Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Juin 2017

Corrigé de l'examen de Rattrapage MathsII

Partie 1. (12 points)

I On considère l'integrale suivante :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

1. Calculons I_0.
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{x^0}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \\ &= \ln \mid 1+x \mid]_0^1 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$ 1

2. Montrons que $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.
$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 (\frac{x^n + x^{n+1}}{1+x})dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$ 2

3. En déduire les valeurs de I_1 et de I_2
$$\begin{aligned} I_1 + I_0 = \frac{1}{0+1} &\Longrightarrow I_1 = \frac{1}{0+1} - \ln 2 \\ &\Longrightarrow I_1 = 1 - \ln 2 \end{aligned}$$ 0,5
$$\begin{aligned} I_2 + I_1 = \frac{1}{1+1} &\Longrightarrow I_2 = \frac{1}{1+1} - (1-\ln 2) \\ &\Longrightarrow I_2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$ 0,5

II 1. Déterminons les constantes réelles a, b et c qui vérifient : $\frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{(x+1)}$.

On a $\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{(x+1)} = \frac{(a+c)x^2+(a+b)x+b}{x^2(x+1)}$
En identifiant, on obtient : $a = 1, b = 1, c = -1$
donc $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)}$. 1,5

a. Trouvons la primitive $F(x) = \int \frac{1}{x^2}\ln(x^2+x)dx$;
Intégration par partie :

$$f(x) = \ln(x^2+x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow g(x) = -\frac{1}{x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{-1}{x}ln(x^2+x) + \int \frac{1}{x}\frac{2x+1}{x^2+x}dx.\\
&= \frac{-1}{x}ln(x^2+x) + \int \frac{2x+1}{x(x^2+x)}dx\\
&= \frac{-1}{x}ln(x^2+x) + \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)}\right)dx\\
&= \frac{-1}{x}ln(x^2+x) + \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+1| + C \qquad /C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

1,5

b. Résoulution de l'équation différentielle suivante : $y' - \frac{2}{x}y = \ln(x^2+x)$....(E).

L'équation homogène associée est $y' - \frac{2}{x}y = 0....(E_0)$
est une équation différentielle non homogène (ou avec second membre).
Résolution de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2}{x}y = 0 &\Longrightarrow y' = \frac{2}{x}y\\
&\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}dx\\
&\Longrightarrow \ln|y| = \ln|x^2| + c \qquad /c \in \mathbb{R}.\\
&\Longrightarrow y = \pm e^c x^2\\
&\Longrightarrow y = Kx^2 \qquad /K = \pm e^c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

1

Résolution de l'équation avec second membre $y' - \frac{2}{x}y = \ln(x^2+x)$
Méthode de la variation de la constante : Soit $y(x) = Kx^2$ la solution générale de l'équation homogène. On fait varier la constante K, et la solution générale de l'éqution avec le second membre (E) sera : $y(x) = K(x)x^2$. On a $y'(x) = K'(x)x^2 + 2K(x)x$. En remplaçant y et y' dans l'équation (E), on obtient

$K'(x) = \frac{1}{x^2}\ln(x^2+x)$

par conséquent $K(x) = \int \frac{1}{x^2}\ln(x^2+x)$

$$K(x) = \frac{-1}{x}ln(x^2+x) + \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+1| + C \qquad /C \in \mathbb{R}.$$

1

Finalement la solution générale de l'équation (E) est

$y_G(x) = \frac{-1}{x}ln(x^2+x) + \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+1| + C + Kx^2.$

0,5

$$y_G(x) = -xln(x^2+x) + x^2\ln|x| - x - x^2\ln|x+1| + K_1 \qquad /K_1 = C + K \in \mathbb{R}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Résolution de l'équation homogène

$$y'' - 2y' + y = 0$$

L'équation caractéristique

$$r^2 - 2r + 1 = 0...(1)$$

admet la racine réelle double $r1 = 1$. Ainsi, la solution générale de (1) est

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

1

$m = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique, donc $y_1 = x^2 P_0(x)e^x$ avec $P_0(x) = a$. En identifiant, on trouve $a = \frac{1}{2}$.

0,25

D'où

$$y_1 = \frac{1}{2}x^2e^x$$ 0,75

Finalement,

$$y_G = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$$

$$y_G = (C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2)e^x$$ 0,5

Partie 2. (08 points)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la matrice suivante :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $(A_\alpha - \alpha I_3)^2 = 3(A_\alpha - \alpha I_3)$.

$$(A_\alpha - \alpha I_3)^2 \implies \left(\begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\right)^2$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $(A_\alpha - \alpha I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(A_\alpha - \alpha I_3)$ 1,5

2. Supposons maintenant que $\alpha = -2$.

a. On utilise la question 1 pour determiner les valeurs de $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$(A_{-2} + 2I_3)^2 = 3(A_{-2} + 2I_3)$$
$$(A_{-2} + 2I_3)^2 - 3(A_{-2} + 2I_3) = 0_{M_3}(\mathbb{R})$$
$$(A_{-2} + 2I_3)(A_{-2} + 2I_3 - 3I_3) = 0_{M_3}(\mathbb{R})$$
$$A_{-2}^2 + A_{-2} - 2I_3 = 0_{M_3}(\mathbb{R})$$

2

Finalement $\beta = 1$ et $\gamma = -2$
Remarque : On peut aussi determiner les valeurs de β, γ avec les calcules.

$$A_{-2}^2 + \beta A_{-2} + \gamma I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})} \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 + \beta\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

$$\implies \begin{pmatrix} 3-\beta+\gamma & -1+\beta & -1+\beta \\ -1+\beta & 3-\beta+\gamma & -1+\beta \\ -1+\beta & -1+\beta & 3-\beta+\gamma \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

Par identification, on obtient $\beta = 1, \gamma = -2$.

b. On déduire que A_{-2} est inversible et on calcule son inverse A_{-2}^{-1}.

$$\begin{aligned} A_{-2}^2 + A_{-2} - 2I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})} &\Longrightarrow A_{-2}(A_{-2}+I_3) = 2I_3 \\ &\Longrightarrow A_{-2}\left(\frac{A_{-2}+I_3}{2}\right) = I_3 \end{aligned}$$

D'où la matrice A_{-2} est inversible car il existe $B = \frac{A_{-2}+I_3}{2}$ telle que $A_{-2}B = I_3$.

1,5

et $A_{-2}^{-1} = \frac{A_{-2}+I_3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

1

Déduire la solution du système suivant

$$(S) : \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{cases}$$

L'écriture matricille de (S) est $A_{-2}X = B$ où $A_{-2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on à,

2

$$A_{-2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_{-2}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$