Département:

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Janvier 2018

Examen de Maths 1. Durée 2 heures.

Exercice 1. (3.5 points)

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par contraposition que : si (n^2-1) n'est pas divisible par 4, alors n est pair.

Exercice 2. (06 points)

1. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :
$$\forall a,\ b \in \mathbb{Z}, \quad a\,\mathcal{R}\,b \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a + 2b = 3k.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Donner la classe d'équivalence de 1.
2. On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathcal{T}$ par :
$$\forall x,\ y \in \mathbb{N}, \quad x\,\mathcal{T}\,y \Longleftrightarrow 0 \leq y - x \leq 2.$$
   $\mathcal{T}$ est-elle réflexive ? antisymétrique ? transitive ?

Exercice 3. (5.5 points)

On considère l'application $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2+x}{3-x}$.

1. Calculer $f^{-1}(\{-1\})$.
2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Si $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow X$ (où $X \subset \mathbb{R}$), déterminer X pour que f soit bijective ; puis donner la réciproque f^{-1} de f.

Exercice 4. (05 points)

I) Soient α et β deux réels, et soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$h(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$
   (a) Déterminer β pour que h soit continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer α et β pour que h soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

II) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = f(x + \frac{b-a}{2}) - f(x)$, $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$, s'annule au moins en un point de l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$.

Bon Courage

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Janvier 2018

Corrigé de l'examen de Maths1

Exercice 1. (3.5 points)

1. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons par $P(n)$ la propriété $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. 0,5

Pour n=1, on a $1^3 = 1$ et $\frac{1(1+1)^2}{4} = 1$, donc $P(1)$ est vraie.

Supposons que $P(n)$ est vraie ($i.e., \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$) et montrons que $P(n+1)$ est vraie 0,5
($i.e., \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$).

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} k^3\Big) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

1

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Montrons par contraposition que si (n^2-1) n'est pas divisible par 4, alors n est pair.
La contraposée de la proposition est n n'est pas pair $\Longrightarrow\ (n^2-1)$ est divisible par 4 0,5
On a

$$\begin{aligned}
n \text{ n'est pas pair } (n \text{ est impair}) &\Longrightarrow n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow n^2 = (2k+1)^2, k \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow n^2 - 1 = (4k^2+4k+1) - 1, k \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow n^2 - 1 = 4(k^2+k), k \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow n^2 - 1 = 4k', k' = (k^2+k) \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

1

Par le principe de contraposition, on a démontré la proposition si (n^2-1) n'est pas divisible par 4, alors n est pair.

Exercice 2. (6 points)

I. Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall a,\ \ b \in \mathbb{Z}, \quad a\,\mathcal{R}\,b \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a + 2b = 3k.$$

(a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(i) Réflexivité de $\mathcal{R}$: soit $a \in \mathbb{Z}$. On a

$a + 2a = 3a$ donc $\exists k = a \in \mathbb{Z} : a + 2a = 3k$.

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}a$. D'où la réflexivité de $\mathcal{R}$. 0,5

(ii) Symétrie de $\mathcal{R}$: soient $a, b \in \mathbb{Z}$, tels que $a\mathcal{R}b$. On a

$$\begin{aligned} a\mathcal{R}b &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a + 2b = 3k \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 3a - 2a + 3b - b = 3k \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b + 2a = 3b + 3a - 3k \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b + 2a = 3(b + a - k) \\ &\Longrightarrow \exists k_1 = (b + a - k) \in \mathbb{Z} : b + 2a = 3k_1 \\ &\Longrightarrow b\mathcal{R}a \end{aligned}$$

1

Donc $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a\mathcal{R}b \Longrightarrow b\mathcal{R}a$. D'où la symétrie de $\mathcal{R}$.

(iii) Transitivité de $\mathcal{R}$: soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$. On a

$$\left\{\begin{array}{l} a\mathcal{R}b \\ et \\ b\mathcal{R}c \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} : a + 2b = 3k ...(1) \\ et \\ \exists k' \in \mathbb{Z} : b + 2c = 3k' ...(2) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} : (a + 2b) + (b + 2c) = 3k + 3k' \\ &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} : a + 2c = 3k + 3k' - 3b \\ &\Longrightarrow \exists k_2 = (k + k' - b) \in \mathbb{Z} : a + 2c = 3k_2 \\ &\Longrightarrow a\mathcal{T}c \end{aligned}$$

1

Donc $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a\mathcal{R}b \ \ et \ \ b\mathcal{R}c \Longrightarrow a\mathcal{R}c$. D'où la transitivité de $\mathcal{R}$.

De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) La classe d'équivalence de 1.

$$\begin{aligned} \bar{1} &= \{a \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}1\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : a + 2 \times 1 = 3k\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : a = 3k - 2\} \\ &= \{3k - 2 / k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{..., -11 - 8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, ...\} \end{aligned}$$

1

II. On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathcal{T}$ par :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{N}, \quad x\ \mathcal{T}\ y \Longleftrightarrow 0 \leq y - x \leq 2.$$

(i) Réflexivité de $\mathcal{T}$: soit $x \in \mathbb{N}$, on a bien $0 \leq x - x \leq 2$ puis que $x - x = 0$ 0,5

donc $\forall x \in \mathbb{N}\ \ x\mathcal{T}x$. D'où la réflixivité de $\mathcal{T}$.

(ii) Antisymétrie de $\mathcal{T}$: soient $x, y \in \mathbb{Z}$, tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. On a

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{T}y \\ et \\ y\mathcal{T}x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leq y - x \leq 2 \\ et \\ 0 \leq x - y \leq 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leq y - x \leq 2 \\ et \\ -2 \leq y - x \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow (y-x) \in [0,2] \quad et \quad (y-x) \in [-2,0] \\ &\Longrightarrow (y-x) \in [0,2] \cap [-2,0] \\ &\Longrightarrow y - x = 0 \\ &\Longrightarrow y = x \end{aligned}$$

1

d'où l'antisymétrie de $\mathcal{T}$

(iii) Transitivité de $\mathcal{T}$: par contre exemple, soient les entiers 1,3 et 5 :
On a $1\mathcal{T}3$ car $3-1=2$ et donc $0 \leq 3-1 \leq 2$.
On a aussi $3\mathcal{T}5$ car $5-3=2$ et donc $0 \leq 5-3 \leq 2$. 1
Mais $1\not\mathcal{T}5$, car $5-1=4$ et donc $5-1>2$
d'où $\mathcal{T}$ n'est pas transitive.

Exercice 3. (5.5 points)

On considère l'application $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$:

1. Calculons $f^{-1}(\{-1\})$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-1\}) &= \{x \in \mathbb{R} - \{3\} / f(x) \in \{-1\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{3\} / f(x) = -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{3\} / \frac{2+x}{3-x} = -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{3\} / 2 + x = x - 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{3\} / 2 = -3\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

1

2. • Injectivité de f : soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\} : f(x_1) = f(x_2)$. On a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow \frac{2+x_1}{3-x_1} = \frac{2+x_2}{3-x_2} \\ &\Longrightarrow (2+x_1)(3-x_2) = (2+x_2)(3-x_1) \\ &\Longrightarrow 6 + 3x_1 - 2x_2 - x_1x_2 = 6 - 2x_1 + 3x_2 - x_1x_2 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

1

d'où l'injectivité de f

• Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y=-1$ n'a pas d'antécédent (d'aprés la question précédente). 0,5

• Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective. 0,5

3. Si $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow X$ (où $X \subset \mathbb{R}$). Déterminons X pour que f soit bijective :
Il est facile de vérifier que $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$ est une bijection. 1
$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, \forall y \in X = \mathbb{R} - \{-1\}$ on a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Longleftrightarrow y = \frac{2+x}{3-x} \\ &\Longleftrightarrow y(3-x) = (2+x) \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{3y-2}{y+1} \end{aligned}$$

0,5

donc

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad X = \mathbb{R} - \{-1\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{3\} \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = \frac{3y-2}{y+1} \end{aligned}$$

1

Exercice 4. (5 points)

I) Soient α et β deux réels, et soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

– Déterminons β pour que h soit continue sur $\mathbb{R}$. h est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto e^x$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta$ est continue sur $]0, +\infty[$, il reste donc à étudier la continuité en $x = 0$. On a $h(0) = \beta$ 0,5

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} e^x = 1 \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (\frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta) = \beta$$

La fonction est continue en 0 si et seulement si $\lim_{x \longrightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} h(x) = h(0)$. Donc h est continue en 0 $\Longleftrightarrow \beta = 1$ 0,5

Finalement la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\beta = 1$.

– Déterminons α et β pour que h soit dérivable sur $\mathbb{R}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, il reste donc à étudier la dérivabilité en $x = 0$: 0,5

Si $\beta \neq 1$, on a h n'est pas continue en 0, donc elle n'est pas dérivable en 0. 0,5

Donc posons $\beta = 1$. On a donc $h(0) = \beta = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow o^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \alpha x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (\frac{1}{2}x + \alpha) = \alpha$$

La fonction est dérivable en 0 si et seulement si $\beta = 1$ et $\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$ donc $\alpha = 1$ 1

Finalement la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\beta = 1$ et $\alpha = 1$.

II) $g(x) = f(x + \dfrac{b-a}{2}) - f(x)$ est une fonction continue sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ car c'est une somme et composition de fonctions continues. 0,5

$$g(a) = f(a + \frac{b-a}{2}) - f(a) = f(a + \frac{b-a}{2}) - f(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a)$$ 0,5

$$g(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}) - f(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2}) = -(f(\frac{a+b}{2}) - f(b)) = -(f(\frac{a+b}{2}) - f(a)) \quad car \quad f(a) = f(b)$$ 0,5

donc $g(a) = -g(\frac{a+b}{2})$ (g change de signe entre a et $\frac{a+b}{2}$), et la fonction g est continue sur $[a, \frac{a+b}{2}]$. Donc d'aprés le théorème des valeurs intermediaires, elle s'annule au moins en un point de l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ (c-a-d $\exists c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tq : $g(c) = 0$). 0,5