Septembre 2019

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Examen de rattrapage Maths 1.
Durée 2 heures.

Exercice 1. (4 points)

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 1 + 2n$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par contraposition que : si $x^5 + x < 2$, alors $x < 1$.

Exercice 2. (05 points)

1. On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}^*, \quad x \, \mathcal{R} \, y \Longleftrightarrow y(x^2+1) = x(y^2+1).$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(b) Donner la classe d'équivalence de 2.

Exercice 3. (6 points)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par : $f(x) = x^2 + x - 2$

1. Déterminer l'image directe par l'application f de l'ensemble $A = [1, 3]$.
2. Déterminer l'image réciproque par l'application f de l'ensemble $B = [-2, 4]$.
3. Considérons l'application g définie par :

$$g \ : \ ]\frac{-1}{2}, +\infty[\longrightarrow]\frac{-9}{4}, +\infty[$$
$$x \longrightarrow g(x) = f(x).$$

Montrer que g est bijective et déterminer son application inverse g^{-1}.

Exercice 4. (5 points)

Soientt $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin(2x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \alpha & si \quad x = 0. \end{cases}$$

(a) Déterminer α pour que h soit continue sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une racine réelle sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Bon Courage

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Septembre 2019

Corrigé de l'examen de rattrapage de Maths1

Exercice 1. (4 points)

1. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 1 + 2n$. 0,5
   Pour $n \in \mathbb{N}$, notons par $P(n)$ la propriété $3^n \geq 1 + 2n$.
   Pour n=0, on a $3^0 = 1 et 1 + 2 \times 0 = 1$ donc $3^0 \geq 1 + 2 \times 0$. C'est à dire $P(0)$ est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie $\big(i.e., 3^n \geq 1 + 2n\big)$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie $\big(i.e., \quad 3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)\big)$.
   On a
   $$\begin{aligned} 3^n \geq 1 + 2n &\Longrightarrow 3^n \times 3 \geq (1 + 2n) \times 3 \\ &\Longrightarrow 3^{n+1} \geq 3 + 6n \end{aligned}$$
   1,5
   montrons que $3 + 6n \geq 1 + 2(n+1)$ on a
   $$\begin{aligned} 3 + 6n - (1 + 2(n+1)) &= 3 + 6n - 1 - 2n - 2 \\ &= 4n \geq 0 \end{aligned}$$
   On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 1 + 2n$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par contraposition que si $\quad x^5 + x < 2, \quad$ alors $x < 1$
   La contraposée de la proposition est $x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^5 + x \geq 2$. 0,5
   On a
   $$x \geq 1 ....(1) \text{ et}$$
   $$\begin{aligned} x \geq 1 &\Longrightarrow x^2 \geq 1 \\ &\Longrightarrow x^4 \geq 1 \\ &\Longrightarrow x^5 \geq 1 ....(2) \end{aligned}$$
   $$(1) + (2) \Longrightarrow x^5 + x \geq 2$$
   1,5
   Par le principe de contraposition, on a démontré la proposition si $\quad x^5 + x < 2, \quad$ alors $x < 1$.

Exercice 2. (~~6~~5points)
On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}^*, \quad x\,\mathcal{R}\,y \Longleftrightarrow y(x^2+1) = x(y^2+1).$$

(a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(i) Réflexivité de $\mathcal{R}$: soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$x(x^2+1) = x(x^2+1)\ .$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x\mathcal{R}x$. D'où la réflexivité de $\mathcal{R}$.

1

(ii) Symétrie de $\mathcal{R}$: soient $x, y \in \mathbb{R}^*$, tels que $x\mathcal{R}y$. On a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longrightarrow y(x^2+1) = x(y^2+1) \\ &\Longrightarrow x(y^2+1) = y(x^2+1) \\ &\Longrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$. D'où la symétrie de $\mathcal{R}$.

1

(iii) Transitivité de $\mathcal{R}$: soient $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ et \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(x^2+1) = x(y^2+1) \\ et \\ z(y^2+1) = y(z^2+1) \end{array}\right.$$

1,5

on a

$$y(x^2+1) = x(y^2+1) \Longrightarrow y = \frac{x(y^2+1)}{(x^2+1)}$$

On remplace dans la deuxième et on on aura

$$\begin{aligned} z(y^2+1) = y(z^2+1) &\Longrightarrow z(y^2+1) = \frac{x(y^2+1)}{(x^2+1)}(z^2+1) \\ &\Longrightarrow z = \frac{x}{(x^2+1)}(z^2+1) \\ &\Longrightarrow z(x^2+1) = x(z^2+1) \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$. D'où la transitivité de $\mathcal{R}$.
De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) La classe d'équivalence de 2.

$$\begin{aligned} \overline{2} &= \{x \in \mathbb{R}^* : x\mathcal{R}2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^* : 2(x^2+1) = x(2^2+1)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^* : 2x^2 - 5x + 2 = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^* : x = 2 \quad ou \quad x = \frac{1}{2}\} \\ &= \{2, \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

1,5

Exercice 3. (6points)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par : $f(x) = x^2 + x - 2$

1. Déterminons l'image directe par l'application f de l'ensemble $A = [1, 3]$.
$f([1,3]) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in [1,3] : f(x) = y\}$
on a $f'(x) = 2x + 1$ et $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{-1}{2}$
Alors $f([1,3]) \doteq [f(1), f(3)])$ =[0, 10].

2

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

2. Déterminons l'image réciproque par l'application f de l'ensemble $B = [-2, 4]$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathrm{B}) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [-2, 4]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq f(x) \leq 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x^2 + x - 2 \leq 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x^2 + x \quad et \quad x^2 + x - 6 \leq 0\} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $f^{-1}([-2, 4]) = [-3, -1] \cup [0, 2]$

1

3. Considèrons l'application g définie par :

$$g \;:\; \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[\longrightarrow \left]\frac{-9}{4}, +\infty\right[$$
$$x \longrightarrow g(x) = f(x).$$

(1) Injectivité de g :

Soient $x_1, x_2 \in \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Longrightarrow x_1^2 + x_1 - 2 = x_2^2 + x_2 - 2 \\ &\Longrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ ou \\ x_1 + x_2 + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1

pour $x_1 + x_2 + 1 = 0 \Longrightarrow x_1 = -x_2 - 1$

on a

$x_2 \in \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[\Longrightarrow x_2 > \frac{-1}{2}$

$$\Longrightarrow -1 - x_2 < \frac{-1}{2}$$

$$\Longrightarrow x_1 < \frac{-1}{2} \text{ (impossible car } x_1 > \frac{-1}{2})$$

Donc on aura $x_2 - x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = x_1$

Donc g est injective.

(2) Surjectivité de g :

Soit $y \in]\frac{-9}{4}, +\infty[$

$g(x) = y \Longrightarrow x^2 + x - 2 = y$

$\Longrightarrow x^2 + x - 2 = y$

$\Longrightarrow x^2 + x - 2 - y = 0$

$\Delta = 9 + 4y$

$\Delta > 0 \Longleftrightarrow 9 + 4y > 0 \Longleftrightarrow y \in]\frac{-9}{4}, +\infty[$

les racines sont $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9+4y}}{2}$, et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9+4y}}{2}$

1,5

on a

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9+4y}}{2} > \frac{-1}{2}$

$\Longrightarrow x_2 \in]\frac{-1}{2}, +\infty[$

et

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9+4y}}{2} < \frac{-1}{2}$

$\Longrightarrow x_1 = \notin]\frac{-1}{2}, +\infty[$

donc $\forall y \in]\frac{-9}{4}, +\infty[, \exists x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9+4y}}{2} \in]\frac{-1}{2}, +\infty[$ tel que $g(x) = y$

ce qui implique g est surjective.

De (1) et de (2) g est bijective.

L'application réciproque de g est :

1

$$g^{-1} : \;]\frac{-9}{4}, +\infty[\longrightarrow]\frac{-1}{2}, +\infty[$$

$$y \longmapsto g^{-1}(y) = \frac{-1 + \sqrt{9+4y}}{2}$$

Exercice 4. (~~6~~ 5 points)

Soientt $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sin(2x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \alpha & si \quad x = 0. \end{cases}$$

0,5

(a) Déterminons α pour que h soit continue sur $\mathbb{R}$

h est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto 1 - \frac{\sin(2x)}{x}$ est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Il reste donc à étudier la continuité en $x = 0$. On a $h(0) = \alpha$

En utilisant la règle de l'hospital on obtient

$$\lim_{x\longrightarrow 0} h(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} 1 - \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0}[1 - 2\cos(2x)] = -1$$

1,5

La fonction est continue en 0 si et seulement si $\lim_{x\longrightarrow 0} h(x) = h(0)$.

Donc h est continue en 0 $\Longleftrightarrow \alpha = -1$ 0,5

Finalement la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = -1$.

(b) Montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une racine réelle sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

on a $x \mapsto h(x) = 1 - \dfrac{\sin(2x)}{x}$ est une fonction continue sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ car c'est une somme et composition de fonctions continues. 0,5

$$h(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\sin(2\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{4}{\pi} < 0$$

$$h(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\sin(2\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = 1 > 0$$

1,5

donc $h(\frac{\pi}{4}) \times h(\frac{\pi}{2}) < 0$, et la fonction h est continue sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Donc d'après le théorème des valeurs intermediaires, elle s'annule au moins en un point de l'intervalle $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ (c-à-d $\exists c \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ tq : $h(c) = 0$). 0,5