TD 2 : vecteurs ; produits scalaire, vectoriel et mixte

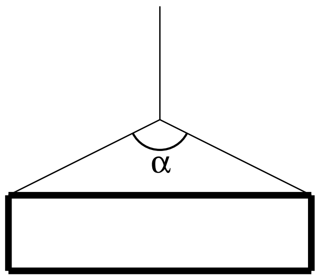
T Exercices théoriques :

1. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.
   Donner leurs normes, leur produit scalaire, l'angle qu'ils forment entre eux.
   Calculer la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.
2. Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}(4,2,-2)$ et $\vec{v}(-1,3,4)$.
   Déterminer, de deux manières différentes, un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. En repère orthonormé, on donne $\vec{u}(1,2,-1)$, $\vec{v}(0,-1,1)$ et $\vec{w}(2,1,1)$. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.
4. On considère un triangle ABC de côtés a, b et c et d'angles α, β, γ.
   (a) Montrer que $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (formule d'Al Kashi, ou de Pythagore généralisé).
   (b) Montrer que l'aire du triangle est $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$; en déduire que $\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}$.
5. Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, A un point de (D). Soit M un point quelconque.
   Donner une expression, à l'aide d'un produit vectoriel, de la distance de M à (D).
   Application numérique 1 : (D_1) définie par $A(1,0,-1)$ et $\vec{u}(1,-2,1)$, $M_1(1,-1,3)$.
   Application numérique 2 : (D_2) intersection des plans $3x+2y-z=7$ et $x+3y+z=0$, $M_2(2,1,-1)$.

P Exercices pratiques :

1. **Elingage**

   On attache une charge de masse $m=50$ kg par deux câbles reliés de manière à faire un angle α entre eux, puis on suspend le tout par un autre câble.
   On suppose que chaque câble, individuellement, supporte une masse de 50 kg. Le montage est-il solide ?



2. **Champ magnétique**
   Une particule de charge q et de masse m est soumise à un champ magnétique constant $\vec{B}(0,0,B)$.
   Elle subit alors la force de Lorentz $\vec{F}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$, et son mouvement est décrit par l'équation $m\vec{a}=\vec{F}$ ($\vec{v}$ désigne la vitesse de la particule, et $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ son accélération)
   Ecrire en fonction des coordonnées (v_x,v_y,v_z) de $\vec{v}$ les équations correspondantes. Les résoudre.
   A quoi ressemble la trajectoire de la particule ?
3. **Force de Coriolis** (plus difficile)
   Soit $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la Terre. Déterminer ses coordonnées dans un repère bien choisi.
   Tout mobile de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ subit la force de Coriolis $\vec{F}=2m\vec{v}\wedge\vec{\Omega}$. Décrire, puis calculer la force de Coriolis exercée sur un planeur de 320 kg volant dans l'hémisphère nord à 100 km/h d'ouest en est. La comparer à la force de pesanteur. Que se passe-t-il si le trajet a lieu d'est en ouest ? Ou dans l'hémisphère sud ?

CORRECTION DU TD 2 : vecteurs ; produits scalaire, vectoriel et mixte

T Exercices théoriques :

1. On a $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = \sqrt{6}$.
   Comme de plus, $\vec{u}.\vec{v} = -1+2+2 = 3$, on trouve $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = 1/2$. L'angle entre les deux vecteurs est donc de $\pi/3$, soit $60°$.
   La projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est $\frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{2}$.
2. On cherche un vecteur $\vec{w}(x,y,z)$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   On peut écrire cette condition avec le produit scalaire, pour obtenir un système de deux équations $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\vec{u}.\vec{w} = 0$, d'où $4x+2y-2z = 0$ et $-x+3y+4z = 0$. Il y a une inconnue de trop : on peut fixer par exemple $z = 1$, alors $x = 1$, $y = -1$ (tout autre choix de z donne un vecteur colinéaires qui est, bien sûr, solution lui-aussi).
   Plus direct, et plus simple : le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est automatiquement une solution : en effet, le produit vectoriel de deux vecteurs est toujours orthogonal à ceux-ci ! On calcule $\vec{u}\wedge\vec{v} = (14,-14,14)$.
   Les vecteurs calculés par ces deux méthodes sont colinéaires, et aucun n'est un "meilleur" choix... tout dépend du contexte, de l'exercice.
3. $\vec{u}.\vec{v} = -3$, $\vec{u}\wedge\vec{v} = (1,-1,-1)$ et $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (1,2,-1).(-2,2,2) = 0$.
4. (a) On utilise le produit scalaire et la relation de Chasles : $a^2 = ||\vec{BC}||^2 = ||\vec{BA}+\vec{AC}||^2 = (\vec{BA}+\vec{AC}).(\vec{BA}+\vec{AC}) = ||\vec{BA}||^2+||\vec{AC}||^2+2\vec{BA}.\vec{AC} = ||\vec{BA}||^2+||\vec{AC}||^2-2\vec{AB}.\vec{AC} = c^2+b^2-2bc\cos\alpha$, d'où le résultat.
   (b) On utilise le produit vectoriel : l'aire du triangle ABC est la moitié de celle du parallélogramme construit sur $\vec{AB},\vec{AC}$, soit $\frac{1}{2}||\vec{AB}\wedge\vec{AC}||$, et donc l'aire vaut $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (α est compris entre 0 et π, donc cette aire est positive).
   On peut la calculer de même avec les vecteurs $\vec{BA},\vec{BC}$ puis $\vec{CA},\vec{CB}$. En identifiant les trois résultats, on obtient les égalités cherchées.
5. Appelons H la projection orthogonale de M sur (D). Alors MH est la distance cherchée. On peut décomposer le vecteur $\vec{AM}$ en $\vec{AM} = \vec{AH}+\vec{HM}$, et on a $\vec{AM}\wedge\vec{u} = \vec{AH}\wedge\vec{u}+\vec{HM}\wedge\vec{u}$. Mais $\vec{u}$ et $\vec{AH}$ sont colinéraires, donc $\vec{AM}\wedge\vec{u} = \vec{0}+\vec{HM}\wedge\vec{u}$. Et comme $\vec{u}$ et $\vec{HM}$ sont orthogonaux, finalement, $||\vec{AM}\wedge\vec{u}|| = ||\vec{HM}||.||\vec{u}||$. D'où la formule
   $$d(M,D) = ||\vec{HM}|| = \frac{||\vec{AM}\wedge\vec{u}||}{||\vec{u}||}.$$
   Pour le premier exemple, il s'agit d'une application directe de la formule précédente. On trouve $d(M_1,D_1) = \frac{||(7,4,1)||}{||(1,-2,1)||} = \sqrt{11}$.
   Dans le deuxième exemple, la difficulté est de trouver un vecteur directeur et un point de (D_2). La droite est définie comme intersection de deux plans, plans dont les vecteurs normaux $(3,2,-1)$ et $(1,3,1)$ sont orthogonaux à la direction de la droite. Par conséquent (cf. exercice T2), le vecteur $(3,2,-1)\wedge(1,3,1) = (5,-4,7)$ est un vecteur directeur de D.
   Pour trouver un point de la droite, il faut fixer une de ses coordonnées librement puis résoudre un système pour trouver les deux autres. Par exemple cherchons le point A dont la côte z vaut 0 : ses coordonnées x et y vérifient $3x+2y = 5$ et $x+3y = 0$, d'où $x = 3$ et $y = -1$: $A(3,-1,0)$.
   Ainsi, $d(M_2,D_2) = \frac{||(-10,-2,6)||}{||(5,-4,7)||} = \sqrt{14}/3$.

P Exercices pratiques :

1. On appelle $\vec{P}$ le poids de la charge, $\vec{T}$ la tension du câble principal, et $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ les tensions des deux câbles de gauche et droite.
   Alors $\vec{T} = -\vec{P}$ et $\vec{T} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$.
   $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ ont la même composante verticale, donc
   $$||\vec{T}||^2 = -\vec{T}.(\vec{T_1} + \vec{T_2}) = -2\vec{T}.\vec{T_1} = 2||\vec{T}||.||\vec{T_1}||\cos(\alpha/2),$$
   et finalement $||\vec{T_1}|| = \frac{mg}{2\cos(\alpha/2)}$.

   Pour que le système tienne, il faut que $||\vec{T_1}||$ soit supérieur à mg, donc $2\cos(\alpha/2) \geq 1$, ce qui est possible si et seulement si $|\alpha/2| \leq \frac{\pi}{3}$, donc il faut et il suffit que l'angle α soit inférieur à $2\pi/3$, soit $120°$.
2. On calcule $\vec{F} = (qBv_y, -qBv_x, 0)$. Comme $m\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt})$, on obtient le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} m\frac{dv_x}{dt} & = & qBv_y \\ m\frac{dv_y}{dt} & = & -qBv_x \\ m\frac{dv_z}{dt} & = & 0 \end{array}\right.$$
   v_z est donc constante, et de plus en dérivant deux fois v_x on a : $\frac{d^2v_x}{dt^2} = qB\frac{dv_y}{dt} = -(qB/m)^2v_x$.
   Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants. Elle admet donc comme solution $v_x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, où $\omega = qB/m$ et A, φ sont des paramètres réels.
   On obtient en dérivant $mv_y = -\frac{1}{qB}A\omega\sin(\omega t + \varphi)$, soit $v_y = -A\sin(\omega t + \varphi)$.
   Les primitives de v_x, v_y, v_z donnent les coordonnées du vecteur position. Et ce qui précède montre que, selon x et y la particule décrit un cercle (x et y sont respectivement un cosinus et un sinus de même amplitude, même pulsation, même phase), alors que selon z elle a un mouvement rectiligne uniforme : finalement, la particule dans ce champ magnétique décrit une hélice.
3. On fixe un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ "naturel" : le centre O est le centre de la Terre, $\vec{k}$ dirige l'axe de rotation de la Terre, de sens Sud-Nord, et $\vec{i}$, $\vec{j}$ sont des vecteurs du plan de l'équateur.

   Alors dans ce repère, $\vec{\Omega}$ a pour coordonnées $(0,0,\omega)$ où ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre, soit $\frac{2\pi}{86400}$ rad/s.
   La force subie par le planeur est orthogonale à sa trajectoire et à l'axe de la Terre, et orientée de telle manière que $(\vec{v},\vec{\Omega},\vec{F})$ soit direct : la force est orientée vers la droite du planeur, et cela, que le planeur se déplace d'ouest en est, ou d'est en ouest, dans l'hémisphère nord.

   Dans l'hémisphère sud, le planeur est dévié vers la gauche.

   On calcule l'intensité de la force : $\vec{v}$ et $\vec{\Omega}$ étant orthogonaux, $||\vec{F}|| = 2mv\omega$, soit ici $1,293$ N, alors que la force de pesanteur est de mg, soit 3139 N : la force de Coriolis est très faible devant la pesanteur...mais ses effets ne sont pas pour autant négligeables.