Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Février 2019

Examen de Maths 1. Durée 2 heures.

Exercice 1. (4 points)

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : \quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k$.
2. Soient $a, b > 0$. Montrer par contraposition que : si $\dfrac{a}{b} < \sqrt{3}$, alors $\dfrac{a+3b}{a+b} > \sqrt{3}$.

Exercice 2. (04 points)

1. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{Z}, \quad x \,\mathcal{R}\, y \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x^2 - y^2 = 3k.$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ?
(b) Donner la classe d'équivalence de 0.

Exercice 3. (6 points)

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 + 3x + \dfrac{9}{4}$

1. Calculer $f(0)$, $f(-3)$ et $f^{-1}(\{-1\})$.
2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Donner des intervalles I, J pour que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective ; puis donner la réciproque f^{-1} de f.

Exercice 4. (6 points)

I) Soit $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + x}$$

(a) Déterminer D_f le domaine de définition de f.
(b) Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$.
(b) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en "0" ? Si oui, donner son prolongement, noté $\tilde{f}$.

II) 1) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2) Considérons la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^2 + x} & si \quad -1 < x < 0 \\[2ex] \dfrac{1 + \ln(1+x)}{x+1} & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

(a) g est-elle continue sur $[-\dfrac{\pi}{4}, 1]$?
(b) Peut-on appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g sur $[-\dfrac{\pi}{4}, 1]$?

Bon Courage

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Février 2019

Corrigé de l'examen de Maths1

Exercice 1. (4 points)

1. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}: \quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k.$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons par $P(n)$ la propriété $\quad n^3 + (n+1)^3 + (n+3)^3 = 9k, \quad k \in \mathbb{N}.$
Pour n=0, on a $0^3 + (0+1)^3 + (0+2)^3 = 9 = 9 \times 0$ donc
$\exists k = 0 \in \mathbb{N}: \quad 0^3 + (0+1)^3 + (0+2)^3 = 9k.$ C'est à dire $P(0)$ est vraie. 0,5
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie $\big(i.e., \exists k \in \mathbb{N}: \quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k\big)$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie 0,5
$\big(i.e., \exists k \in \mathbb{N}: \quad (n+1)^3 + ((n+1)+1)^3 + ((n+1)+2)^3 = 9k'\big).$
On a

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\
&= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\
&= \underbrace{\left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right)}_{\text{(hypothèse de récurrence)}} + 9n^2 + 27n + 27 \\
&= 9k + 9n^2 + 27n + 27, \quad k \in \mathbb{N} \\
&= 9\left(k + n^2 + 3n + 3\right), \quad k \in \mathbb{N} \\
&= 9k', k' = k + n^2 + 3n + 3, k, k' \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

1,5

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}: \quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k.$

2. Soient $a, b > 0$. Montrons par contraposition que si $\dfrac{a}{b} < \sqrt{3}$, alors $\dfrac{a+3b}{a+b} > \sqrt{3}.$

La contraposée de la proposition est $\dfrac{a+3b}{a+b} \leq \sqrt{3} \implies \dfrac{a}{b} \geq \sqrt{3}.$ 0,5
On a

$$\begin{aligned}
\frac{a+3b}{a+b} \leq \sqrt{3} &\implies (a+3b) \leq (a+b)\sqrt{3} \\
&\implies (a+3b) \leq a\sqrt{3} + b\sqrt{3} \\
&\implies (a - a\sqrt{3}) \leq (b\sqrt{3} - 3b) \\
&\implies a(1-\sqrt{3}) \leq b(\sqrt{3}-3) \\
&\implies \frac{a}{b} \geq \frac{(\sqrt{3}-3)}{(1-\sqrt{3})} \text{ (car } (1-\sqrt{3}) < 0) \\
&\implies \frac{a}{b} \geq \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})} \\
&\implies \frac{a}{b} \geq \sqrt{3}
\end{aligned}$$

1

Par le principe de contraposition, on a démontré la proposition
si $\dfrac{a}{b} < \sqrt{3}$, alors $\dfrac{a+3b}{a+b} > \sqrt{3}.$

Exercice 2. (4points)

I. Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x,\ \ y \in \mathbb{Z}, \quad x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x^2 - y^2 = 3k.$$

(a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(i) Réflexivité de $\mathcal{R}$: soit $x \in \mathbb{Z}$. On a

$$x^2 - x^2 = 0 = 3 \times 0 \text{ donc } \exists k = 0 \in \mathbb{Z} : x^2 - x^2 = 3k.$$ 0,5

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}x$. D'où la réflexivité de $\mathcal{R}$.

(ii) Symétrie de $\mathcal{R}$: soient $x, y \in \mathbb{Z}$, tels que $x\mathcal{R}y$. On a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x^2 - y^2 = 3k \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : -y^2 + x^2 = 3k\ (\times(-1)) \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y^2 - x^2 = 3(-k) \\ &\Longrightarrow \exists k' = (-k) \in \mathbb{Z} : y^2 - x^2 = 3k' \\ &\Longrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$ 1

Donc $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$. D'où la symétrie de $\mathcal{R}$.

(iii) Transitivité de $\mathcal{R}$: soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$, tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ et \\ y\mathcal{R}z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} : x^2 - y^2 = 3k... \\ et \\ \exists k' \in \mathbb{Z} : y^2 - z^2 = 3k'... \end{array} \right.$$ 1

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} : x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = 3k + 3k' \\ &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} : x^2 - z^2 = 3k + 3k' \\ &\Longrightarrow \exists k_1 = (k + k') \in \mathbb{Z} : x^2 - z^2 = 3k_1 \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$. D'où la transitivité de $\mathcal{R}$.

De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) La classe d'équivalence de 0.

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : \quad x^2 - 0 = 3k\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : \quad x^2 = 3k\} \\ &= \{x = \pm\sqrt{3k} / k \in \mathbb{N} \quad et \quad x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\} \end{aligned}$$ 1,5

Exercice 3. (6points)

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 3x + \dfrac{9}{4}$.

1. Calculons $f(0)$, $f(-3)$.

$$f(0) = 0^2 + 3 \times 0 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$ 0,5

$$f(-3) = (-3)^2 + 3 \times (-3) + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$ 0,5

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-1\}) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{-1\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + \frac{9}{4} = -1\} \end{aligned}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + \frac{13}{4} = 0\}$$
$$= \emptyset$$

1

2. • Injectivité de f : f n'est pas injective car $y = \frac{9}{4}$ admet deux antécédents (d'après la question précédente) $f(0) = f(-3) = \frac{9}{4}$ mais $0 \neq -3$. 0,5
   • Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = -1$ n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente). 0,5
   • Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective. 0,5

3. Donnons des intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective et déterminons l'application réciproque f^{-1}.
   Résolons l'équation $y = f(x)$ où $y \in J$ et x à déterminer d'une manière unique dans I.
   $y = x^2 + 3x + \frac{9}{4} \Longrightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} - y = 0$
   $\triangle = 9 - 4(\frac{9}{4} - y) = 4y$
   $\triangle > 0 \Longrightarrow 4y > 0 \Longrightarrow y \in [0, +\infty[$
   les racines sont $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{4y}}{2} = \frac{-3}{2} + \sqrt{y}$, et $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{4y}}{2} = \frac{-3}{2} - \sqrt{y}$ 1,5
   Le tableau de variation

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Il est facile de vérifier que $f : I = [\frac{-3}{2}, +\infty[\longrightarrow J = [0, +\infty[$ est une bijection.

$$f^{-1} : \quad [0, +\infty[\quad \longrightarrow [\frac{-3}{2}, +\infty[$$
$$y \quad \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{-3 + \sqrt{4y}}{2} = \frac{-3}{2} + \sqrt{y}$$

1

.

Remarque : on peut aussi considérer la bijection $f : I =]-\infty, \frac{-3}{2}] \longrightarrow J = [0, +\infty[$ et dans ce cas

$$f^{-1} : \quad [0, +\infty[\quad \longrightarrow]-\infty, \frac{-3}{2}]$$
$$y \quad \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{-3 - \sqrt{4y}}{2} = \frac{-3}{2} - \sqrt{y}$$

.

Exercice 4. (6 points)

I) Soit $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + x}.$$

(a) Déterminons D_f le domaine de définition de f.

f est définie si et seulement si le dénominateur $(x^2 + x)$ est différent de 0.
Or $x^2 + x \neq 0$ si et seulement si $x \neq -1$ et $x \neq 0$
On écrit $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 0\}$

0,5

(b) Calculons $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x+1}\right) = 1.$$

Remarque on peut utiliser la règle de l'hospital.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x}{2x + 1} = 1$$

1

(c) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en "0" ?

Par définition, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 si $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$ existe et est finie.

Comme $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + x} = 1$, on déduit que f est prolongeable par continuité en 0.
Son promogement s'ecrit :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^2 + x} & si \quad x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0\} \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1

II) 1) Le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f \ : \ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que
1. f est continue sur $[a, b]$,
2. $f(a).f(b) < 0$.
Alors
$\exists \ x_0 \in]a, b[: \quad f(x_0) = 0.$

1

2) Considérons la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^2 + x} & si \quad -1 < x < 0 \\[2ex] \dfrac{1 + \ln(1 + x)}{x + 1} & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

(a) g est-elle continue sur $[-\frac{\pi}{4}, 1]$?

$x \longrightarrow \dfrac{\sin x}{x^2 + x}$ est continue sur $]-1, 0[$ donc elle est continue sur $[-\frac{\pi}{4}, 0[$

et $x \longrightarrow \dfrac{1+\ln(1+x)}{x+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc elle est continue sur $[0,1]$, il reste donc à étudier la continuité de g en $x=0$. On a $g(0)=\dfrac{1+\ln(1+0)}{0+1}=1$ 0,5

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} g(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sin x}{x^2+x}=1 \quad et \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} g(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\left(\frac{1+\ln(1+x)}{x+1}\right)=1$$ 0,5

On a $\lim_{x\longrightarrow 0^-} g(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+} g(x)=g(0)$. Donc g est continue en 0. 0,5

Finalement la fonction g est continue sur $[-\frac{\pi}{4},1]$.

(b) Peut-on appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g sur $[-\frac{\pi}{4},1]$?

$$g(-\frac{\pi}{4})=\frac{\sin(-\frac{\pi}{4})}{(-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\pi}{4}} =\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}} =\frac{-16\sqrt{2}}{2(\pi^2-4\pi)}>0$$

$$g(1)=\frac{1+\ln(1+1)}{1+1}=\frac{1+\ln(2)}{2}>0$$

0,5

La fonction g est continue sur $[-\frac{\pi}{4},1]$, mais $g(-\frac{\pi}{4}).g(1)>0$, donc on ne peut pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g sur $[-\frac{\pi}{4},1]$. 0,5