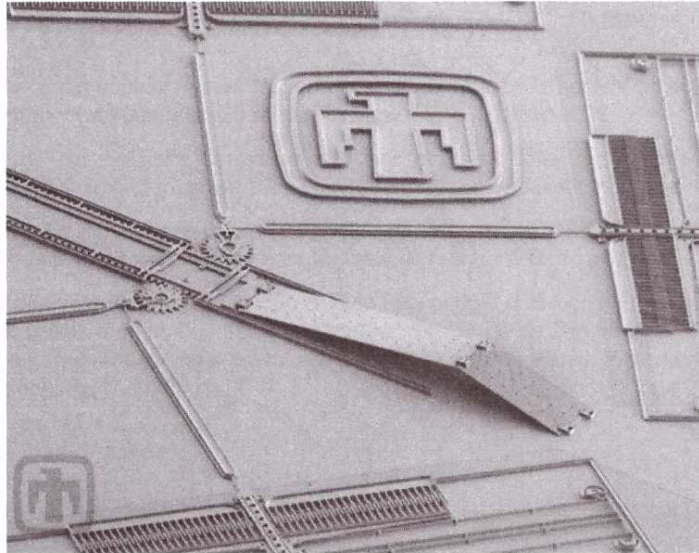


**Exercice 1** Effet casimir


En 1948, le physicien néerlandais Hendrik Casimir prédit l'existence d'une force attractive entre deux plaques conductrices, non chargées, parallèles, placées dans le vide. Cette force d'origine purement quantique, a été mise en évidence expérimentalement pour la première fois en 1997.

**Micro-miroir pliable commandé par une tension :**

une extrémité du miroir peut coulisser dans un rail, entraînée par des engrenages pilotés par quatre peignes électrostatiques (dont deux visibles en bas et à droite de l'image).  
Si les surfaces en regard sont trop proches, l'effet Casimir peut intervenir.



On considère deux plaques parallèles séparées d'une distance  $L$  et l'on introduit un axe  $Ox$  perpendiculaire aux plaques tel que les plaques soient à l'abscisse  $x = 0$  et  $x = L$ .

**1<sup>ère</sup> partie**

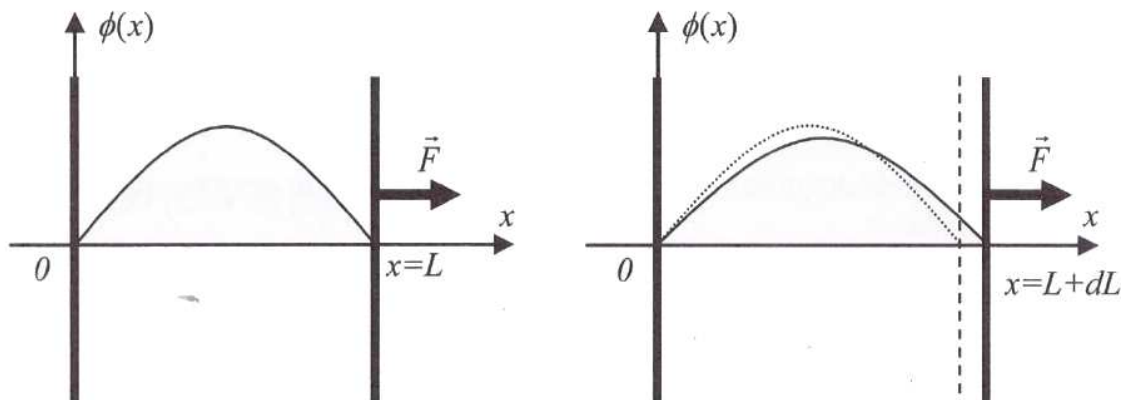
On raisonne dans cette partie sur une particule non relativiste de masse  $m$  piégée entre les deux plaques. Du point de vue énergétique, cela signifie que la particule se trouve dans un puits de potentiel rectangulaire de largeur  $L$  et de profondeur infinie. On suppose que la particule est dans un état stationnaire d'énergie  $E$  et décrite par la partie spatiale de la fonction d'onde  $\phi(x)$ . L'équation de Schrödinger vérifiée par  $\phi(x)$  s'écrit alors :

$$E\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2}$$

1) Montrer que la présence des plaques entraîne une quantification de l'énergie. Introduire un nombre entier naturel non nul  $n$  pour exprimer les énergies  $E_n$  possibles de la particule.

2) Retrouver l'ordre de grandeur de l'énergie minimale à partir de l'inégalité de Heisenberg spatiale.

Dans la suite, on suppose que la particule se trouve dans l'état fondamental (celui de plus basse énergie). La plaque en  $x = 0$  est fixe alors que la plaque en  $x = L$  peut se déplacer. La particule exerce sur cette dernière une force  $\vec{F} = F\vec{e}_x$ .



3) Justifier l'évolution de  $\phi(x)$  lors du déplacement de la plaque de la quantité  $dL$ .

4) En effectuant un bilan énergétique à la particule lorsque la plaque mobile se déplace de l'abscisse  $x = L$  à  $x = L + dL$ , exprimer  $F$  en fonction de  $\hbar$ ,  $m$  et  $L$ . La présence de la particule a-t-elle tendance à ce que les plaques s'attirent ou se repoussent ?

5) Retrouver l'expression de  $F$  en ordre de grandeur à l'aide d'une description corpusculaire de la particule et de l'inégalité d'Heisenberg spatiale, en considérant que la particule effectue des allers et retours entre les deux plaques.

Les plaques possèdent une surface  $S$  et il y a  $n_s$  particules par unité de surface présentes entre elles (particules identiques de masse  $m$ ). A une température suffisamment faible, les particules sont toutes dans leur état fondamental (possible pour des bosons mais pas pour des fermions).

6) Exprimer la pression  $p$  subie par les plaques de la part du gaz de particules. Comparer la dépendance de  $p$  par rapport à  $L$  au cas d'un gaz parfait classique à la température  $T$ .

A noter que cette pression est présente même en l'absence totale d'agitation thermique (zéro absolu) : il s'agit d'un phénomène purement quantique.

## 2<sup>ème</sup> partie

Il n'y a plus de particules massiques dans l'espace situé entre les plaques. Néanmoins, du champ électromagnétique peut y être présent. La présence des plaques entraîne que la composante tangentielle du champ électrique doit être nulle à proximité immédiate de celles-ci. Cette condition impose que seuls certains modes électromagnétiques peuvent être présents autour des plaques. D'après la théorie de quantification du champ électromagnétique (appelée l'électrodynamique quantique), chaque mode

électromagnétique de pulsation  $\omega$  est décrit par un Hamiltonien d'oscillateur harmonique quantique à une dimension. Les niveaux d'énergie d'un mode sont alors quantifiés par la formule  $\left(m + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ , où  $m$  est le nombre de photons, chacun d'énergie  $\hbar\omega$ , présents dans le

mode considéré. Il existe pour chaque mode une énergie fondamentale non nulle  $\frac{\hbar\omega}{2}$ , correspondant à l'énergie du vide quantique électromagnétique. Cette énergie du vide n'est pas une simple énergie de référence arbitraire non observable puisqu'elle va intervenir dans la force que va subir les plaques.

7) En se restreignant à une onde plane harmonique se propageant entre les deux plaques perpendiculairement à elles, montrer que seuls certains modes de pulsations  $\omega_n$  peuvent exister du fait des conditions aux limites imposées par les plaques. Exprimer  $\omega_n$  en fonction de  $c$ ,  $L$  et d'un nombre entier positif  $n$ .

On raisonne sur le mode de pulsation  $\omega_n$  décrit précédemment. On suppose qu'il n'y a aucun photon dans ce mode.

8) En reprenant la même démarche que la question 4 de la 1<sup>ère</sup> partie, montrer que la présence de ce mode vide entraîne que la plaque située en  $x = L$  subit une force  $\vec{F}_{n,0} = F_{n,0}\vec{e}_x$  dont on donnera l'expression.

9) Comment s'écrit la force, notée  $\vec{F}_{n,N} = F_{n,N}\vec{e}_x$ , lorsque le mode de pulsation  $\omega_n$  contient  $N$  photons ? Montrer que la contribution d'un photon sur l'expression de la force peut être déterminée par un raisonnement corpusculaire.

Un calcul très technique (que l'on peut trouver dans l'article cité en fin d'énoncé) permet de d'obtenir la résultante des forces  $\vec{F}_{Casimir} = F_{Casimir}\vec{e}_x$  subies par la plaque en  $x = L$  compte tenu de l'ensemble des modes électromagnétiques. Il faut souligner que le calcul est très complexe, puisqu'il faut prendre en compte les modes se propageant dans une direction quelconque (pas seulement perpendiculaire aux plaques) ainsi que les modes présents en  $x < 0$  et en  $x > L$ . Lorsque les modes sont tous vides, la force est non nulle et s'écrit :

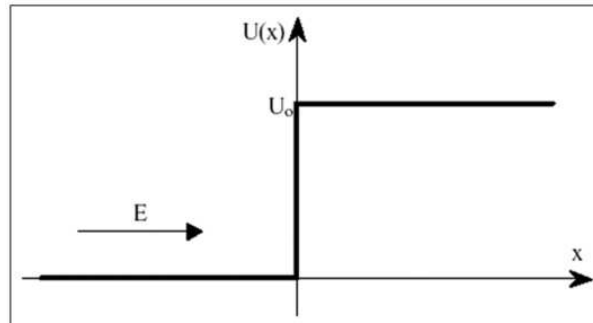
$$F_{Casimir} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4} S$$

10) Expliquer qualitativement le signe de  $F_{Casimir}$ .

11) Calculer la valeur de  $F_{Casimir}$  pour des plaques carrées de  $10 \mu\text{m}$  de côté séparées de  $1 \mu\text{m}$  (valeurs typiques pour les micro-miroirs de vidéoprojecteurs, voir problème 6.11). Comparer au propre poids des plaques dans le cas où elles sont en silicium (masse volumique de  $2,3 \text{ g.cm}^{-3}$ ) et ont une épaisseur de  $0,2 \mu\text{m}$ . Commenter.

**Exercice 2** Jonction vide/metal

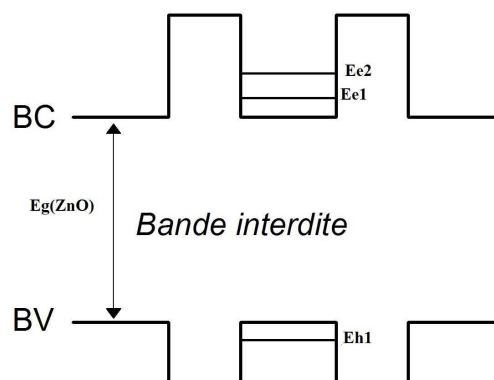
La façon la plus simple de modéliser un métal est de considérer que les électrons les moins liés à chaque atome sont libres de se mouvoir dans le matériau (les autres électrons étant plus liés au noyau restent donc sur l'atome). Pour continuer la simplification, négligeons les variations spatiales du potentiel du réseau en considérant que le potentiel est constant dans le métal pour ces électrons libres. Enfin, considérant que les électrons ne peuvent pas sortir du métal, imposons une variation de potentiel à la surface du métal. On représente donc la jonction métal-vide par une marche de potentiel supérieur à l'énergie  $E$  des électrons libres comme indiqué sur la figure. On simplifie le problème en prenant un potentiel nul dans la boîte.



1. Selon la mécanique classique que se passe-t-il lorsqu'un électron arrive au niveau de la barrière de potentiel si  $E < U_0$  et si  $E > U_0$  ?
2. On se place maintenant dans le cadre de la mécanique quantique. L'électron dans un état stationnaire est décrit par une fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger. Déterminer les états stationnaires de l'électron dans tout l'espace pour  $E < U_0$  et pour  $E > U_0$ .
3. On prend  $U_0 - E = 1 \text{ eV}$ . Sur quelle distance les effets quantiques se manifestent-ils ?
4. Exprimer le flux incident, le flux réfléchi et le flux transmis au niveau de la barrière puis en déduire les coefficients de réflexion et de transmission dans les deux cas étudiés.

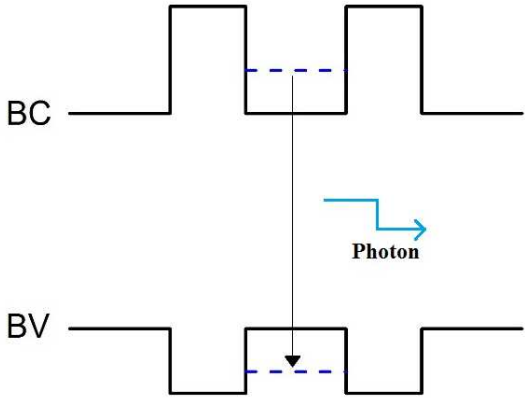
**Exercice 3** Etude d'une hétérostructure ZnO/(ZnMg)O

Nous allons maintenant nous intéresser au cas d'un puits de potentiel obtenu en insérant un matériau de plus petit gap (ZnO) entre deux barrières de potentiel (Zn,Mg)O. Le diagramme de bandes [bande de conduction (BC) et bande de valence (BV)] de ce type de structure est représenté sur la figure 1. La faible dimension de ce puits de potentiel (i.e. quelques nanomètres) engendre l'apparition de niveaux discrets d'énergie dans le puits.

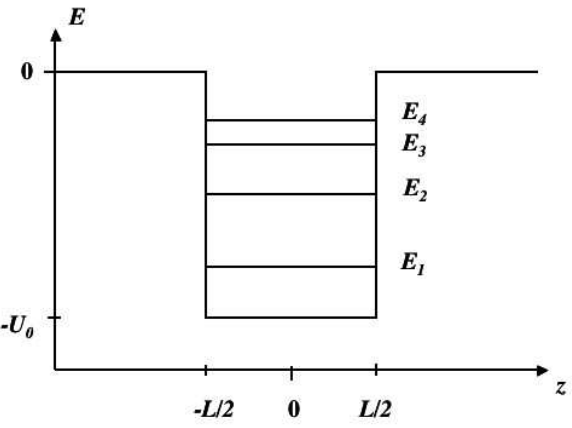


La photoluminescence est une technique de spectroscopie permettant la caractérisation des propriétés optiques du matériau étudié. Dans le cas d'un semi-conducteur, on excite les électrons de la bande de valence à l'aide d'un laser avec une énergie supérieure à celle du gap et passent donc de la bande de valence à la bande de conduction. Les paires électrons-trous ainsi créés se recombinent avec émission de photons. La mesure de cette énergie indique la nature de

la recombinaison : l'étude de du spectre lumineux fournira des informations sur les différentes propriétés du matériau telles que son gap, sa composition ainsi que la présence d'éventuel défauts à sa surface



On s'intéresse aux états d'énergie  $E$  accessibles pour un électron confiné dans un puit de potentiel de largeur  $L = 10 \text{ nm}$  et de profondeur  $U_0$  finie. On pose  $k_0 = \sqrt{\frac{2mU_0}{\hbar^2}} = 1,63 \text{ nm}^{-1}$ ;  $\Lambda = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  et  $k = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$



1. Quelle est la forme de la fonction d'onde dans chacun des 3 domaines ?
2. Rappeler les conditions aux limites et en déduire que  $\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{\Lambda}{k}$
3. Montrer que la quantification des états peut se mettre sous la forme :

$$\left| \cos\left(\frac{kL}{2}\right) \right| = \frac{k}{k_0} \quad \text{pour les états pairs}$$

$$\left| \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \right| = \frac{k}{k_0} \quad \text{pour les états impairs}$$

Discuter graphiquement des solutions.

4. Déterminer l'énergie des photons émis en fonction de  $E_{e1}$ ,  $E_g$  et  $E_{h1}$ .
5. Interpréter qualitativement, à partir de l'inégalité de Hisenberg spatiale, l'abaissement des niveaux d'énergie par rapport au puit infini