Université A.Mira de Béjaia. *11/04/2018*

Département de Technologie

Examen de rattrapage Maths I

Exercice 1. *(07.00 points) 1) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ comme suit :*

$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z}$ tel que : $x = y + 5\alpha$.

a) Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Soient $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$. Montrez que si :

$$x\mathcal{R}y \quad \textit{et } z\mathcal{R}t \text{ alors} \quad xz\mathcal{R}yt.$$

2) Soit $\mathcal{S}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{S}y \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}$ tels que : $x - y = n + m\sqrt{3}$.

a) Montrez que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre .

b) L'ordre est-il total?

Exercice 2. *(08.00 points) I) Soient f et g deux applications définies sur $\mathbb{R}$ comme suit* :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = 3x^2 - 5x$$

$$g : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = 3x - 2.$$

1) Calculez $f(\{-1, 1\})$, $f(\{0, \frac{5}{3}\})$, $f([3, 4])$, $f^{-1}(\{-2\})$, $f^{-1}(\{-3\})$.

2) f est elle injective, surjective? est-elle bijective?

3) Étudiez la bijection de l'application g.

4) Calculez fog.

II) Soient h et k deux fonctions continues sur $[a, b]$, telles que : $h(a) = k(b)$ et $h(b) = k(a)$.

Montrez que

$$\exists x \in]a, b[\text{ tel que } h(x) = k(x).$$

Exercice 3. *(05.00 points) Soit f une fonction réelle définie comme suit*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & si\ 0 \leq x \leq 1, \\ \\ ax^2 + bx + 1, & si\ x > 1. \end{cases}$$

1) Étudiez, selon les valeurs de a et b, la continuité de f sur son domaine de définition.

2) Déterminez a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé de l'examen de rattrapage de Mathématiques 1

Exercice 1 (6.5 pts)

1. On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z} \text{ tel que : } x = y + 5\alpha.$$

a) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, en effet :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\exists \alpha = 0$ tel que $x = x + 0\alpha$. Donc $x\mathcal{R}x$. 0.5
- $\mathcal{R}$ est symétrique : Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$. On a $x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z}/x = y+5\alpha \Rightarrow y = x + 5(-\alpha)$. Donc $\exists \alpha' = -\alpha \in \mathbb{Z}/y = x + 5\alpha'$. D'où $y\mathcal{R}x$. 1
- $\mathcal{R}$ est transitive : Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{Z}/x = y + 5\alpha \\ \text{et} \\ \exists \alpha' \in \mathbb{Z}/y = z + 5\alpha' \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha, \alpha' \in \mathbb{Z} : x + y = y + z + 5(\alpha + \alpha').$$

Donc $\exists \alpha'' = (\alpha + \alpha') \in \mathbb{Z}/x = z + 5\alpha''$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}z$. 0.5

b) Soient $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$. Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $z\mathcal{R}t$, alors $xz\mathcal{R}yt$.

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z} : x = y + 5\alpha \tag{1}$$

$$z\mathcal{R}t \Rightarrow \exists \alpha' \in \mathbb{Z} : z = t + 5\alpha' \tag{2}$$

(1)$\times$(2) donne : $\exists \alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}/xz = yt + 5(y\alpha' + t\alpha + 5\alpha\alpha')$. Donc pour $\alpha'' = (y\alpha' + t\alpha + 5\alpha\alpha') \in \mathbb{Z}$, on a : $xz = yt + 5\alpha''$. D'où $xz\mathcal{R}yt$. 1

2. On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{S}y \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x - y = n + m\sqrt{3}.$$

a) $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, en effet :

- $\mathcal{S}$ est réflexive : Soit $x \in \mathbb{R}$, $x - x = 0 + 0\sqrt{3}$. Donc $\exists m = 0$, $\exists n = 0$ tel que $x\mathcal{S}x$. 0.5
- $\mathcal{S}$ est antisymétrique : Soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$. Alors on a :

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}/x - y = n + m\sqrt{3} \\ \text{et} \\ \exists n', m' \in \mathbb{Z}/y - x = n' + m'\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + n' = 0 \\ \text{et} \\ m + m' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 0, n' = 0 & \text{car } n, n' \in \mathbb{N} \\ \text{et} \\ m = 0, m' = 0 & \text{car } m, m' \in \mathbb{N} \end{cases}$$

D'où $x = y$. Donc $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x \Rightarrow x = y$. 1

- $\mathcal{S}$ est transitive : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x\mathcal{S}y \Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}/x - y = n + m\sqrt{3} \tag{3}$$

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow \exists n', m' \in \mathbb{Z}/y - z = n' + m'\sqrt{3} \tag{4}$$

(3)+(4) donne : $x - z = n + n' + (m + m')\sqrt{3}$. Donc $\exists n'' = (n + n'), m'' = (m + m') \in \mathbb{N}/x - z = n'' + m''\sqrt{3}$. 1

b) $\mathcal{S}$ n'est pas un ordre total, car on peut trouver deux éléments x, y qui ne soient pas comparables par la relation $\mathcal{S}$. En effet : pour $x = 1 + 4\sqrt{3}$, $y = 2 + \sqrt{3}$ on a : $x - y = -1 + 3\sqrt{3}$ et $y - x = 1 - 3\sqrt{3}$. Donc x n'est pas en relation avec y et y n'est pas en relation avec x. 1

Exercice 2 (8pts)

I) Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 - 5x$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 3x - 2$.

1. Image directe image réciproque :
   - $f(\{-1, 1\}) = \{y \in \mathbb{R}/x \in \{-1, 1\}\} = \{(3x^2 - 5x) \in \mathbb{R}/x = -1 \text{ ou } x = 1\} = \{8, -2\}$. 0.5
   - $f(\{0, \frac{5}{3}\}) = \{y \in \mathbb{R}/x \in \{0, \frac{5}{3}\}\} = \{(3x^2 - 5x) \in \mathbb{R}/x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{3}\} = \{0\}$. 0.5
   - $f([3, 4]) = [f(3), f(4)] = [12, 28]$ (car f est croissante sur $[3, 4]$). 0.5
   - $f^{-1}(-2) = \{x \in \mathbb{R}/3x^2 - 5x = -2\} = \{x \in \mathbb{R}/3x^2 - 5x + 2 = 0\} = \{1, \frac{2}{3}\}$. 0.5
   - $f^{-1}(-3) = \{x \in \mathbb{R}/3x^2 - 5x = -3\} = \{x \in \mathbb{R}/3x^2 - 5x + 3 = 0\} = \emptyset$ (car l'équation $3x^2 - 5x + 3 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$). 0.5
2. Injectivité, surjectivité et bijectivité de f :
   - f n'est pas injective car $0 \neq \frac{5}{3}$. Mais $f(0) = f(\frac{5}{3}) = 0$. 0.5
   - f n'est pas surjective car $y = -3$ n'a pas d'antécédent. 0.5
   - f n'est pas bijective car f n'est pas injective (et n'est pas surjective). 0.5
3. g est bijective car :
   - g est injective : Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$. 0.5
   - g est surjective : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ avec $x = \frac{y+2}{3}$ comme antécédent de y. 0.5
4. $fog : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $f(g(x)) = 27x^2 - 51x + 22$. 1

II) Soit $r(x) = h(x) - k(x)$. On a :

a) La fonction r est continue sur $[a, b]$ car h et k sont continues sur $[a, b]$. 0.5

b) $r(a) = h(a) - k(a) = h(a) - h(b)$ car $k(a) = h(b)$ et $r(b) = h(b) - k(b) = h(b) - h(a) = -(h(a) - h(b))$ car $k(b) = h(a)$. D'où $r(a)r(b) \leqslant 0$ (la fonction r change de signe entre a et b). 1 Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins $x \in [a, b]$ tel que $r(x) = 0$, soit encore $h(x) = k(x)$. 0.5

Exercice 3 (5.5pts)

1. Déterminons une relation entre a et b pour que f soit continue sur $[0, +\infty[$. f est continue sur $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, 1[$ et $x \mapsto ax^2 + bx + 1$ est continue sur $]1, +\infty[$. 0.5 Il reste l'étude de la continuité en $x_0 = 1$. Calculons d'abord la limité à gauche et à droite : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. 1 Maintenant, f est continue en $x_0 = 1$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1$. Finalement la relation entre a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^+$ est donnée par : $a + b + 1 = 1 \Leftrightarrow a = -b$. 1
2. Déterminons les valeurs de a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}^{*,+} = \mathbb{R}^+ - \{0\}$. On a f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*,+} - \{1\}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, 1[$ et $x \mapsto ax^2 + bx + 1$ est dérivable sur $]1, +\infty[$. 1 Il reste l'étude de la dérivabilité en $x_0 = 1$. Rappelons d'abord que la condition de continue de f sur $\mathbb{R}^+$ est $a = -b$. Calculons maintenant les dérivées à gauche et à droite. La dérivée à gauche est : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x} - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$. 0.5 La dérivée à droite est : $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{ax^2 + bx + 1 - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{ax^2 - ax}{x - 1} = a$. 0.5 Donc f est dérivable en $x_0 = 1 \Leftrightarrow a = 1/2$ et $b = -a = -1/2$. Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*,+} \Leftrightarrow a = 1/2$ et $b = -1/2$. 1