

Examen de remplacement de Maths II

(Durée 2h)

Les calculatrices programmables ne sont pas autorisées

Exercice 1. (4 points)

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le déterminant de la matrice A et déduire que la matrice A est inversible.
- Calculer la matrice $A \times (B - 2I_3)$ puis déduire la matrice inverse de A .

Exercice 2. (6 points)

- Déterminer les constantes réelles a , b et c qui vérifient : $\frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$.
- Soit $x > 0$, calculer la primitive $F(x) = \int \frac{1}{x^2} \ln(x^2 + x) dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
- Résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{2}{x}y = \ln(x^2 + x)$, $x > 0$.

Exercice 3. (5 points)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 3y = xe^{2x} \quad (E)$$

- Résoudre l'équation homogène associée à (E).
- Trouver les constantes réelles a et b pour que $y_p = (ax + b)e^{2x}$ soit une solution particulière de (E).
- Déduire la solution générale de (E).

Exercice 4. (5 points)

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{e^x} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

- En utilisant une intégration par parties,
 - Calculer I_1 .
 - Montrer que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.
- Calculer I_2 et I_3
- En déduire la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{e^x} dx$$

Dep.

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1^{ère} année ST

Juin 2019

Corrigé de l'examen de MathsII

Exercice 1. (4 points)

Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- a. Calculons le déterminant de la matrice A . Il vient, en développant par rapport à la deuxième ligne.

$$\det(A) = 4 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a $\det(A) = -4 \neq 0$, donc A est inversible.

- b. Calculons la matrice $A \times (B - 2I_3)$.

on a

$$\begin{aligned} A \times (B - 2I_3) &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 \end{aligned}$$

En déduire la matrice inverse de A .

On a

$$A \times (B - 2I_3) = 2I_3 \implies \frac{A \times (B - 2I_3)}{2} = I_3$$

$$\implies A \frac{(B - 2I_3)}{2} = I_3 \text{ on a de l'autre coté } A \times A^{-1} = I_3$$

$$\text{donc } A^{-1} = \frac{(B - 2I_3)}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2. (6 points)

1. Déterminons les constantes réelles a, b et c qui vérifient :

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}.$$

$$\text{On a } \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (-4a-3b+c)x + (4a+2b-c)}{(x-1)(x-2)^2}$$

En identifiant, on obtient : $a = 1, b = -1, c = 1$

$$\text{donc } \frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}.$$

2. Trouver les primitives des fonctions $\frac{a}{x-1}, \frac{b}{x-2}$ et $\frac{c}{(x-2)^2}$;

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + c_1 \text{ avec } c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + c_2 \text{ avec } c_2 \in \mathbb{R}.$$

et

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} dx = -\frac{1}{(x-2)} + c_3 \text{ avec } c_3 \in \mathbb{R}.$$

On déduit la primitive de la fonction $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2} dx = \ln|x-1| + c_1 - \ln|x-2| + c_2 - \frac{1}{(x-2)} + c_3$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} + K$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{1}{(x-2)} + K$$

avec $K = c_1 + c_2 + c_3 \in \mathbb{R}$

3. Résolution de l'équation différentielle suivante : $(x-2)y' - y = \frac{1}{(x-1)}$.

on a $(x-2)y' - y = \frac{1}{(x-1)} \implies (x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 1 \dots (I)$ est une équation différentielle non homogène (ou avec second membre). Résolution de l'équation homogène $(x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 0$

$$(x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 0 \implies \frac{dy}{y} = \frac{1}{(x-2)} dx$$

et par suite

$$\ln|y| = \ln|x-2| + C_1 \text{ où } C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{D'où } y(x) = C(x-2), C = \mp \exp(C_1).$$

Résolution de l'équation avec second membre $((x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 1)$

Méthode de la variation de la constante : Soit $y(x) = C(x-2)$ la solution générale de l'équation homogène. On fait varier la constante C , et la solution générale de l'équation avec le second membre (I) sera : $y(x) = C(x)(x-2)$. On a

$y'(x) = C'(x)(x-2) + C(x)$. En remplaçant y et y' dans l'équation (I), on obtient

$$C'(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$$

$$\text{par conséquent } C(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{1}{(x-2)} + K$$

Finalement la solution générale de l'équation (I) est

$$y(x) = \left(\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{1}{(x-2)} + K\right)(x-2).$$

Exercice 3. (5 points)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 3y = 7xe^{2x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).

Résolution de l'équation homogène

$$y'' + 3y = 0 \quad (E_0)$$

L'équation caractéristique associée à (E_0) .

$$r^2 + 3 = 0$$

admet deux racines complexes distinctes $r_1 = 0 + i\sqrt{3}$ et $r_2 = 0 - i\sqrt{3}$. Ainsi, la solution générale de (E) est

$$y_0 = e^{0x}(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x),$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Trouvons les constantes réelles a, b pour que $y_p = (ax + b)e^{2x}$ soit une solution particulière de (E).

on a $y'_p = 2ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x}$,

et

$$y''_p = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4(ax + b)e^{2x},$$

En remplaçant y'_p et y''_p dans (E) on obtient :

$$2ae^{2x} + 3(2ax + b)e^{2x} + 3(2ax + b)e^{2x} + 9(ax^2 + bx)e^{2x} - 4(2ax + b)e^{2x} = 12(ax^2 + bx)e^{2x} + 3(ax^2 + bx)e^{2x} = (8x + 1)e^{2x}$$

qui donne $7ax + 4b + 7a = 7x$

En identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = \frac{-4}{7}$. D'où

$$y_p = (x^2 - \frac{4}{7}x)e^{2x}.$$

3. Dédurre la solution générale de (E). On a $y_G = y_0 + y_p$ donc

$$y_G = C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x + (x - \frac{4}{7})e^{2x}, \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. (5 points)

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{e^x} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. En utilisant une intégration par parties,

i) Calculons $I_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{e^x} dx$.

On pose

$$U'(x) = e^{-x} \Rightarrow U(x) = -e^{-x}$$

$$V(x) = x \Rightarrow V'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x^1}{e^x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

ii) Montrons que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

posons

$$U'(x) = e^{-x} \Rightarrow U(x) = -e^{-x}$$

$$V(x) = x^{n+1} \Rightarrow V'(x) = (n+1)x^n$$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= -x^{n+1}e^{-x} \Big|_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1)I_n. \end{aligned}$$

2. Calculons I_2 et I_3

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2I_1$$

$$= 2 - \frac{5}{e}$$

$$I_3 = \int_0^1 x^3 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 3I_2$$

$$= 6 - \frac{16}{e}$$



3. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{e^x} dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{e^x} dx = -\int_0^1 x^3 e^{-x} dx + 2\int_0^1 x^2 e^{-x} dx - \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$I = -I_3 + 2I_2 - I_1 = \frac{8}{e} - 3$$

