Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Juin 2019

Examen de Maths II

(Durée 2h)

Les calculatrices programmables ne sont pas autorisées

Exercice 1. (4 points)
On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer le déterminant de la matrice A.

b. A est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

Exercice 2. (6 points)

1. Déterminer les constantes réelles A, B et C qui vérifient : $\dfrac{1}{x(x^2-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1}$.
2. Calculer la primitive de la fonction $\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.
3. Résoudre l'équation différentielle suivante : $ydx - x(x^2-1)dy = 0$.

Exercice 3. (6 points)
Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = (8x+1)e^{3x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée a (E).
2. Trouver les constantes réelles a et b pour que $y_p = (ax^2 + bx)e^{3x}$ soit une solution particulière de (E).
3. Déduire la solution génerale de (E).
4. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 4. (4 points)

I) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

II) **i)** Déterminer les constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $x^2 + 6x + 25 = (x+\alpha)^2 + \beta^2$.

ii) A l'aide du changement de variable $x + \alpha = \beta t$, calculer $I = \int \dfrac{x}{x^2+6x+25}dx$.

Bon Courage

2

2,5

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Juin 2019

Corrigé de l'examen de MathsII

Exercice 1. (4 points)

I. Considèrons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Calculons le déterminant de la matrice A. Il vient, en développant par rapport à la deuxième ligne.

$$det(A) = 0 \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

1,5

b. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a $det(A) = -1 \neq 0$, donc A est inversible. Calculons l'inverse de A, on a $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^{t}(comA)$. 0,5

$$comA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad donc \qquad {}^{t}(comA) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1 0,5

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

0,5

Exercice 2. (6 points)

1. Déterminons les constantes réelles A, B et C qui vérifient :
$\dfrac{1}{x(x^2-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1}$.
On a $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} = \dfrac{(A+B+C)x^2 + (C-B)x - A}{x(x+1)(x-1)}$
En identifiant, on obtient : $A = -1, B = \dfrac{1}{2}, C = \dfrac{1}{2}$
donc $\dfrac{1}{x(x^2-1)} = \dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)}$.

1,5

2. Calculons la primitive de la fonction $\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.
$\int \dfrac{1}{x(x^2-1)}dx = \int \dfrac{-1}{x}dx + \int \dfrac{1}{2(x+1)}dx + \int \dfrac{1}{2(x-1)}dx$

$$= -ln|x| + ln\sqrt{|x+1|} + ln\sqrt{|x-1|} + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$
$$= ln\frac{\sqrt{|x+1|}}{|x|} + ln\sqrt{|x-1|} + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

/2

3. Résoulution de l'équation différentielle suivante : $ydx - x(x^2-1)dy = 0$.
   remarquons $y = 0$ est une solution évidente.
   Soit $y \neq 0$, on a $ydx - x(x^2-1)dy = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{1}{x(x^2-1)}dx....(I)$
   est une équation différentielle à variable séparable.
   En intégrant
   $\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$
   et d'après la question précédente on obtient :
   $ln|y| = ln\frac{\sqrt{|x+1|}}{|x|} + ln\sqrt{|x-1|} + k, \qquad k \in \mathbb{R}$
   $|y| = \frac{\sqrt{|x+1|}}{|x|}\sqrt{|x-1|}e^k, \qquad k \in \mathbb{R}^*$
   $y = \pm e^k \frac{\sqrt{|x+1|}}{|x|}\sqrt{|x-1|}, \qquad k \in \mathbb{R}^*$
   D'où $y = k_1\frac{\sqrt{|x+1||x-1|}}{|x|}, \qquad k_1 = \pm e^k \in \mathbb{R}^*$
   Finalement, la solution génerale de l'équation $ydx - x(x^2-1)dy = 0$ est
   $y = C\frac{\sqrt{|x+1||x-1|}}{|x|}, \qquad C \in \mathbb{R}$

2,5

Exercice 3. (6 points)
Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = (8x+1)e^{3x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée a (E).
   Résolution de l'équation homogène
   $$y'' - 4y' + 3y = 0 \qquad (E_0)$$
   L'équation caractéristique associée à (E_0).
   $$r^2 - 4r + 3 = 0$$ 0,5
   admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale de (E) est 0,5
   $$y_0 = C_1e^x + C_2e^{3x}$$ 0,5
   où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
2. Trouvons les constantes réelles a, b pour que $y_p = (ax^2+bx)e^{3x}$ soit une solution particulière de (E).
   on a $y_p' = (2ax+b)e^{3x} + 3(ax^2+bx)e^{3x}$, 0,5
   et
   $y_p'' = 2ae^{3x} + 3(2ax+b)e^{3x} + 3(2ax+b)e^{3x} + 9(ax^2+bx)e^{3x}$, 0,5
   En remplaçant y_p' et y_p'' dans (E) on obtient :

$2ae^{3x} + 3(2ax+b)e^{3x} + 3(2ax+b)e^{3x} + 9(ax^2+bx)e^{3x} - 4(2ax+b)e^{3x} - 12(ax^2 + bx)e^{3x} + 3(ax^2+bx)e^{3x} = (8x+1)e^{3x}$

qui donne $\qquad 4ax + 2b + 2a = 8x + 1$

En identifiant, on trouve $a = 2$ et $b = \frac{-3}{2}$. D'où 1

$y_p = (2x^2 - \frac{3}{2}x)e^{3x}$. 0,1

3. Déduire la solution génerale de (E). On a $y_G = y_0 + y_p$ donc

   $y_G = C_1e^x + C_2e^{3x} + (2x^2 - \frac{3}{2}x)e^{3x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

   $y_G = C_1e^x + (2x^2 - \frac{3}{2}x + C_2)e^{3x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. 0,8

4. Trouvons la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

   Commençons par

   $y(0) = 1 \Longrightarrow C_1e^0 + (20^2 - \frac{3}{2}0 + C_2)e^{3\times 0} = 1$

   on obtient $C_1 + C_2 = 1$ .... (1)

   Ensuite dans la dérivée de y_G on aura

   $y'(0) = 0 \Longrightarrow C_1e^0 + (4\times 0 - \frac{3}{2})e^{3\times 0} + 3(2\times 0^2 - \frac{3}{2}\times 0 + C_2)e^{3*0} = 0$

   on obtient $C_1 + 3C_2 - \frac{3}{2} = 0$ ....(2) 1

   de (1) et (2) on trouve

   $C_1 = \frac{3}{4}, \qquad C_2 = \frac{1}{4}$

   Finalement,

$$y_G = \frac{3}{4}e^x + (2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4})e^{3x}.$$ 0,8

Exercice 4. (4 points)

I) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

On pose

$U'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad U(x) = x$

$V(x) = \ln(x+1) \quad \Rightarrow \quad V'(x) = \frac{1}{x+1}$

$\int_0^1 \ln(x+1)dx = x\ln(x+1)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

$= \ln(x+1)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx$

$= \ln(x+1)|_0^1 - \int_0^1 (1 - \frac{1}{x+1})dx$

$= \ln(x+1)|_0^1 - (x - \ln(x+1))|_0^1$

$= 2\ln(2) - 1$ 2

II) i) Déterminons les constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $x^2 + 6x + 25 = (x+\alpha)^2 + \beta^2$.

on a $x^2 + 6x + 25 = (x+3)^2 + 4^2$ 0,8

ii A l'aide du changement de variable $x + \alpha = \beta t$, calculons $I = \int \frac{x}{x^2+6x+25}dx$

En posant $x + 3 = 4t$ et donc $dx = 4dt$

$I = \int \frac{x}{x^2+6x+25}dx = \int \frac{x}{(x+3)^2+4^2}dx$

$= \int \frac{4t-3}{4^2(t^2+1)}4dt$ /

$$= \int \frac{t}{(t^2+1)}dt - \int \frac{3}{4(t^2+1)}dt$$
$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \frac{3}{4}\arctan t + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

1,2

Finalement,

$$I = \int \frac{x}{x^2+6x+25}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+6x+13}{4}\right) - \frac{3}{4}\arctan\left(\frac{x+3}{4}\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$