6. Gradient, Divergence, Rotationnel et le Laplacien

6.1. Le Gradient

Définitions :

-On dit que la fonction **f (x, z, y)** est un champ scalaire si la fonction **f (x, z, y) est un scalaire**.

-On dit que la fonction $\vec{V}(x, y, z)$ est un champ vectoriel si la fonction est **vectorielle.**

-On définit l'opérateur différentiel vectoriel $\vec{\nabla}$ (nabla) par :

$$\vec{\nabla}=\frac{\delta}{(\delta x)}\vec{i}+\frac{\delta}{(\delta y)}\vec{j}+\frac{\delta}{(\delta z)}\vec{k}$$

où

$$\frac{\delta}{(\delta x)},\frac{\delta}{(\delta y)}et\frac{\delta}{(\delta z)}$$

sont respectivement les dérivées partielles par rapport à x y , et z . Nous allons définir le gradient, la divergence et le rotationnel à l'aide de cet opérateur.

Donc le Gradient est défini par :

Si f (x, z, y) est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant :

$$gr\vec{a}f=\vec{\nabla}()f=\frac{(\delta f)}{(\delta x)}\vec{i}+\frac{(\delta f)}{(\delta y)}\vec{j}+\frac{(\delta f)}{(\delta z)}\vec{k}$$

Exemple

Calculer le gradient de la fonction f(x, y, z)= f =3x^{2}y3z.

Réponse :

$$gr\vec{a}f=6xy^3z.\vec{i}+9x^2y^2z.\vec{j}+3x^2y^3.\vec{k}$$

6.2. La Divergence

Si **V = (V$_x$,V$_y$ V$_z$)** est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant :

$$di\vec{V}=\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{(\delta V_x)}{(\delta x)}+\frac{(\delta V_y)}{(\delta y)}+\frac{(\delta V_z)}{(\delta z)}$$

Exemple

Calculer la divergence de la fonction vectorielle :

$$\vec{V}(x,y,z)=2xy\vec{i}-3yz^2+9xy^3\vec{k}$$

Réponse :

$$di\vec{V}=2y-3z^2+0=2y-3z^2$$

6.3. Le Rotationnel

Si $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant :

$$(\vec{rot}\,\vec{V})=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}=(\frac{(\delta V_z)}{(\delta y)}-\frac{(\delta V_y)}{(\delta z)}).\vec{i}-(\frac{(\delta V_z)}{(\delta x)}-\frac{(\delta V_x)}{(\delta z)}).\vec{j}+(\frac{(\delta V_y)}{(\delta x)}-\frac{(\delta V_x)}{(\delta y)}).\vec{k}$$

Exemple

Calculer le rotationnel du vecteur :

$$\vec{V}(x, y, z)=2xy\,\vec{i}-3yz^2\vec{j}+9xy^3\vec{k}$$

Réponse

$$(\vec{rot}\,\vec{V})=(27xy^2-6yz).\vec{i}-9y^3.\vec{j}-2x\vec{k}$$

6.4. Le Laplacien

Définitions :

*En coordonnées cartésiennes : Le Laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(f)=\vec{\nabla}^2(f)=\frac{(\delta^2 f)}{(\delta x^2)}+\frac{(\delta^2 f)}{(\delta y^2)}+\frac{(\delta^2 f)}{(\delta z^2)}$$

** Le Laplacien d'une fonction vectorielle est égal à la divergence de son gradient :

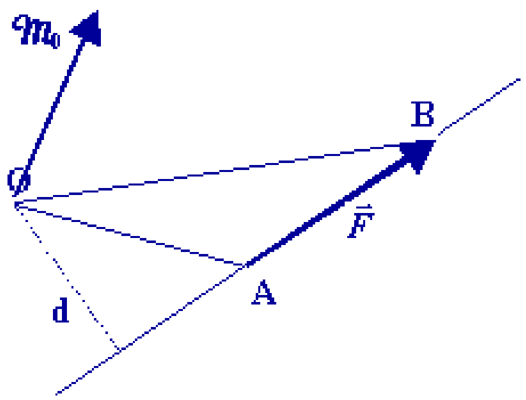
$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(\vec{V})=\vec{\nabla}^2(\vec{V})=\frac{(\delta^2 \vec{V}_x)}{(\delta x^2)}\vec{i}+\frac{(\delta^2 \vec{V}_y)}{(\delta y^2)}\vec{j}+\frac{(\delta^2 \vec{V}_z)}{(\delta z^2)}\vec{k}$$

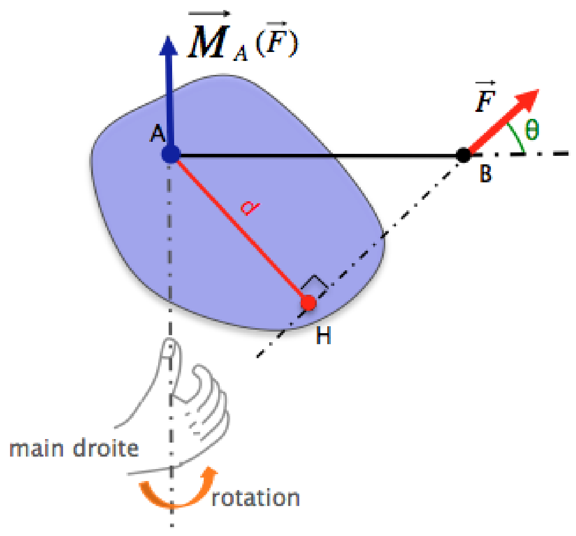
7. Moment d'un vecteur

7.1. Moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace.

Définition : Le moment d'un vecteur par rapport à un point **(O)** de l'espace est le vecteur $\vec{F} = \vec{AB}$ défini par :

$$\vec{m}_0 = \vec{OA} \wedge \vec{AB}$$





Remarque

$\|\vec{m}_0\|$ = au double de l'aire du triangle AOB .

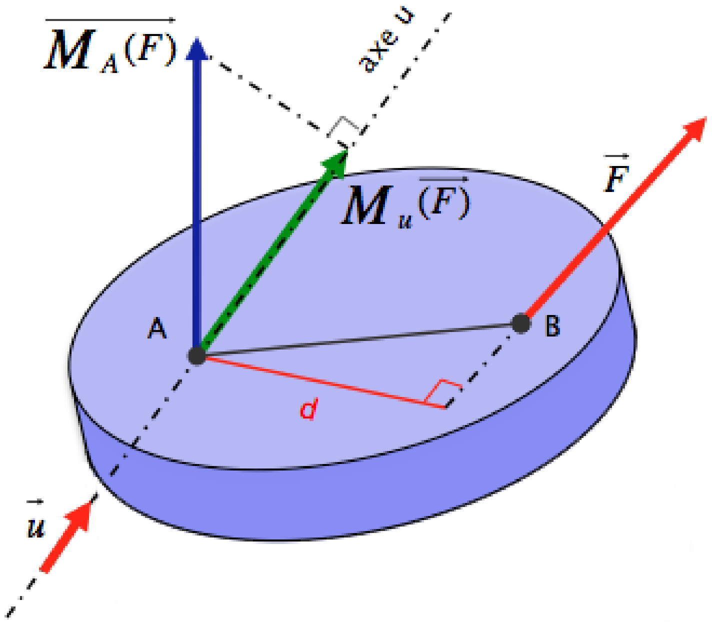
7.2. Moment d'un vecteur par rapport à un axe

* Première définition : Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est égal à la projection de ce vecteur par rapport à un point quelconque de cet axe.

** Deuxième définition : Le moment du vecteur **V→** par rapport à un axe (**Δ**) d'origine **(O)** et de vecteur unitaire **u →**est égal au produit mixte :

$$\tau_\Delta = \vec{\tau}_0 . \vec{u} = (\vec{OA} \wedge \vec{V}) . \vec{u}$$

Exemple : Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe orienté (u), dont un vecteur directeur (unitaire) est $\vec{u}$, est égal au produit scalaire du vecteur u par le vecteur moment en A de la force $\vec{F}$, où A est un point quelconque de l'axe (u) : . C'est donc une grandeur scalaire, dont le signe dépend du sens de rotation du solide par rapport à l'axe (u) :



$$M_u(\vec{F})=\vec{u}\,.\,\vec{M}_A(\vec{F})$$

7.3.
Exercice :

I) Soient les vecteurs :

$$\vec{V}_1=\sin(t)\,\vec{i}+\cos(t)\,\vec{j}+3t\,\vec{k}\;;\;et\;\vec{V}_2=e^{t}\,\vec{i}+2\cos(3t)\,\vec{j}+3\sin(2t)\,\vec{k}$$

calculer les dérivées de ces vecteurs par rapport au temps puis déduire leur modules

$$\frac{d\vec{V}_1}{dt}\,et\,\frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

II) On considère les vecteurs suivants :

$$\vec{A}=2\,\vec{i}+\vec{j}-3\,\vec{k}\;;\;\vec{B}=\vec{i}-2\,\vec{j}+\vec{k}\;et\;\vec{C}=-\vec{i}+\vec{j}-4\,\vec{k}$$

Déterminer les produits suivants :

$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})\,et\,\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$$