TD Calcul vectoriel

Exercice 1 - Produits scalaire et vectoriel.

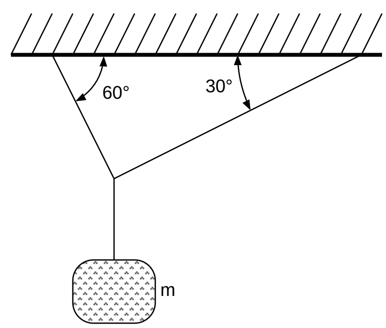
Soit deux vecteurs $\vec{V_1} = (2, 4, -3)$ et $\vec{V_2} = (-1, 2, 2)$ dans une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

1. Calculer $\vec{V_1}.\vec{V_2}$, $\vec{V_1}.\vec{x}$, $\vec{x}.\vec{x}$ et $\vec{x}.\vec{y}$.
2. Calculer $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$, $\vec{V_1} \wedge \vec{x}$, $\vec{x} \wedge \vec{x}$, $\vec{x} \wedge \vec{y}$ et $\vec{x} \wedge \vec{z}$.
3. Normez le vecteur $\vec{V_1}$.

Exercice 2 - Masse suspendue.

Soit une masse de $2.5\ kg$ suspendue à trois câble comme dessiné ci-contre :

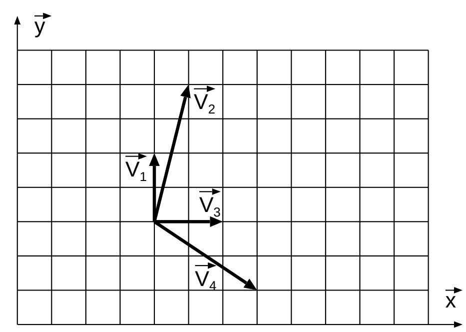
1. Déterminer graphiquement la force dans chaque câble.
2. Déterminer analytiquement chaque force.



Exercice 3 - Opérations sur les vecteurs.

On donne 4 vecteurs sur le quadrillage ci-contre.

1. Calculer $\vec{V_1}.\vec{V_2}$, $\vec{V_1}.\vec{V_3}$, $\vec{V_1}.\vec{V_4}$.
2. Calculer $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$, $\vec{V_1} \wedge \vec{V_3}$, $\vec{V_1} \wedge \vec{V_4}$.
3. Dessiner $\vec{V_5} = (\vec{V_2} \wedge \vec{V_1}) \wedge \vec{V_3}$.



Exercice 4 - Vecteurs indépendants.

Pour chaque cas, les vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

1. $\vec{A} = 2.\vec{i} + \vec{j} - 3.\vec{k}$
   $\vec{B} = \vec{i} - 4.\vec{k}$
   $\vec{C} = 4.\vec{i} + 3.\vec{j} - \vec{k}$

2. $\vec{A} = \vec{i} + -3.\vec{j} + 2.\vec{k}$
   $\vec{B} = 2.\vec{i} - 4.\vec{j} - \vec{k}$
   $\vec{C} = 3.\vec{i} + 2.\vec{j} - \vec{k}$

Exercice 5 - Pythagore.

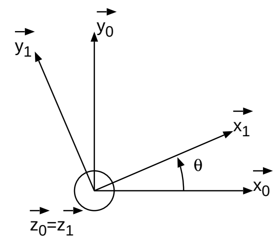
Redémontrer la formule de Pythagore (généralisé) à l'aide du produit scalaire.

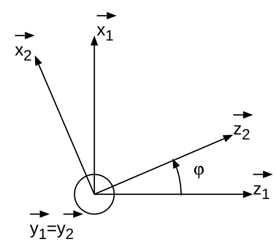
Exercice 6 - Manipulation du produit vectoriel.

1. Démontrer analytiquement que $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$.
2. Démontrer que $(\vec{A} \wedge \vec{B}).(\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$.
3. Montrer que $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$ ssi $(\vec{A} \wedge \vec{C}) \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

Exercice 7 - Changements de bases.

Soit une base 2 en rotation d'angle φ par rapport à une base 1 autour de $\vec{y_1}$, elle mÍme en rotation d'angle θ par rapport à une base 0 autour de $\vec{z_0}$.





1. Exprimer la base 1 dans la base 0 et inversement. Exprimer $\vec{z_2}$ dans la base 0.
2. Calculer $\vec{x_1} \wedge \vec{x_0}$, $\vec{y_0} \wedge \vec{x_1}$, $\vec{y_1}.\vec{x_0}$, $\vec{z_2} \wedge \vec{x_0}$, $\vec{z_2}.\vec{x_0}$.

Exercice 8 - Paramétrage sphérique

Soit R_0 un repère fixe. On cherche à paramétrer la position d'un point et d'un solide à l'aide principalement d'angles.

1. Combien de paramètres faut-il pour définir la position d'un point dans l'espace ?
2. Définir complètement le paramétrage d'un point M défini à l'aide de deux angles et d'une distance au centre du repère (base sphérique).
3. Calculer alors l'expression de la vitesse de M en fonction des paramètres.
4. Combien de paramètres faut-il pour définir la position d'un solide dans l'espace ?
5. Définir complètement le paramétrage d'un solide S, défini à l'aide de trois angles et des coordonnées cartésiennes d'un point du solide.