Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Année universitaire 2017-2018
Juin 2018

Examen de remplacement de MATHS 2
Durée : 2 heures

Exercice n° 1. *(4pts.)* Soient

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx \;\text{ et }\; H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}dx.$$

1. En utilisant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer G.
2. Calculer $G + H$.
3. En déduire H.

Exercice n° 2. *(5pts.)* Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre donnée par :

$$y' + (3x^2+1)y = x^2e^{-x}. \tag{1}$$

1. Résoudre l'équation non homogène donnée par (1).
2. Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice n° 3. *(5pts.)* Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 5y' + 4y = e^x + 2xe^{4x}. \tag{2}$$

1. Déterminer la solution générale de (2).
2. Trouver la solution de l'équation (2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice n° 4. *(6pts.)* Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^3 - A^2 - A$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
3. En utilisant la question 2, montrer que A^2 est inversible et calculer son inverse.
4. Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \\ x - y + z = 2, \end{cases} \qquad (S)$$

   (a) Ecrire la forme matricielle de (S).

   (b) Résoudre le système (S) en utilisant la méthode de la matrice inverse.

Bon courage

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie, Département de Technologie

Année universitaire 2017-2018
Juin 2018

Corrigé de l'examen de remplacement de MATHS 2

Exercice n° 1. Soit

$$G=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx.$$

1. Calcul de G en utilisant le changement de variable $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a $\cos(x)=\frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x=2\arctan(t)$ et $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. De plus les nouvelles bornes d'intégration sont : si $x=0\Rightarrow t=\tan(0)=0$ et si $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. En remplaçant dans G, on obtient : $G=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx=\int_0^1\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int_0^1\frac{1-t^2}{1+t^2}dt=$ $\int_0^1\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)dt=\left(2\arctan(t)-t\right)|_0^1=\left(2\arctan(1)-1\right)-\left(2\arctan(0)-0\right)=\frac{\pi}{2}-1.$ 2
2. Calcul de $G+H$. On a $G+H=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=x|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$ 1
3. Déduction de H. On a $H=G+H-G=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=1.$ 1

Exercice n° 2. Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre donnée par :

$$y'+(3x^2+1)y=x^2e^{-x}. \tag{1}$$

1. Résolution de l'équation homogène associée à (1) : L'équation homogène associée est

$$y'+(3x^2+1)y=0.......\ (E_0)$$

Pour $y\neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}=-(3x^2+1)\quad&\Longrightarrow\quad\frac{dy}{y}&&=-(3x^2+1)dx\\&\Longrightarrow\quad\ln|y|&&=-(x^3+x)+K_1,\ K_1\in\mathbb{R}\\&\Longrightarrow\quad y&&=C_1e^{-(x^3+x)},\ C_1\in\mathbb{R}^*.\end{aligned}$$

2

$y=0$ est une solution évidente de (E_0) . Donc, la solution générale de (E_0) est

$$y(x)=Ce^{-(x^3+x)},\ C\in\mathbb{R}.$$

2. Résolution de l'équation non homogène (1). En faisant varier la constante C, la solution générale de (1) sera $y(x)=C(x)e^{-(x^3+x)}$.
On a $y'=C'(x)e^{-(x^3+x)}-C(x)\left(3x^2+1\right)e^{-(x^3+x)}$. En remplaçant dans l'équation non homogène (1), on obtient
$C'(x)e^{-(x^3+x)}=x^2e^{-x}\Rightarrow C'(x)=x^2e^{x^3}\Rightarrow C(x)=\frac{1}{3}e^{x^3}+K,\ K\in\mathbb{R}.$
Donc la solution générale de (1) est

$$y(x)=\left(\frac{1}{3}e^{x^3}+K\right)e^{-(x^3+x)},\ K\in\mathbb{R}.$$

2

3. Trouvons la solution de l'équation (1) vérifiant $y(0)=1$. On a $\frac{1}{3}+K=1\Rightarrow K=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Donc l'unique solution du problème est

$$y(x)=\left(\frac{1}{3}e^{x^3}+\frac{2}{3}\right)e^{-(x^3+x)}.$$

1

Exercice n° 3. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 5y' + 4y = e^x + 2xe^{4x}. \qquad (2)$$

1. Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (2) : L'équation homogène associée à (2) est

$$y'' - 5y' + 4y = 0 \;\; ....(E_0)$$

L'équation caractéristique de (E_0) est

$$r^2 - 5r + 4 = 0 \;\; ....(EC)$$

1

(EC) admet deux racines réelles distinctes $r1 = 1$ et $r_2 = 4$. Donc la solution générale de (E_0) est

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Détermination de solution particulière de (2). On a le second membre $f(x) = e^x + 2xe^{4x}$. Donc la solution particulière y_p est de la forme $\alpha x e^x + (\beta x^2 + \gamma x)e^{4x}$ car 1 et 4 sont des solutions de l'équation caractéristique. Il reste maintenant à trouver les constantes α, β et γ. On a $y_p' = (\alpha x + \alpha)e^x + (4\beta x^2 + (2\beta + 4\gamma)x + \gamma)e^{4x}$ et $y_p'' = (2\alpha + \alpha x)e^x + (16\beta x^2 + (16\beta + 16\gamma)x + (2\beta + 8\gamma))\, e^{4x}$. En remplaçant dans (2), on obtient : $-3\alpha e^x + [6\beta x + (2\beta + 3\gamma)]\, e^{4x} = e^x + 2xe^{4x}$. Par identification, on a alors $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = -\frac{2\beta}{3} = \frac{-2}{9}$. Donc la solution particulière est

$$y_p = -\frac{1}{3}xe^x + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x\right)e^{4x}.$$

2.5

3. Détermination de la solution générale de (2) : La solution générale de (2) est

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y_0(x) + y_p(x) \\ &= \left(-\tfrac{1}{3}x + C_1\right)e^x + \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{9}x + C_2\right)e^{4x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Cherchons la solution de (2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. On a

$$y'(x) = \left(-\frac{1}{3}x + C_1 - \frac{1}{3}\right)e^x + \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + 4C_2 - \frac{2}{9}\right)e^{4x}.$$

1.5

Par suite,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 4C_2 = \frac{23}{9}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{13}{27} \\ C_2 = \frac{14}{27}. \end{cases}$$

Finalement, la solution est

$$y(x) = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{13}{27}\right)e^x + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{14}{27}\right)e^{4x}.$$

Exercice n° 4. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

0,5

1. Calcul de $A^3 - A^2 - A$. Calculons d'abord A^2 et A^3. On a

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ 0.5

Donc

$$A^3 - A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3.$$ 0.5

2. Déduction que A est inversible et donner son inverse. On a $A^3 - A^2 - A = -I_3 \Rightarrow A + A^2 - A^3 = I_3 \Rightarrow A(I_3 + A - A^2) = I_3$. Donc A est inversible et son inverse est 0.5

$$A^{-1} = I_3 + A - A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$ 0.5

3. Montrons que A^2 est inversible et calculons son inverse. On a $A \times A^{-1} = I_3 \Rightarrow A \times A \times A^{-1} = A \times I_3 \Rightarrow A^2 \times A^{-1} = A \Rightarrow A^2 \times A^{-1} \times A^{-1} = A \times A^{-1} \Rightarrow A^2 \times (A^{-1})^2 = I_3$. Donc A^2 est inversible et son inverse est 1

$$(A^{-1})^2 = A^{-1} \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$ 1

4. Forme matricielle et résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \\ x - y + z = 2, \end{cases} \qquad (S)$$

(a) Forme matricielle de (S). En terme matriciel, (S) s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (A^{-1})^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$ 1

(b) Résolution de (S) par la méthode de la matrice inverse. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ((A^2)^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ 1