

M^{me} Yousfi

Examen de rattrapage Maths II

(Durée 2h)

Exercice 1. (6 points)

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

- Calculer le déterminant de la matrice A .
- Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle inversible ?
- Si $\alpha = 0$, calculer l'inverse de A .

Exercice 2. (8 points)

I) Soit l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' = -y + x \dots \dots \dots (1)$$

- Résoudre l'équation différentielle (1).
- Déterminer la solution générale de (1) vérifiant $y(0) = 0$.

II) Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' - y' - 6y = (10x + 1)e^{-2x}$$

Exercice 3. (6 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

- Calculer $I_1 = \int_1^e f(x) dx$
- Soit $I_2 = \int_1^e g(x) dx$. Calculer $I_1 + I_2$ et déduire la valeur de I_2 .

Bon Courage

Corrigé de l'examen de rattrapage de Maths II

Exercice 1. (6 points)

I. Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

a. Calculons le déterminant de la matrice A .

$$\det(A) = (\alpha - 1) \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\alpha^2 + 3\alpha + 1$$

b. Les valeurs de α pour que la matrice A soit inversible.

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0.

On a

A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$.

$$\iff -4(\alpha - 1)(\alpha + \frac{1}{4}) \neq 0.$$

$$\iff \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{1}{4}\}.$$

c. Si $\alpha = 0$, calculons l'inverse de A .

on a pour $\alpha = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\det(A) = 1$

Alors

$$\text{com}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad {}^t(\text{com}A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. (8 points)

D) Soit l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' = -y + x \dots \dots \dots (1)$$

1. Résolution de l'équation différentielle (1).

On a $y' + y = x$ est une équation différentielle avec second membre.

a Résolution de l'équation homogène associée à (1)

Si $y \neq 0$

$$y' + y = 0 \implies \frac{1}{y} dy = -dx \text{ En intégrant}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int dx \implies \ln|y| = -x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\implies |y| = e^{-x+c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\implies |y| = e^c e^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\implies y = k_1 e^{-x}, \quad k_1 \in \mathbb{R}^*$$

$y = 0$ est une solution évidente de $y' + y = 0$. Donc la solution générale de l'équation homogène est $y_0 = k e^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

b Résolution de l'équation non homogène.

On fait varier la constante k et la solution générale de (1) sera $y(x) = k(x)e^{-x}$.

$$y' = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$$

En remplaçant y' dans (1) on obtient :

$$k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = x \implies k'(x)e^{-x} = x$$

$$\implies k'(x) = x e^x$$

$$\implies k(x) = \int x e^x dx$$

En utilisant une intégration par parties, calculer $\int x e^x dx$.

On pose

$$U'(x) = e^x \implies U(x) = e^x$$

$$V(x) = x \implies V'(x) = 1$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= e^x(x - 1) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } k(x) = e^x(x - 1) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Alors

$$y_p = -x - 1 \text{ d'ou}$$

$$y_G(x) = y_0 + y_p = k e^{-x} + x - 1 \quad k \in \mathbb{R}$$

2. Déterminer la solution générale de (1) vérifiant *****

On a

$$y(0) = 0 \implies k e^0 + 0 - 1 = 0$$

$$\implies k = 1$$

Finalement,

$$y_G = e^{-x} + x - 1$$

II) Résolution de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' - y' - 6y = (10x + 1)e^{-2x} \dots \dots \dots (E)$$

* Résoudre l'équation homogène associée à (E).

Résolution de l'équation homogène

$$y'' - y' - 6y = 0 \quad (E_0)$$

0,5

L'équation caractéristique associée à (E_0) .

$$r^2 - r - 6 = 0$$

0,5

admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale de (E) est

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x},$$

1

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

** Trouvons la solution particulière de (E).

on a

$$y_p = (ax^2 + bx)e^{-2x}$$

$$y'_p = (-2ax^2 - 2bx + 2ax + b)e^{-2x},$$

et

$$y''_p = (-4ax - 2b + 2a + 4ax^2 + 4bx - 4ax - 2b)e^{-2x},$$

$$= (4ax^2 - 8ax + 4bx - 4b + 2a)e^{-2x}$$

En remplaçant y'_p et y''_p dans (E) on obtient :

$$(-10ax - 4b + 2a - b)e^{-2x} = (10x + 1)e^{-2x}$$

qui donne $-10ax - 4b + 2a - b = 10x + 1$

En identifiant, on trouve $a = -1$ et $b = -\frac{3}{5}$. D'où

$$y_p = (-x^2 - \frac{3}{5}x)e^{-2x}.$$

La solution générale de (E).

On a $y_G = y_0 + y_p$

donc

$$C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}, \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. y_G = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + (-x^2 - \frac{3}{5}x)e^{-2x}, \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$y_G = (C_1 - x^2 - \frac{3}{5}x)e^{-2x} + C_2 e^{3x}, \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

0,5

1,5

Exercice 3. (6 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

a) Calculons $I_1 = \int_1^e f(x) dx$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^e$$

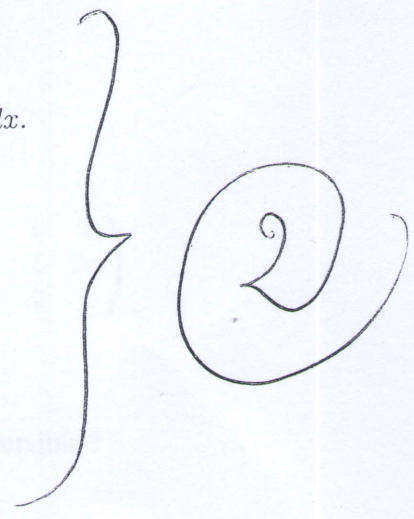
$$= \frac{1}{2} (\ln(e^2 + 1) - \ln 2)$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(\frac{e^2 + 1}{2}))$$

2

b) Soit $I_2 = \int_1^e g(x)dx$. Calculons $I_1 + I_2$

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \int_1^e f(x)dx + \int_1^e g(x)dx. \\
&= \int_1^e (f(x) + g(x))dx. \\
&= \int_1^e \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^3}{x^2+1} \right) dx. \\
&= \int_1^e \frac{x+x^3}{x^2+1} dx. \\
&= \int_1^e \frac{x(1+x^2)}{x^2+1} dx. \\
&= \int_1^e x dx. \\
&= \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^e. \\
&= \frac{1}{2} (e^2 - 1). \\
&= \frac{e^2 - 1}{2}.
\end{aligned}$$



en déduire la valeur de I_2 .

On a

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \frac{e^2-1}{2} \\
\text{donc } I_2 &= \frac{e^2-1}{2} - I_1 \\
&= \frac{e^2-1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{e^2+1}{2} \\
&= \frac{1}{2} (e^2 - 1 - \ln \frac{e^2+1}{2})
\end{aligned}$$

