République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Cours de Troisième année Mathématiques Appliquées

Chaînes de Markov à temps discret

Réalisé par :

M^{r} TOUCHE Nassim

Année Universitaire 2017 – 2018

Cours sur les Chaines de Markov à temps discret

TOUCHE Nassim
Département de recherche opérationnelle
Faculté des Sciences Exactes
Université A. Mira Bejaia

Avant-propos

L'objectif du cours « Chaînes de Markov à temps discret » est d'exposer un certains nombre de notions fondamentales relatives aux processus aléatoires les plus simples, en l'occurrence les chaines de Markov à temps discret. L'étude de ce type de processus est d'une importance capitale dans le cursus d'un étudiant en Mathématiques Appliquées ; ces processus interviennent dans plusieurs domaines stochastiques de Recherche Opérationnelle (Fiabilité, Files d'attente, Gestion des stocks,…).

Dans un premier temps, nous avons rappelé des notions de processus aléatoires où nous avons mis l'accent sur les différentes classifications de ces processus.

En deuxième lieu, une attention particulière a été accordée aux chaînes de Markov à temps discret, où nous avons exposé : définition d'une chaîne de Markov à temps discret, matrice de transition et graphe de transition, propriétés fondamentales, probabilité de transition en n étapes, comportement asymptotique, régime transitoire et régime permanent, distribution stationnaire, distribution stationnaire et distribution limite, chaînes de Markov absorbantes, délais d'absorption et probabilité d'absorption, délais d'atteinte et probabilité d'atteinte.

La dernière partie de ce document est réservée à quelques exercices d'application.

Table des matières

1 Généralités sur les processus aléatoires **3**

1.1 Introduction . . . 3

1.2 Classification des processus aléatoires . . . 4

1.2.1 Les différents processus aléatoires . . . 5

2 Chaînes de Markov discrètes **9**

2.1 Définitions et propriétés . . . 9

2.2 Propriétés fondamentales . . . 16

2.2.1 Probabilités de transition en n étapes . . . 16

2.2.2 Equations de Chapman Kolmogorov . . . 17

2.2.3 Loi de probabilité de X_n . . . 20

2.2.4 Chaîne de Markov à deux états . . . 21

2.2.5 Distributions stationnaires et limites pour les chaînes de Markov homogènes . 22

2.3 Classification des états d'une chaîne de Markov . . . 26

2.3.1 Relation de communication entre états . . . 26

2.3.2 Etats récurrents et transients . . . 30

2.3.3 Chaînes de Markov absorbantes . . . 37

2.4 Exercices d'application 41
2.4.1 Exercices corrigés 41
2.4.2 Exercices non corrigés 46

Chapitre 1

Généralités sur les processus aléatoires

1.1 Introduction

On peut classer les phénomènes aléatoires en deux catégories : les phénomènes statiques et les phénomènes dynamiques. Dans ce manuscrit on s'intéresse uniquement à la première catégorie.

Dans les phénomènes statiques, il s'agit d'un fait qu'on admet fixe qui ne se rattache à aucun autre fait. Exemples : l'observation de la taille d'un individu choisi au hasard, la défectuosité ou non d'une pièce mécanique (ces expériences n'évoluent pas). Le modèle mathématique des phénomènes aléatoires statiques est la **variable aléatoire** (ou un **vecteur aléatoire**). Lorsqu'on veut déterminer les informations concernant la distribution de probabilité des valeurs possibles d'un phénomène aléatoire statique, on peut répéter des observations identiques et indépendantes (exemples : choisir plusieurs individus, plusieurs pièces) au hasard et de mesurer leurs caractéristiques, et dans ce cas, on obtient un ensemble fini de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Cependant, si l'on désire étudier certains phénomènes tels que la taille d'une population à une génération ou la consommation d'électricité d'une région donnée, on peut encore obtenir un ensemble d'observations prises à chaque génération, ou chaque région mais à ce moment là les hypothèses d'indépendance et équidistributivité ne sont plus admissibles. Il est plus judicieux, ici, de considérer que les observations prises à chaque génération ou à des régions différentes font partie d'une même famille infinie représentant tout le phénomène à chaque génération ou à chaque région. Le modèle de variables aléatoires s'avère ainsi insuffisant pour décrire les phénomènes qui évoluent par rapport à un ensemble renfermant une infinité de membres. Ainsi, on est amené à considérer plutôt **une famille de variables aléatoires**, évoluant sur un domaine, et dont chacune est destinée à décrire un moment correspondant de l'évolution du phénomène. Un tel modèle est appelé **processus aléatoire** ou **stochastique**.

1.2 Classification des processus aléatoires

Un processus aléatoire $(X_t,\ t \in T)$ de domaine d'évolution T, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ et à valeurs dans un espace d'état E, est une famille de variables aléatoires, chacune définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ à valeurs dans E.

Remarques 1.1

En pratique le domaine d'évolution T est soit l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{N}$. En général, T est un espace de temps.

- Si $T = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, on parlera de processus aléatoire à temps discret.
- Si $T = [0, +\infty[$, on dira alors que $(X_t,\ t \geq 0)$ est un processus aléatoire à temps continu.
- On appelle espace des états, l'ensemble E où les variables aléatoires X_t prennent leurs valeurs.

On peut classifier les processus aléatoires selon la dénombrabilité ou non de l'espace d'état E et du domaine d'évolution T en quatre cas :

T E	Discret	Continu
Discret : fini ou infini dénombrable	Suite aléatoire à espace d'états discret (type 1)	Processus à temps continu à espace d'états discret (type 3)
Continu	Suite aléatoire à espace d'états continu (type 2)	Processus à temps continu à espace d'états continu (type 4)

Exemples 1.1

1. On considère un joueur de pile ou face. Il gagne $(+1)$ s'il tire pile et (-1) s'il tire face. Soit X la fortune du joueur au n^{ième} tirage. $(X_t, t \in \mathbb{N}^*)$ est un processus aléatoire de **type 1**.
2. On considère un gardient dans un bureau de poste. Soit le nombre de personne en attente à l'instant t, $(X_t,\ t \geq 0)$ est un processus aléatoire de **type 3**.

Définition 1.1 (Processus aléatoire)

Un processus aléatoire $(X_t,\ t \in T)$ peut être vu comme application de (Ω, σ) dans E, qui se traduit symboliquement par :

$$X :\ (\Omega, T) \longrightarrow E$$

$$(w, t) \longmapsto X(w, t).$$

Remarques 1.2

1. Pour un $t \in T$ fixe, $X(t, .)$ est une variable aléatoire réelle, i.e.,

$$X :\ \Omega \longrightarrow E$$

$$w \longmapsto X(w).$$

Cette application décrit les états possibles du processus pour chaque t.

2. Pour $w \in \Omega$ fixe, l'application

$$X(w, .) :\ T \longrightarrow E$$

$$t \longmapsto X_t(w)$$

est appelée une trajectoire de w.

1.2.1 Les différents processus aléatoires

Il y a trois éléments qui différentient les processus aléatoires :

1. Espace des états E.
2. Espace des paramètres T (domaine d'évolution).
3. Les relations de dépendances entre les variables aléatoires.

a) Processus à accroissements indépendants

Un processus $(X_t, t \in T)$ est dit à accroissement indépendant si, les variables aléatoires $(X_{t_2} - X_{t_1})$, $(X_{t_3} - X_{t_2}), ..., (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont mutuellement indépendantes, $\forall\ t_1, t_2, ..., t_n \in T$ tels que $t_1 < t_2 < ... < t_n$.

b) Processus strictement stationnaire

Un processus $(X_t, t \in T)$ est dit strictement stationnaire si les fonctions de répartitions des familles de variables aléatoires $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})'$ et $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h})'$ sont les mêmes.

i.e., $\forall\ n, h \in \mathbb{N}$, $\forall\ x_i \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2, ..., t_n \in T$,

$$\begin{aligned} P\left(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, ..., X_{t_n} \leq x_n\right) &= P\left(X_{t_1+h} \leq x_1, X_{t_2+h} \leq x_2, ..., X_{t_n+h} \leq x_n\right), \\ F_{t_1, t_2, ..., t_n}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) &= F_{t_1+h, t_2+h, ..., t_n+h}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right). \end{aligned}$$

Autrement dit, Le processus $(X_t,\ t \in T)$ est strictement stationnaire signifie que le vecteur $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h})$ a la même loi que $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ et ce pour tous $n, h \in \mathbb{N}$ et $t_1 < t_2 < ... < t_n$ dans T.

c) Processus faiblement stationnaire (stationnaire au second-ordre)

Le processus $(X_t,\ t \in T)$ est dit faiblement stationnaire (ou stationnaire au second-ordre, ou stationnaire en covariance) s'il vérifie les trois propriétés suivantes :

i) $\forall t \in T$, $E(X_t) = m < \infty$.

ii) $\forall t \in T,\ E(X_t^2) < \infty$ (ie, la variance existe $\forall t \in T$).

iii) $Cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t.X_{t+h}) - E(X_t).E(X_{t+h})$ (la covariance ne dépend que de h, $\forall t \in T$).

d) Processus à accroissements stationnaires (homogène dans le temps)

Un processus $(X_t,\ t \in T)$ est dit homogène dans le temps si la loi de probabilité du vecteur $\left(X_{t_2+h} - X_{t_1+h}, ..., X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}\right)$ est la même $\forall h > 0$, $\forall\ t_1 < t_2 < ... < t_n \in T$. Cela signfie que la loi de probabilité du vecteur $\left(X_{t_2+h} - X_{t_1+h}, ..., X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}\right)$ dépend seulement de la longueur de l'intervalle $]h,\ t_i[$ et non pas de h et t_i.

e) Processus de Markov

Un processus $(X_t,\ t \in T)$ est dit markovien, si pour tout $t_1 < t_2 < ... < t_n \in T$, la distribution conditionnelle de X_{t_n} étant donné X_{t_1},X_{t_2},..., $X_{t_{n-1}}$ est égale à la distribution conditionnelle de X_{t_n} étant donné $X_{t_{n-1}}$, pour tout $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $P\left(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right) = P\left(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right)$.

f) Processus de Poisson

On dit qu'un processus $(N_t,\ t \geq 0)$ est de Poisson si ce dernier consiste à compter le nombre d'arrivées (d'apparitions) d'un événement qui surviennent au hasard dans le temps avec intensité λ $(\lambda > 0)$, si les conditions suivantes sont satisfaites.

C1) $\forall\ 0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, les variables $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2), ..., N(t_n) - N(t_{n-1})$ sont mutuellement indépedantes.

Autrement dit : les nombres d'événements qui surviennent dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants (ie, $(N_t,\ t \geq 0)$ est à accroissements indépendants).

C2) La loi de probabilité du nombre d'évènements $(N(t+h)-N(t))$ survenant dans un intervalle de temps $[t,\ t+h]$ ne dépend que de la longueur de l'intervalle : h (ie, $(N_t,\, t \geq 0)$ est homogène dans le temps).

C3) La probabilité que deux événements ou plus se produisent dans un petit intervalle $\triangle t$ est négligeable par rapport à la probabilité qu'il y ait qu'un seul événement.

ie,

$$P\left(N_{t+\triangle t} = n+i | N_t = n\right) = \begin{cases} \lambda\triangle t + o\triangle t & si\ i=1, \\ o\triangle t & si\ i>1, \\ 1-\lambda\triangle t + o\triangle t & si\ i=0, \end{cases}$$

où λ est le nombre moyen d'événement par unité de temps.

Exemples 1.2 : Pannes de machines, communications téléphoniques, arrivées des clients devant un guichet.

j) Processus de naissance et de mort

Ces processus consistent à décrire l'évolution de la taille n d'une population donnée. Ce sont des processus aléatoires à temps continu et à espace d'états discret.

Exemples 1.3 : Une file d'attente devant un guichet. Les états de ce système, sont les longueurs possibles de la file : 0 personne, 01 personne,....

– Les processus de naissance et de mort sont caractérisés par :
  - Ils sont sans mémoire.
  - Le système ne peut évoluer instantanément que vers les états voisins.
– On appelle naissance à la date t, le passage de l'état n à l'instant t à l'état $n+1$ à la date $t+dt$.
– On appelle mort à la date t, le passage de l'état n à l'instant t à l'état $n-1$ à la date $t+dt$.

Exemple 1.4 : Dans une file d'attente : une **naissance** est l'arrivée d'une nouvelle personne qui se joint à la file. Une **mort** est le départ d'un client servi.

Chapitre 2

Chaînes de Markov discrètes

Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires indicées par le temps. Le cas le plus simple est celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes. Ce sont des variables aléatoires qui n'ont aucune influence les unes sur les autres. De point de vue de la modélisation, ces suites de variables aléatoires indépendantes ne sont pas satisfaisantes, car elles ne prennent pas en compte la dynamique des systèmes en évolution, du fait de l'indépendance. Pour introduire cette dynamique, il faut tenir compte de l'influence du passé, ce que font les chaînes de Markov qui sont des processus aléatoires sans mémoire : à chaque instant leur évolution future ne dépend que de leur position, et non de leur trajectoire passée. Dans ce document, nous considérons uniquement le cas des processus aléatoires à temps discret et à espace d'états E discret.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1 (Chaîne de Markov)

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble des états E supposé égal à $\mathbb{N}$. On dit que cette suite est une *chaîne de Markov* si, pour tout $n \geq 0$ et toute suite

$(i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j)$, on a :

$$P\left(\underbrace{X_{n+1} = j}_{Le\ futur} | \underbrace{X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, ..., X_0 = i_0}_{Le\ passé\ et\ le\ présent}\right) = P\left(\underbrace{X_{n+1} = j}_{Le\ futur} | \underbrace{X_n = i}_{Le\ présent}\right). \tag{2.1}$$

Remarques 2.1

- L'état du processus à l'instant $(n+1)$ ne dépend que de celui à l'instant n précédent, mais non de ses états antérieurs.
- On dira qu'un tel processus est sans mémoire.

Définition 2.2 (Chaîne de Markov homogène)

Une chaîne de Markov est dite *homogène* (dans le temps), si la probabilité précédente (2.1) ne dépend pas de n. ie,

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i), \quad (n \geq 0).$$

Définition 2.3 (Probabilité de transition)

On définit la *probabilité de transition* de l'état i à l'état j entre les instants n et $n+1$ par la quantité :

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \qquad \forall i, j \in E,$$

où, p_{ij} : P(pour que le système soit dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant à l'instant n il se trouvait à l'état i).

Définition 2.4 (Matrice de transition) pour card(E) = r

La matrice $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{pmatrix}$, $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1$ (matrice stochastique), dont les coefficients sont des probabilités de transition p_{ij} est appelée *matrice de transition* (de passage) de la chaîne. C'est une matrice finie, suivant que l'ensemble des états est fini ou dénombrable. Ici E fini de cardinal r.

Propriété de la matrice $\mathcal{P}$

- $\mathcal{P}$ admet 1 comme valeur propre.
- Il existe un vecteur propre à gauche, associé à la valeur propre 1 qui défini une distribution de probabilité.

Remarques 2.2 :

1. Une chaîne de Markov homogène "saute" aléatoirement d'état en état, et la probabilité de chaque saut est donnée par la matrice de transition $\mathcal{P}$.
2. La loi de X_0 est appelée *la loi initiale* de la chaîne de Markov. On l'écrira

$$\pi_0 = \left(P\left(X_0 = 1\right), P\left(X_0 = 2\right), ..., P\left(X_0 = N-1\right), P\left(X_0 = N\right)\right) \quad \text{si } E = \{1, 2, ..., N\}.$$

La proposition suivante assure que la matrice de transition et la loi initiale caractérisent la loi de la chaîne de Markov.

Proposition 2.1 (Caractérisation d'une chaîne de Markov homogène)

La loi d'une chaîne de Markov $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est entièrement caractérisée par sa matrice de transition $\mathcal{P}$, et la loi de X_0 , π_0. De plus on a pour tous $i_{0,}i_{1,...,}i_{n-1,}i_n \in E$,

$$\begin{aligned} P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n\right) &= P\left(X_0 = i_0\right).P\left(X_1 = i_1 | X_0 = i_0\right)...P\left(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}\right) \\ &= P\left(X_0 = i_0\right).p_{i_0 i_1}...p_{i_{n-1} i_n}. \end{aligned}$$

Démonstration

En utilisant la définition des probabilités conditionnelle, et la propriété de Markov, on obtient :

$$\begin{aligned} P\left(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\right) &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) \\ \times P(X_{n-1} &= i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) \\ &= p_{i_{n-1},i_n} \times P(X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, ..., X_0 = i_0) \\ &= p_{i_{n-1},i_n} \times p_{i_{n-2},i_{n-1}} \times p_{i_0,i_1} \times P(X_0 = i_0). \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par récurrence sur l'entier $n \geq 0$, et ce pour tous les états $i_0, ..., i_n$.

Exemple 2.1 (Chaîne de Markov homogène) : Une grenouille monte sur une échelle. Chaque minute, elle peut monter d'un barreau avec une probabilité 1/2, ou descendre d'un barreau avec probabilité 1/2. L'échelle a 5 barreaux. Si la grenouille arrive tout en haut, elle saute immédiatement en bas de l'échelle et recommence.

On appelle $\{X_n, n \geq 0\}$ la position de la grenouille sur l'échelle. L'espace d'états est donc

$E = \{0, 1, 2, 3, ..., 5\}$. Si à un instant n la grenouille est au niveau $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ de l'échelle, alors à l'instant $n + 1$ elle sera

$$\begin{cases} \text{au barreau } x+1 \text{ avec probabilité } 1/2, \\ \text{au barreau } x-1 \text{ avec probabilité } 1/2, \end{cases}$$

ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} P\left(X_{n+1} = x + 1 | X_n = x\right) &= 1/2 = P\left(X_1 = x + 1 | X_0 = x\right), \\ P\left(X_{n+1} = x - 1 | X_n = x\right) &= 1/2 = P\left(X_1 = x - 1 | X_0 = x\right). \end{aligned}$$

Comme les probabilités de transitions ne dépendent pas de n, il semble qu'on est en présence d'une chaîne de Markov homogène. Si c'est le cas, on peut écrire la matrice de transition comme suit :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Si la grenouille se trouve à l'état 5, alors elle peut soit passer à l'état 4, soit passer à l'état 0. Il faut donc remplacer la dernière ligne de la matrice $\mathcal{P}$ par

$$(1/2, 0, 0, 1/2, 0)\,,$$

et si la grenouille est à l'état 0, elle ne peut que passer à l'état 1. La première ligne de la matrice est remplacée par

$$(0, 1, 0, 0, 0)\,.$$

Dans ce cas, le processus $\{X_n, n \geq 0\}$ est donc bien une chaîne de Markov homogène, avec matrice de transition $\mathcal{P}$.

Proposition 2.2

Toute matrice de transition $\mathcal{P} = (p_{ij})_{ij}$ avec $(i, j \in E)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $p_{ij} \geq 0 \quad \forall((i,j) \in E \times E)$.
2. $\forall i \in E$, *on a* $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$.

Démonstration

Les nombres p_{ij} sont des probabilités, donc des nombres positifs. Par ailleurs, pour chaque $i \in E$, l'application $B \longmapsto \sum_{j \in B} p_{ij}$ définit une mesure de probabilité sur l'ensemble $E, \forall B \in E$.

Remarque 2.3 : Une matrice $\mathcal{P}$, qui vérifie les conditions (1) et (2) précédentes, est appelée *matrice stochastique*.

Définition 2.5 (Graphe de transition)

Le *graphe de transition* d'une chaîne de Markov homogène est le graphe orienté, dont les sommets sont les états $(i, j, ...)$ joints deux à deux par l'arc orienté $(i \to j)$ si et seulement si $p_{ij} > 0$.

Exemple 2.2 (Disponibilité de deux machines) : Une unité de production comporte 02 machines qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine fonctionne toute la journée avec la probabilité p ou bien tombe en panne durant la journée avec probabilité $1-p$. L'unité de production possède 01 technicien travailleur de nuit qui peut réparer une machine tombée en panne et la remettre en état de marche pour le lendemain. En revenche, le technicien ne peut réparer qu'une seule machine par nuit.

On souhaite comprendre le comportement du processus $\{X_n, n \geq 1\}$ où X_n représente le nombre de machines en panne au matin du n-ième jour.

Alors $\{X_n, n \geq 0\}$ est un processus stochastique à temps discret et à espace d'états $E = \{0, 1\}$;

ie,

$$\begin{cases} 0 & : \text{aucune machine n'est en panne}\,; \\ 1 & : \text{une machine est en panne.} \end{cases}$$

Signification des différentes probabilités de transition à calculer

$p_{00}(n)$: Aucune panne ou bien une panne est survenue ;

$p_{10}(n)$: Une machine est tombée en panne et elle a été réparée la nuit, et la deuxième machine n'est pas tombée en panne ;

$p_{01}(n)$: Les deux machines sont tombées en panne ;

$p_{11}(n)$: L'autre machine est tombée en panne.

Après calcul, on aura :

$$
\begin{aligned}
p_{00}(n) &= P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) \\
&= p.p + p.(1-p) + (1-p).p \\
&= p^2 + 2p(1-p) \\
&= p(2-p).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{10}(n) &= P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) \\
&= p.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{01}(n) &= P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) \\
&= (1-p)^2 \\
&= (1-p)(1-p).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{11}(n) &= P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) \\
&= (1-p).
\end{aligned}
$$

Le processus $\{X_n, n \geq 0\}$ est-il sans mémoire ?

On vérifie par exemple : $p_{10}(n)$.

$$
\begin{aligned}
p_{10}(n) &= P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1, X_{n-1} = 1) \\
&= P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1, X_{n-1} = 0) \\
&= P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) \\
&= p,
\end{aligned}
$$

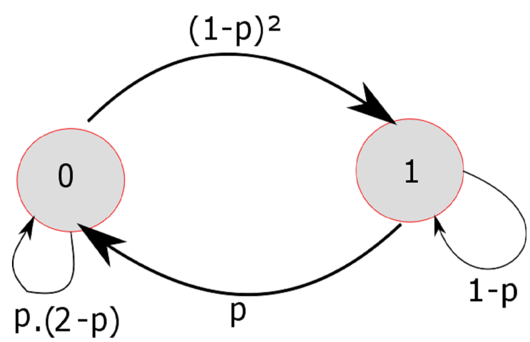
donc le processus $\{X_n, n \geq 0\}$ est bien une chaîne de Markov. On a aussi $p_{ij}(n) = p_{ij}$ $\forall n$, ce qui implique que $\{X_n, n \geq 0\}$ est bien une chaîne de Markov homogène dans le temps.

La matice de transition associée :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & (1-p) \end{pmatrix},$$

on remarque que les probabilités de transition sont indépendentes du temps (car la chaîne est homogène).

Le graphe de transition associé :



2.2 Propriétés fondamentales

2.2.1 Probabilités de transition en n étapes

La *matrice de transition en n pas* pour tout $n \geq 1$ est la matrice $\mathcal{P}^{(n)}$. Soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité que la chaîne de Markov passe de l'état i à l'état j en n transitions (étapes). Cette probabilité est donnée par :

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) \\ &= P(X_{n+k} = j | X_k = i) \qquad (n \geq 1, k \geq 1). \text{ (par stationnarité)} \end{aligned}$$

On pose également : $\mathcal{P}^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j}$ avec $\left((i,j) \in E^2\right)$.

2.2.2 Equations de Chapman Kolmogorov

Les probabilités de transition en n pas sont complètement déterminées par les probabilités de transition en un pas, c'est-à-dire par la matrice de transition. Ceci est explicité par les *équations de Chapman Kolmogorov,* que nous allons aborder de ce qui suit.

Proposition 2.3

Pour tous i, j et pour tout $0 \leq k \leq n$, nous avons

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(1)} . p_{kj}^{(n-1)}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j|X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in E} P(X_n = j, X_{n-1} = k|X_0 = i) \quad (n \geq 2) \\
&= \sum_{k\in E} P(X_n = j|X_{n-1} = k).P(X_{n-1} = k|X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in E} p_{kj}^{(1)}.p_{ik}^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

En d'autres termes, cette relation peut être exprimer sous la formule de multiplication matricielle suivante : $\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}^{(1)}\mathcal{P}^{(n-1)}$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

La proposition suivante découle de l'équation de Chapman-Kolmogorov et du fait que la matrice de transition en un pas est la matrice de transition elle même.

Proposition 2.4

$P^{(n)} = P^n$ *pour tout* $n \geq 0$.

Démonstration

Pour $n = 0$, nous avons $P^{(0)} = P^0 = I$ (matrice identité).

Supposons que $P^{(n)} = P^n$; ce qui implique :

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n+1)} &= P(X_{n+1} = j|X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in E} P(X_{n+1} = j, X_n = k|X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in E} P(X_{n+1} = j|X_n = k).P(X_n = k|X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in E} p_{kj}^{(1)}.p_{ik}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie : $\mathcal{P}^{(n+1)} = \mathcal{P}^{(1)}\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}.\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}.\mathcal{P}^{n} = \mathcal{P}^{n+1}$.

Corollaire 2.1

Pour tout $(i, j) \in E^2$ et tout couple (m, n) d'entiers positifs, on a la relation suivante :

$$P(X_{n+m} = j|X_0 = i) = \sum_{k\in E} P(X_m = k|X_0 = i).P(X_n = j|X_0 = k),$$

ou encore

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in E} p_{kj}^{(n)}.p_{ik}^{(m)}.$$

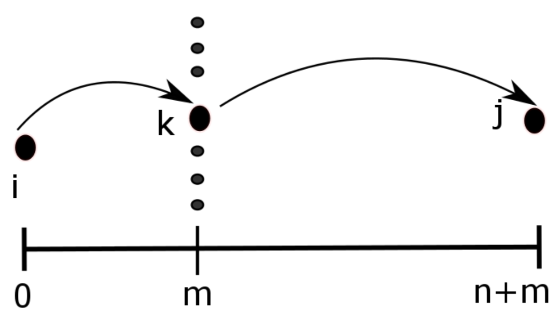
Remarque 2.4

Le résultat de ce corollaire peut se traduire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{P}^{(n+m)} = \mathcal{P}^{n+m} = \mathcal{P}^{n}.\mathcal{P}^{m} = \mathcal{P}^{(n)}.\mathcal{P}^{(m)}.$$

Pour la démonstration de cette relation, il suffit d'utiliser l'associativité du produit matriciel.

C'est plutôt cette équation qu'on appelle relation de Chapman-Kolmogorov, ce qui se traduit comme suit : aller de l'état i à l'état j en $(n + m)$ pas, c'est aller de l'état i à un certain état k en m pas et de l'état k à l'état j en n pas, comme le montre la figure suivante :



2.2.3 Loi de probabilité de X_n

L'analyse du régime transitoire d'une chaîne de Markov consiste à déterminer le vecteur $\pi^{(n)}$ des probabilités d'états qu'on note généralement $\pi_i^{(n)} = P\left(X_n = i\right)$, pour que la chaîne $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ se trouve dans l'état i après n pas.

La distribution de X_n peut être décrite sous la forme du vecteur ligne :

$$\pi^{(n)} = \left(\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, ...\right), \text{ dont la somme des termes vaut 1.}$$

Pour calculer le vecteur $\pi^{(n)}$, il faut connaître soit la valeur prise par X_0, c'est-à-dire l'état initial du processus, soit sa distribution initiale $\pi^{(0)} = \left(\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, ..., \pi_i^{(0)}, ...\right)$.

D'après le théorème des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P\left(X_n = i\right) &= \sum_{i \in E} P(X_0 = j).P(X_n = i | X_0 = j) \\ \pi_i^{(n)} &= \sum_{j \in E} \pi_j^{(0)}.p_{ji}^{(n)}. \end{aligned}$$

Nous avons aussi la notation matricielle de la relation qui est donnée comme suit :

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)}.\mathcal{P}^{(n)} = \pi^{(0)}.\mathcal{P}^n.$$

De façon analogue, on obtient :

$$\pi^{(n+1)} = \pi^{(n)}.\mathcal{P}.$$

Exemple 2.3 (Disponibilité de deux machines) : Nous allons reprendre l'exemple de la disponibilité des de deux machines vu dans la section précédente et nous supposons que les deux machines se trouvent initialement en état de fonctionnement, ie, $\pi^{(0)} = (1, 0)$.

La distribution de X_1 est donnée par : $\pi^{(1)} = \pi^{(0)}.\mathcal{P} = \left(p.(2-p), (1-p)^2\right)$.

La distribution de X_2 est donnée par : $\pi^{(2)} = \pi^{(1)}.\mathcal{P} = \pi^{(0)}.\mathcal{P}^2 = \left(p(1 + 2p - 3p^2 + p^3), (1-p)^2(1 + p - p^2)\right)$.

2.2.4 Chaîne de Markov à deux états

Dans le cas général d'une chaîne de Markov à deux états, représentés par 0 et 1, la matrice de transition est de la forme

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

où $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, on suppose ici que $0 < \alpha, \beta < 1$ de telle sorte que toutes les probabilités de transition sont strictement positives.

Pour le calcul de la matrice de transition en n pas, on a le résultat suivant :

Proposition 2.5

Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha\,(1-\alpha-\beta)^n & \alpha(1-(1-\alpha-\beta)^n) \\ \beta(1-(1-\alpha-\beta)^n) & \alpha + \beta\,(1-\alpha-\beta)^n \end{pmatrix}.$$

Démonstration

Pour montrer ce résultat, il suffit de diagonaliser la matrice $\mathcal{P}$.

On a $(1,1)^t$ et $(-\alpha,\beta)^t$ les vecteurs propores correspondant respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1-\alpha-\beta$ de la matrice $\mathcal{P}$. D'où

$$\mathcal{P} = M.D.M^{-1}, \tag{1}$$

Alors la relation (1) devient

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ -\frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta} \end{pmatrix},$$

où $M = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $M^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

comme conséquence de la relation (1), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^n &= \left(M.D.M^{-1}\right)^n = \left(M.D.M^{-1}\right)...\left(M.D.M^{-1}\right) \\
&= M.D...D.M^{-1} \\
&= M.D^n.M^{-1},
\end{aligned}$$

avec

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^n &= \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ -\frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}, \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}, \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta+\alpha\lambda_2^n & \alpha(1-\lambda_2^n) \\ \beta(1-\lambda_2^n) & \alpha+\beta\lambda_2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2.2.5 Distributions stationnaires et limites pour les chaînes de Markov homogènes

On constate souvent que la distribution $\pi^{(n)}$ converge vers une distribution limite lorsque $n \to \infty$. Dans ce cas, on dit que cette dernière définit le régime permanent de la chaîne de Markov. En pratique en admet généralement que le régime permanent d'une chaîne de Markov est atteint en un nombre fini de transitions.

Définition 2.6 (Distribution limite)

On dit qu'une chaîne de Markov *converge* vers π ou possède une *distribution limite* π si

$$\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \pi,$$

et cela indépendamment de la distribution initiale $\pi^{(0)}$.

Définition 2.7 (Chaîne de Markov Stationnaire)

Une chaîne de Markov est dite s*tationnaire* si la distribution $\pi^{(n)}$ est indépendante du temps n. En d'autres termes si la distribution initiale $\pi^{(0)}$ est une distribution stationnaire de la chaîne de Markov en question.

Définition 2.8 (Distribution Stationnaire)

Une distribution de probabilité discrète $\pi = (\pi_{0,}\pi_1, ..., \pi_n)$ est appelée *distribution stationnaire* par rapport à une matrice de transition $\mathcal{P}$ si

$$\pi.\mathcal{P} = \pi,$$

où π un vecteur propore à gauche de la matrice $\mathcal{P}$ associé à la valeur propre 1, avec

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1, \quad \pi_j \geq 0, \quad \forall j;$$

ou bien

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_j . p_{ij}.$$

Définition 2.9 (Distribution ergodique)

Une distribution stationnaire est appelée *distribution ergodique* si

$$\pi_j > 0, \quad \forall j.$$

Existence et unicité des distributions stationnaires

Dans le résultat que nous allons énoncer ci-dessous, nous allons répondre aux questions suivantes : une chaîne de Markov a toujours une distribution stationnaire ? peut elle en avoir plusieurs ?

Théorème 2.1

Pour une chaîne de Markov finie, il existe toujours au moins une distribution stationnaire. Mais une chaîne de Markov finie n'admet pas toujours une unique distribution stationnaire.

Nous allons énoncer le critère d'unicité d'une distribution stationnaire.

Théorème 2.2

Une chaîne de Markov finie admet une unique distribution stationnaire si et seulement si elle comprend une seule classe récurrente.

Exemple 2.4 : Considérons la chaîne de Markov de matrice de transition suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Cette chaîne de Markov admet une infinité de distributions stationnaires définies par

$$(0, 1-2\alpha, \alpha, \alpha)\,, \quad \text{avec } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Remarque 2.5 : Une chaîne de Markov infinie n'admet pas toujours de distribution stationnaire. Par exemple, la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui à i associe $i+1$ avec probabilité 1, i.e., qui possède la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

n'admet pas de loi stationnaire.

Recherche des distributions stationnaires

Pour calculer les composantes du vecteur $\pi = (\pi_0,\pi_1, ..., \pi_n)$ d'une chaîne de Markov finie, on résout le système d'équations linéaire suivant :

$$\begin{cases} \pi = \pi.\mathcal{P} \\ \sum_{k\in E} \pi_k = 1. \end{cases}$$

Exemple 2.5 : Considérons la matrice de transition

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

d'une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ avec $\alpha \in [0, 1]$.

Recherchons les solutions stationnaires :

La recherche de ces solutions stationnaires passe par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \pi = \pi.\mathcal{P} \\ \sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 = (1-\alpha)\,\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = \alpha\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 \\ \sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1 \end{cases}.$$

Les équations 1) et 3) sont identiques d'où

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 \\ \alpha\pi_0 = \pi_2 - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{2}{3}\pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1 \end{cases},$$

On en déduit

$$\pi_2 = 3\alpha\pi_0,\ \pi_1 = \alpha\pi_0,\ \pi_3 = 2\alpha\pi_0.$$

Cette dernière relation nous donne

$$\pi_0 \left(1+\alpha+3\alpha+2\alpha\right)=1 \Rightarrow \pi_0 \left(1+6\alpha\right)=1.$$

Par conséquent, la distribution stationnaire est donnée par :

$$\pi=\left(\frac{1}{1+6\alpha},\frac{\alpha}{1+6\alpha},\frac{3\alpha}{1+6\alpha},\frac{2\alpha}{1+6\alpha}\right).$$

On notera que $\alpha \in [0,1]$ ce qui impliquera que $\alpha \neq \frac{-1}{6}$.

2.3 Classification des états d'une chaîne de Markov

2.3.1 Relation de communication entre états

Définition 2.10 (Etat accessible)

Un état j est dit *accessible* à partir de l'état i, s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$, et l'on note $i \longrightarrow j$.

Proposition 2.6

La relation d'accessibilité entre états est réflexive et transitive

Démonstration.

a) **Réflexivité** : Comme $p_{ii}^{(0)} = P(X_0 = i|X_0 = i) = 1$, pour tout état i, on a bien $i \longrightarrow i$.

b) **Transitivité** : Supposons que pour les états i, j et k on ait : $i \longrightarrow j$ et $j \longrightarrow k$. Alors, il existe m et n, entiers positifs, tels que : $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{jk}^{(n)} > 0$. D'où, on aura

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{l \in E} p_{il}^{(m)} p_{lk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0,$$

ce qui montre bien que l'on a : $i \longrightarrow k$ une relation transitive.

Définition 2.11 (Etats communiquants)

On dit que deux états i et j d'une chaîne de Markov *communiquent, si* $i \longrightarrow j$ et $j \longrightarrow i$. On note $i \longleftrightarrow j$.

Proposition 2.7

La relation de communication entre les états d'une chaîne de Markov est une relation d'équivalence. On a donc

$i)$ *(Réflexivité) Tout état i de la chaîne communique avec lui même, ie.* $i \longrightarrow i$.

$ii)$ *(Symétrie) Si un état i communique avec un état j,alors la réciproque est vraie, ie,* $i \longrightarrow j \Leftrightarrow j \longrightarrow i$.

$iii)$ (*Transitivité) Si un état i communique avec un état j qui lui même communique avec un état k, alors l'état i communique avec l'état k, i.e. si* $i \longrightarrow j$ *et* $j \longrightarrow k$ *alors* $i \longleftrightarrow k$.

Démonstration.

Les propriétés de réflexivité et de transitivité déjà vérifiées pour la relation d'accessibilité (voir, la proposition 2.7). La symétrie découle directement de la définition de la communication.

Remarques 2.6

1. Il est clair que tout état d'une chaîne de Markov communique avec lui même, puisque l'on a $p_{ii}^{(0)} = 1$. Un état est appelé *état de retour*, s'il existe $n \geq 1$ tel que $p_{ii}^{(n)} > 0$. Il existe des états i tels que pour tout $n \geq 1$ on ait $p_{ii}^{(n)} = 0$. De tels états sont appelés *états de non retour.*
2. L'ensemble des états E se partitionne en classes d'équivalence, disjointes et non vides, dites *classes indécomposables.* Si C_1 et C_2 sont deux classes distinctes, on peut eventuellement aller de C_1 à C_2 , mais on ne peut alors retourner de C_2 à C_1 .En revanche, tous les états d'une même classe communiquent. Certaines classes peuvent ne comporter qu'un seul élément ; ce sont les *singletons.* Comme exemples :

   - Un *état de non retour* i : $p_{ii}^{(0)} = 1$, $p_{ii}^{(n)} = 0$ pour $n \geq 1$;

- Un *état absorbant* i : $p_{ii}^{(0)} = 1$, $p_{ii}^{(n)} = 1$ pour $n \geq 1$.

Définition 2.12 (Irréductibilité)

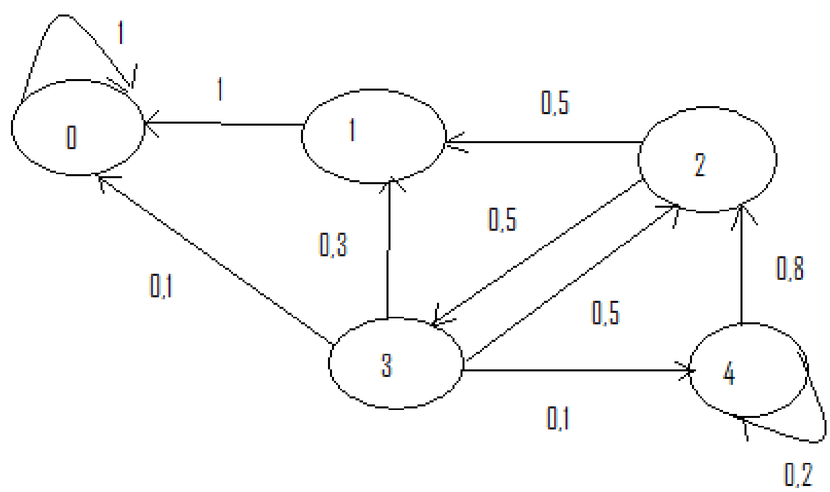
Une chaîne de Markov est dite *irréductible* si elle ne contient qu'une seule classe d'équivalence. Autrement dit si tous les états de la chaîne communiquent entre eux.

Exemple 2.6 : Considérons la chaîne de Markov à espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le graphe de transition de la chaîne de Markov.
2. Donner ses classes d'équivalence.

1) Le graphe de transition associé à la chaîne

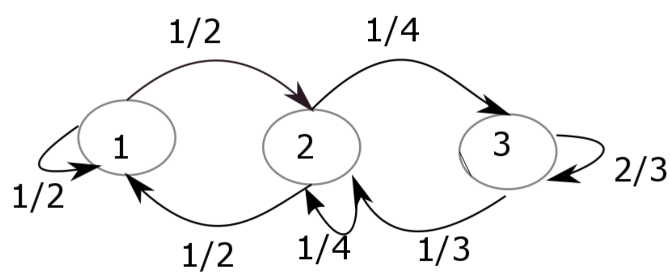


2) La chaîne comporte trois classes : $C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{1\}$ et $C_2 = \{2, 3, 4\}$.

Exemple 2.7 : Considérons la chaîne de Markov dont l'espace des états est $E = \{1, 2, 3\}$, la matrice de transition :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

et le graphe de transition



Cette chaîne est irréductible. Tous les états communiquent. Bien que $p_{13} = p_{31} = 0$ et qu'il n' y a donc pas de flèche entre les états 1 et 3, on a, en revanche, pour tout $n \geq 2$ et tout couple d'états (i, j), l'inégalité stricte : $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Définition 2.13 (Un état absorbant)

Un état i d'une chaîne de Makov est dit *absorbant*, si la chaîne ne peut plus quitter cet état une fois qu'elle y est entrée, en d'autre termes si $p_{ii} = 1$.

Définition 2.14 (Chaîne de Markov absorbante)

Une chaîne de Markov est dite *absorbante* si elle comprend au moins un état absorbant et si l'on peut passer de n'importe quel état à un état absorbant.

2.3.2 Etats récurrents et transients

Définition 2.15 (Temps d'atteinte)

Soit i un état quelconque dans l'ensemble E de la chaîne de Markov $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. On appelle *temps d'atteinte* (ou *temps de premier passage à l'état* i), la variable aléatoire T_i définie par

$$T_i = \inf \{n \geq 1 : X_n = i\} ,$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

- Considérons deux états i et j dans l'ensemble E. Notons f_{ij} la probabilité que, partant de l'état i, la chaîne passe au moins une fois par l'état j, i.e.

$$f_{ij} \ = P(T_j < +\infty | X_0 = i).$$

- La probabilité f_{ii} est la probabilité que, partant de l'état i, la chaîne retourne à l'état i en un temps fini.
- Soit $f_{ij}^{(n)}$ la probabilité que, partant de l'état i la chaîne aille, pour la première fois, à l'état j au temps n, i.e.

$$f_{ij}^{(n)} = P(T_j = n | X_0 = i) = P(X_n = j, X_k \neq j, \forall k = 1, ...n - 1 | X_0 = i),$$

  avec la convention $f_{ij}^{(0)} = 0$.

Proposition 2.8

Pour tout états i et *j et tout entier $n \geq 1$*, on a :

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

Démonstration.

Pour tout (i, j) dans E^2, on a :

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) = P(\{X_n = j\}, \bigcup_{k=1}^{n} \{T_j = k\} | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P\left(\{X_n = j\}, \{T_j = k\} | X_0 = i\}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\{X_n = j\}, \{T_j = k\} | X_0 = i\}\right) + f_{ij}^{(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\{X_n = j\} \,|\, \{T_j = k\}, X_0 = i\}\right) P\left(\{T_j = k\} | X_0 = i\}\right) + f_{ij}^{(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\{X_n = j\} \,| X_k = j\right) P\left(\{T_j = k\} | X_0 = i\right) + f_{ij}^{(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)} + f_{ij}^{(n)},
\end{aligned}$$

comme on a $p_{jj}^{(0)} = 1$ et $f_{ij}^{(0)} = 0$, on peut écrire

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

Remarque 2.7 : Le résultat de la proposition 2.8 permet de déterminer les $f_{ij}^{(n)}$ par récurrence à partir des probabilités $p_{ij}^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
f_{ij}^{(1)} &= p_{ij}^{(1)}; \\
f_{ij}^{(n)} &= p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \qquad (n \geq 2).
\end{aligned}$$

Avec $f_{ij} = \sum_{n\geq 1} f_{ij}^{(n)}$.

Définition 2.16

- Un état i est dit *transient* ou *transitoire* si $f_{ii} < 1$.
- Un état i est dit *récurrent* si $f_{ii} = 1$.
- Un état i est dit *récurrent positif* si $\mu_i = E\left[T_i | X_0 = i\right] < +\infty$. (avec $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n.f_{ii}^{(n)}$ est le temps moyen de retour).
- Un état i est dit *récurrent nul* $\mu_i = +\infty$.

Définition 2.17

Un état i est *récurrent positif* (ou *non nul*) s'il est récurrent et si le temps moyen μ_i de retour est fini. Dans le cas où le temps moyen de retour est infini, l'état est dit *récurrent nul*.

Définition 2.18 (nombre de passages)

La variable aléatoire $N_i = \sum_{n=1}^{\infty} 1_i(X_n)$ dénombre les passages de la chaîne de Markov par l'état i (1_i fonction indicatrice de l'état i, vaut 1 si $X_n = i$ et 0 si $X_n \neq i$).

Théorème 2.3

Le nombre moyen de retours à l'état i, *défini par l'espérance conditionnelle* $E\left(N_i | X_0 = i\right)$, *est égal à*

$$E\left(N_i | X_0 = i\right) = \sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)}.$$

Démonstration : $E\left(1_i(X_n) | X_0 = i\right) = P\left(X_n = i | X_0 = i\right) = p_{ii}^{(n)}$. D'où le résultat par sommation.

Théorème 2.4 (Caractérisation des états)

- *L'état* i *est transitoire* $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)} < +\infty$;
- *L'état* i *est récurrent nul* $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$;
- *L'état* i *est récurrent positif* $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} p_{ii}^{(n)} > 0$.

Remarques 2.8

1. Les états récurrents nuls ne peuvent exister que dans les chaînes infinies.
2. Les caractéristiques précédentes de récurrence et de la transience sont surtout utiles à l'étude des chaînes infinies. En effet, dans le cas des chaînes finies, l'interprétation du graphe de transition structuré de façon à faire apparaître les différentes classes d'équivalences, permet d'identifier facilement les classes récurrentes et transitoires.

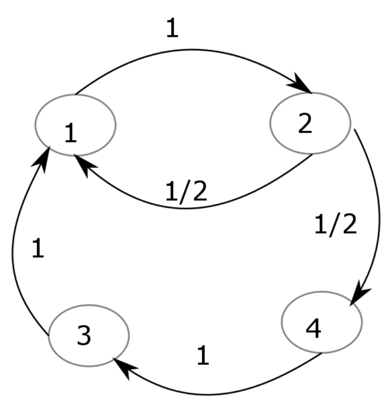
Définition 2.19 (Etat périodique)

Un état i est périodique de période $d(i)$, si les temps de retour à i sont $d(i)$ périodique où $d(i) = PGCD\{n \geq 1 \text{ tq } P_{ii}^{(n)} > 0 \ \}$. Si $d(i) = 1$, l'état i est dit apériodique.

Remarques 2.9

Un état i tel que $P_{ii} > 0$ est nécessairement apériodique, car on peut y retourner en tout temps entier.

Exemple : Considérons la chaîne de Markov dont le graphe de transition est donné par



Nous avons

$$d(1) = pgcd\{n \geq 1, \ p_{11}^{(n)} > 0\} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\},$$

$$d(2) = pgcd\{n \geq 1, \ p_{22}^{(n)} > 0\} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\},$$

$$d(3) = pgcd\{n \geq 1,\ p_{33}^{(n)} > 0\} = \{4, 6, 8, 10, 12, ...\},$$

$$d(1) = pgcd\{n \geq 1,\ p_{44}^{(n)} > 0\} = \{4, 6, 8, 10, 12, ...\}.$$

On constate que la période des états est 2.

Théorème 2.5

Les propriétés suivantes sont des propriétés de classe :

- *Récurrence*
- *Récurrence nulle*
- *Récurrence positive*
- *Transience.*
- $i \longleftrightarrow j \Rightarrow d(i) = d(j)$.

Démonstration.

- Soient i et j deux états qui communiquent. Par définition, il existe donc m et n tels que : $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ji}^{(n)} > 0$. En utilisant la minoration $p_{jj}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)}$, on aura

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_{jj}^{(m+n+k)} \geq \sum_{k=0}^{+\infty} p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)} = p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)} \sum_{k=0}^{+\infty} p_{ii}^{(k)} = +\infty,$$

puisque l'état j est supposé récurrent. L'état j est donc lui aussi récurrent.

- Supposons que i est récurrent nul $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} p_{ii}^{(n)} = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$; Si $i \longleftrightarrow j$ alors il existe m et n tels que : $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ij}^{(n)} > 0$.

$p_{ii}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{jj}^{(k)} p_{ij}^{(m)}$. Si $\lim_{k \to \infty} p_{ii}^{(m+n+k)} = 0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} p_{jj}^{(k)} = 0$, ce qui implique que j est récurrent nul.

- Supposons que i est récurrent positif $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} p_{ii}^{(n)} \neq 0$; on veut savoir si $i \longleftrightarrow j \Rightarrow j$ est récurrent positif.

Nous allons procéder par absurde, en supposant que j est récurrent nul, ce qui implique que l'état i est récurrent nul, ce qui contredit notre hypothèse, donc l'état j est récurrent positif.

- Supposons que l'état i est transitoire et $i \longleftrightarrow j$, alors l'état j est transitoire. Si j n'est pas transitoire, alors j est récurrent, ce qui implique i est récurrent, ce qui est absurde. Alors l'état j est est transitoire.

- On a $i \longleftrightarrow j \Leftrightarrow \exists\, n, m$ tels que $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ij}^{(n)} > 0$. Alors $p_{ii}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{jj}^{(k)} p_{ij}^{(m)}$

Si on suppose que $p_{jj}^{(k)} > 0$, alors $p_{ii}^{(m+n+k)} > 0$, c'est-à-dire que $m + n + k$ est un multiple de $d(i)$, la période de i. Mais alors, on a aussi

$$p_{jj}^{(2k)} \geq p_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(k)} > 0,$$

d'où $n + 2k + m$ est un multiple de $d(i)$. Par conséquent, la différence, soit $(n + 2k + m) - (n + k + m) = k$, est multiple de $d(i)$. Par la définition de la période de j, on a alors $d(j) \geq d(i)$. Inversement, on a $d(j) \leq d(i)$ par symétrie. On conclut donc que $d(i) = d(j)$.

Proposition 2.9

Soit j un état transient. Alors, pour tout état i, on a :

$$\sum_{n\geq 0} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{jj}}; \tag{2}$$

$$\sum_{n\geq 1} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} \quad (i \neq j). \tag{3}$$

En particulier, la série de terme général $p_{ij}^{(n)}$ est convergente et $p_{ij}^{(n)} \to 0$, lorsque n tend vers l'infini.

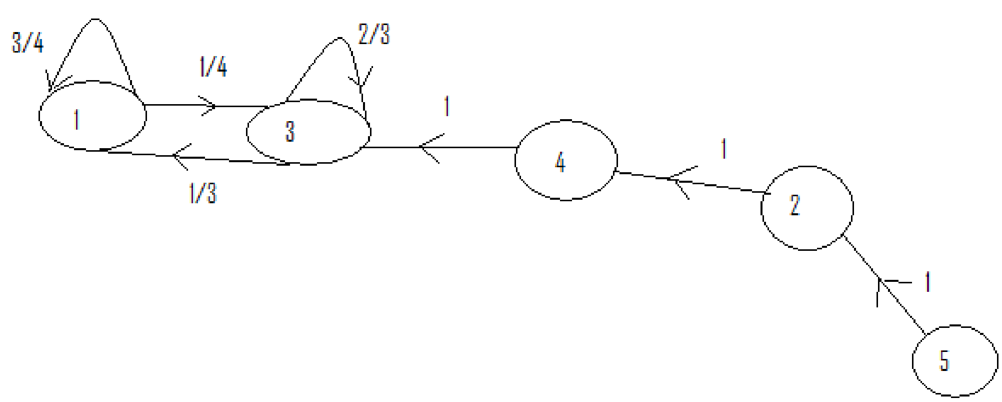
Définition 2.20 (ergodicité)

Un état récurrent positif apériodique est dit *ergodique*. C'est le cas en particulier d'un état i tel que $p_{ii} = 1$, qui est *absorbant*.

Exemple 2.8 : Considérons la chaîne de Markov dont l'espace des états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de matrice de transition :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et de graphe de transition



La chaîne de Markov dans cet exemple possède quatre classes :

$C_1 = \{1, 3\}$ est récurrente positive. Elle est aussi apériodique, car $d(1) = 1$;

$C_2 = \{2\}$ est transitoire. Elle est aussi apériodique, car $d(2) = 0$.

$C_4 = \{4\}$ est transitoire. Elle est aussi apériodique, car $d(4) = 0$.

$C_5 = \{5\}$ est transitoire. Elle est aussi apériodique, car $d(5) = 0$.

2.3.3 Chaînes de Markov absorbantes

Définition 2.21 (Chaîne de Markov absorbante)

Une chaîne de Markov est *absorbante* s'il existe, pour tout état, un état absorbant atteignable depuis cet état. Une chaîne non absorbante est dite transiente.

Considérons une chaîne de Markov homogène de matrice des probabilités de transition $\mathcal{P}$ et d'espace d'états E=$\mathcal{T} \cup \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 ... \cup \mathcal{C}_r$, où

- $\mathcal{T}$ est l'ensemble des états transitoires de la chaîne de Markov.
- $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 ... \cup \mathcal{C}_r$ sont les sous classes récurrentes

Nous conviendrons de numéroter les états de la chaîne de manière à placer d'abord les états non transitoires (non absorbants) et ensuite les états récurrents (absorbants). La matrice des probabilités de transitions $\mathcal{P}$ peut alors s'écrire comme suit :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où

- Q est une sous matrice carrée associée aux états transitoires ;
- C est une sous matrice carrée associée aux états récurrents ;
- R est une sous matrice des probabilités de transitions entre un état transitoire et un état récurrent.

D'autre part, il est facile de montrer par récurrence que

$$\mathcal{P}^n = \begin{pmatrix} Q^n & \left(I + Q + ... + Q^{n-1}\right) R \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

avec I est la matrice identité.

Proposition 2.10

Soit $\mathcal{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov absorante. Alors

1. *On a*
$$\lim_{n\to\infty} Q^n = 0.$$

2. *La matrice $I-Q$ est inversible, et son inverse vaut*
$$(I-Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k.$$

Démonstration.

1) Si j est transitoire, nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}}.$$

Si i et j sont transitoires, alors, $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ converge,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (p^n)_{ij} = 0.$$

D'autre part, on a

$$(Q^n)_{ij} = p_{ij}^{(n)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (Q^n)_{ij} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Q^n = 0.$$

2) Supposons qu'il existe un vecteur x tel que $Qx = x$ c'est-à-dire $(I-Q)\,x = 0$. Dans ce cas, on a

$$x = Qx = Q^2x = ... = Q^nx = ... = \lim_{n\to\infty} Q^nx = 0.$$

Ce qui montre que Q n'admet pas la valeur propre 1. Par conséquent, la matrice $I-Q$ est inversible. Enfin, comme

$$(I-Q)\sum_{k=0}^{n} Q^k = I - Q^{n+1} \text{ converge vers } I \text{ lorsque } n\to\infty,$$

en multipliant les deux côtés de l'équation précédente par $(I-Q)^{-1}$, on aura

$$(I-Q)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}Q^k.$$

Notons $D=(I-Q)^{-1}$ *la matrice fondamentale* de la chaîne de Markov.

Remarque 2.10 : La matrice fondamentale d'une chaîne de Markov absorbante permet d'extraire de nombreuses propriétés de cette chaîne. En particulier, elle permet de déterminer le nombre moyen de visites en un état donné avant absorption, l'espérance du temps jusqu'à absorption partant d'un état donné, ainsi que les probabilités d'être absorbé dans un état donné k, étant parti d'un état i.

Si $C=I$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{P}^n=\begin{pmatrix}0 & (I-Q)^{-1}R\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & DR\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

Théorème 2.7

Soit D la matrice fondamentale de la chaîne et $\tau_A=\min\{n\geq 0: X_n\in\mathcal{A}\}$ (avec $\mathcal{A}$ une partie de E). Alors.

1. *l'élément D_{ij} de la matrice D est l'espérance du nombre de passages en j partant de i :*

$$E_i\left(\sum_{k\geq 0}1_{\{X_k=j\}}\right)=D_{ij},\ \textit{pour tout}\ \ i,j\in\mathcal{A};$$

2. *τ_A est la variable aléatoire donnant le temps jusqu'à absorption. Alors*

$$E_i(\tau_A)=\sum_{j\in\mathcal{A}}D_{ij},\ \textit{pour tout}\ i\in\mathcal{A};$$

3. *Les éléments $(DR)_{ij}$ de la matrice DR donnent les probabilités d'être absorbé dans les différents états :*

$$P_i\left(X_{\tau_A}=j\right)=(DR)_{ij}\ \ \textit{pour tout}\ i,j\in\mathcal{A}.$$

Démonstration.

1. Soient i, j deux états non absorbants. Alors,

$$\begin{aligned} E_i\left(\sum_{n\geq 0} 1_{\{X_k=j\}}\right) &= \sum_{n\geq 0} P\left(X_n=j\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\mathcal{P}^n\right)_{ij} \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(Q^n\right)_{ij} \\ &= D_{ij}. \end{aligned}$$

2. On peut observer à partir du résultat précédent que,

$$\begin{aligned} E_i\left(\tau_A\right) &= E_i\left(\sum_{n\geq 0} 1_{\{X_n\in\mathcal{A}\}}\right) \\ &= \sum_{j\in\mathcal{A}} E_i\left(\sum_{n\geq 0} 1_{\{X_n=j\}}\right) \\ &= \sum_{j\in\mathcal{A}} D_{ij}. \end{aligned}$$

3. Pour tout $i, j \in \mathcal{A}$,

$$
\begin{aligned}
P_i\left(X_{\tau_A}=j\right) &= \sum_{n\geq 1} P_i\left(X_n=j, X_{n-1}\in\mathcal{A}\right) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{j\in\mathcal{A}} P_i\left(X_n=j, X_{n-1}=k\right) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{j\in\mathcal{A}} P\left(X_n=j|X_{n-1}=k\right) P_i\left(X_{n-1}=k\right) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{j\in\mathcal{A}} R_{kj}\left(Q^{n-1}\right)_{ik} \\
&= \sum_{n\geq 1}\left(Q^{n-1}R\right)_{ij} \\
&= (DR)_{ij}\,.
\end{aligned}
$$

2.4 Exercices d'application

2.4.1 Exercices corrigés

Exercice 1. Dans un pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps de lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Peut on modéliser cette situation avec une chaîne de Markov ? si oui donner sa matrice de probabilités de transition.
2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?
3. Supposons que nous n'avons que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

Corrigé de l'exercice 1.

1. Oui, la situation peut être modélisée par une chaîne de Markov car le temps pour un jour ne dépend que du temps du jour précédent. L'ensemble des états est $E = \{BT, PL, N\}$. La matrice des probabilités de transition associée est

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Pour déterminer le temps du surlendemain, on doit calculer la matrice $\mathcal{P}^2$, et le résultat est donné par la première ligne de cette matrice car on veut déterminer les probabilités à partir d'un jour de beau temps.

$$\mathcal{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & \frac{7}{16} \end{pmatrix},$$

donc, $p^2_{BT,BT} = \frac{1}{4}$; $p^2_{BT,PL} = \frac{3}{8}$; $p^2_{BT,N} = \frac{3}{8}$. Ainsi, si un jour il fait beau, le temps le plus probable pour le surlendemain est la pluie ou la neige.

3. Supposons dans le deuxième cas, l'ensemble des états de la chaîne est $E' = \{BT, MT\}$, puisque la pluie et la neige se comporte de la même façon pour ce qui est des transitions. Pour la première ligne, on a toujours, $p'_{BT,BT} = 0$, mais maintenant, $p'_{BT,MT} = p_{BT,PL} + p_{BT,N} = 1$. Pour la deuxième ligne, on a $p'_{MT,BT} = \frac{1}{4}$ car $p_{PL,BT} = p_{N,BT} = \frac{1}{4}$ et $p'_{MT,MT} = \frac{3}{4}$ Car $p_{PL,PL} + p_{PL,N} = p_{N,PL} + p_{N,N} = \frac{3}{4}$. ce qui donne

$$\mathcal{P}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On lance une pièce équilibrée, les résultats des lancers sont des variables aléatoires indépendantes $Y_0, Y_1, \ldots$ à valeurs 0 ou 1. Pour tout $n \geq 1$, on note $X_n = Y_n + Y_{n-1}$.

1. Calculer $P(X_3 = 0 | X_1 = 0, X_2 = 1)$ et $P(X_3 = 0 | X_2 = 1)$.

2. Est-ce que (X_n) est une chaîne de Markov ?

Corrigé de l'exercice 2.

1. Si $X_1 = 0$ et $X_0 = 1$, ce qui signifie que $Y_0 = Y_1 = 0$ et $Y_2 = 1$, auquel cas $X_3 \in \{1, 2\}$, donc $P(X_3 = 0 | X_1 = 0, X_2 = 1) = 0$. Par contre

$$P(X_3 = 0 | X_2 = 1) = \frac{P(X_3 = 0, Y_2 = 0, Y_1 = 1)}{P(X_2 = 1)} = \frac{(\frac{1}{2})^3}{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}.$$

2. D'après les résultats précédents, l'exemple modélisé par (X_n) n'est pas une chaîne de Markov.

Exercice 3. On considère 4 boules numérotées de 1 à 4, réparties en deux urnes A et B. A chaque instant, on tire un nombre k au hasard entre 1 et 4, on enlève la boule numéro k de l'urne dans laquelle elle se trouve et on la remet au hasard dans l'une des deux urnes. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.

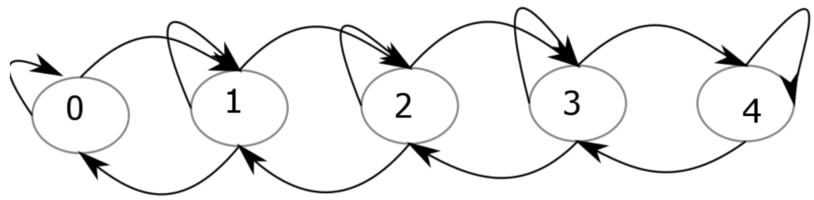
1. Justifier que (X_n) est une chaîne de Markov.
2. Donner la matrice et le graphe de transition de (X_n).
3. La chaîne est-elle irréductible ? apériodique ?
4. Lois stationnaires ?

Corrigé de l'exercice 3.

1. (X_n) est une chaîne de Markov, car l'opération à chaque étape est aléatoire, mais ne dépend que de la composition présente des urnes, indépendamment de ce qui s'est passé au préalable.
2. La chaîne prend ses valeurs dans l'espace des états $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Sa matrice de transition est :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le graphe de transition est donné comme suit :



1. On peut aller de tout état à tout autre, ce qui implique que la chaîne est irréductible. Par ailleurs, on peut boucler sur chaque état, donc elle est apériodique.

4. L'irréductibilité de la chaîne entraîne l'existence d'une unique loi stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_{2,}\pi_{3,}\pi_4)$, avec $\sum_{i=0}^{4} \pi_i = 1$. Pour déterminer cette loi stationnaire, on doit résoudre le système d'équation $\pi.\mathcal{P} = \pi$. Après calculs, on aura :

$$\pi = \left(\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}\right).$$

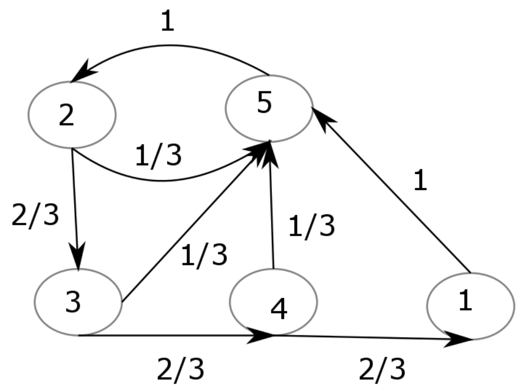
Exercice 4. Considérons une matrice des probabilités de transition d'une chaîne de Markov avec espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Tracer le graphe de transition correspondant à la chaîne
2. Donner les classes de communication de la chaîne.
3. Soit $\pi = (8x, y, 18x, 12x, 27x)$ le vecteur de la distribution stationnaire pour la matrice $\mathcal{P}$, déterminer les valeurs de x et y.
4. Si la chaîne commence de l'état 1, quel est le nombre moyen d'étapes pour retourner à l'état 1?

Corrigé de l'exercice 4.

1. Le graphe de transition



2. La chaîne possède une seule classe, ce qui implique qu'elle est irréductible.
3. Pour déterminer les valeurs de x et y, on doit résoudre le système suivant :

$$\pi = \pi.\mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_4 \\ \pi_2 = \pi_5 \\ \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 \\ \pi_4 = \frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_5 = \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4 \end{cases},$$

de l'équation 2,on a $y = 27x$. D'autre part, on a $\sum_{k=0}^{4} \pi_k = 1$ implique que

$$8x + 27x + 18x + 12x + 27x = 1,$$

donc, $x = \frac{1}{92}$ et $y = \frac{27}{92}$.

4. Si la chaîne démarre de l'état 1, le nombre moyen d'étapes pour qu'elle revienne à l'état 1 est :

$$\frac{1}{\pi_1} = \frac{92}{8} = \frac{23}{2}.$$

2.4.2 Exercices non corrigés

Exercice 1. On dispose de deux machines identiques fonctionnant idépendamment et pouvant tomber en panne au cours d'une journée avec la probabilité $q = \frac{1}{4}$. On note X_n le nombre de machines en panne au début de la n-ième journée.

1. On suppose que, si une machine est tombée en panne un jour, elle est réparée la nuit suivante et qu'on ne peut réparer qu'une machine dans la nuit. Montrer que l'on peut définir ainsi une chaîne de Markov dont on déterminera le graphe, la matrice de transition et eventuellement les distributions stationnaires.
2. Même question en supposant qu'une machine en panne n'est réparée que le lendemain, le réparateur ne pouvant toujours réparer qu'une machine dans la journée.
3. Le réparateur, de plus en plus paresseux, met maintenant 2 jours pour réparer une seule machine. Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ n'est plus une chaîne de Markov, mais que l'on peut construire un espace de 5 états permettant de décrire le processus par une chaîne de Markov dont on donnera le graphe des transitions. Calculer la probabilité que les deux machines fonctionnent après n jours ($n = 1, n = 2$ et $n = 3$) si elles fonctionnent initialement.

Exercice 2. Considérons une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ à valeurs dans l'espace des états $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et de matrice de transition

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Etablir la classification des états de la chaîne.
2. Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.
3. Pour chaque état transitoire $i \in E$, calculer le temps moyen d'absorption dans l'état absorbant pour la chaîne issue de l'état i.

Exercice 3. On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ sur l'espace d'états $E = \{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les classes de communication, la chaîne est-elle irréductible ?
2. Quels sont les états récurrents ? transitoires ?
3. Pour $y \in \{1, 2, 3\}$ on note

$$N_y = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{\{X_n = y\}}$$

le nombre total de passages en y. Calculer $E_x(N_y)$ pour tous $x, y \in \{1, 2, 3\}$.

4. Soit

$$T_1 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}$$

le temps d'atteinte de l'état 1. Déterminer $E_x(T_1)$ pour tout x.

Exercice 4. On considère une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et de matrice de transition

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer

1. les états transitoires et récurrents de la chaîne ;
2. la probabilité d'absorption en $\{4\}$ partant de l'état 2;
3. le temps d'absorption dans $\{1, 4\}$ partant de l'état 2.

Exercice 5. Considérons une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ à valeurs dans l'espace des états $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et de matrice de transition

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{10} & 0 & \frac{5}{10} & 0 \\ \frac{5}{10} & 0 & \frac{5}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{10} & 0 & \frac{5}{10} & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents, transitoires de la chaîne ?
2. Déterminer la (ou les) loi(s) stationnaire(s).
3. Sans faire aucun calcul, déterminer les probabilités d'absorption dans la (ou les) classe(s) de récurrence.

Exercice 6. Considérons une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ à valeurs dans l'espace des états $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et de matrice de transition

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les classes de communication et classifier les états.
2. La chaîne est-elle irréductible ?
3. Calculer $P(X_2 = 1 | X_0 = 5)$ et $P(X_n = 4 | X_0 = 3)$ pour tout $n \geq 1$.
4. Soit $T_x = \inf\{n > 0 : X_n = x\}$. Calculer $P(T_2 < T_4 | X_0 = 3)$.

Exercice 7. On considère la matrice $\mathcal{P}$ suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{8}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \geq 0$.

1. Pour quelle valeur de α, $\mathcal{P}$ est-elle une matrice stochastique ?
2. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov associée à la matrice de transition $\mathcal{P}$ (pour la valeur de α trouvée à la question précédente). Donner le graphe de transition associé à cette chaîne de Markov.
3. Classifier les états de la chaîne.
4. Donner son graphe réduit.
5. La chaîne est-elle irréductible ?
6. Calculer les probabilités suivantes : $P(X_2 = 3|X_0 = 1)$; $P(X_2 = 4|X_0 = 7)$; $P(X_2 = 5|X_0 = 5)$.

Bibliographie

[1] Aknouche, A. (2007-2008). Cours de processus aléatoire, première année magister. Faculté de mathématiques, USTHB.

[2] Bassel, S. (2009). Processus stochastiques pour l'ingénieur. Presses polytechniques et universitaires romandes.

[3] Brémaud, P. (2009). Initiation aux probabilités et aux chaînes de Markov. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[4] Caumel, Y. (2011). Probabilités et processus stochastiques. Springer, Paris.

[5] Chung, K.L. (1960). Markov chains with stationary transition probabilites. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[6] Foata, D. et Fuchs, A. (2004). Processus stochastique, processus de poisson, chaînes de Markov et Martingales. Dunod, Paris.

[7] Franchi, J. (2013). Processus aléatoires à temps discret : cours exercices et problèmes corrigés. Ellipses Marketings, Paris.

[8] Kemeny, J. G. et Snell, J. L. (1997). Finite Markov Chains. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[9] Norris, J. R. (1997). Markov chains. Cambridge University Press.

[10] Ruegg, A. (1988). Processus stochastiques avec applications aux phénomènes d'attente et de fiabilité. Presses polytechniques romandes.