Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire 2014-2015
Juin 2015

Examen de MATHS 2. Durée : 2 heures

Exercice n° 1. ***(5pts.)*** Considérons l'équation différentielle

$$2y' - y = \cos x. \tag{1}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (1). $y = K_1 e^{\frac{1}{2}x}$ (2)
2. Vérifier que $y_p(x) = \frac{-1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x$ est une solution particulière de (1). (1)
3. En déduire la solution générale de (1). (1)
4. Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $y(0) = 0$. (1) $K = \frac{1}{5}$

Exercice n° 2. ***(4pts.)*** Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = (2x - 4)e^x. \tag{2}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène correspondante. $(A + Bx)e^{2x}$ (2)
2. Déterminer les constantes α et β pour que $y_1(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ soit une solution particulière de (2). $(2x+0)e^x$ (1)
3. Déterminer la solution générale de (2). (1)

Exercice n° 3. ***(5pts.)*** Soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx, n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0 et I_1. $\frac{\pi}{2}$ 1 (0,5) (0,5)
2. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$; (Indication : Ecrire $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} . \sin x dx$ et utiliser une intégration par parties). (3)
3. En déduire I_2 et I_3. (0,5) (0,5) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2}{3}$.

Exercice n° 4. ***(6pts.)***

1. Déterminer les constantes réelles a et b telles que : (0,5)

$$\frac{9}{x^2 - 5x - 14} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-7}$$

2. Calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{9}{x^2-5x-14} dx$. D éduire la valeur de l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{9}{x^2-5x-14} dx$. (0,5) $\ln\left|\frac{4}{7}\right|$ (1,5)
3. En utilisant un changement de variable convenable, calculer (1) $x = \sin t$ → $\ln\left(\frac{4}{7}\right)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9\cos t}{-14 - 5\sin t + \sin^2 t} dt.$$

4. Soit $x \in]7, +\infty[$, résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' - \frac{9}{x^2 - 5x - 14} y = \frac{x-7}{x^2 - 5x - 14}.$$

Bon courage

$y = K \cdot \frac{x-7}{x+2}$ (1,5) (1)

$K = \ln(x-7)$

Béjaia le 09 Juin 2015

Corrigé de l'EMD de Maths 2

Exercice n° 1 : 05pts : Considérons l'équation differentielle

$$2y' - y = \cos x \quad \text{-----1-}$$

1) l'équation homogène associée a -1- est $2y'-y=0$ ----2-

Pour $y=0$ et une solution triviale de -2-

si $y \neq 0$, on a -2- $\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int dx$ 2

$\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x + c \Rightarrow \boxed{y = K_1 e^{\frac{1}{2}x}}$ avec $K_1 = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow \boxed{y_0 = Ke^{\frac{1}{2}x},\ K \in \mathbb{R}}$

2) Soit $y_p = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x$

vérifions que y_p est une solution particulière de -1-

On a $y_p' = \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x$, donc 1

$2y_p' - y_p = 2\left(\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x\right) - \left(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x\right) = \cos x$

$\Rightarrow \cos x = \cos x$, alors y_p est bien une solution particulière de -1-.

3) La solution générale y_G de -1- et $y_G = y_0 + y_p$

$= Ke^{+\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x\right),\ K \in \mathbb{R}$. 1

4) $y_G(0) = 0 \Rightarrow Ke^{\frac{1}{2}0} + \left(-\frac{1}{5}\cos 0 + \frac{2}{5}\sin 0\right) = 0 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{5}}$

Finalement, la solution de -1- vérifiant $y(0)=0$

est $\boxed{y = \frac{1}{5}e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x\right)}$

1

Exercice n°02 : 04pts : Soit l'équation différentielle du second ordre suivante : $y''-4y'+4y=(2x-4)e^{x}$ ... -2-

1) l'équation homogène associée à -2- est

$$y''-4y'+4y=0 \quad \dots (E0)$$

L'équation caractéristique de (E0) est $r^2-4r+4=0$

$\Rightarrow (r-2)^2=0 \Rightarrow r=r_1=r_2=2$, par suite

$$y_0=(A+Bx)e^{2x}, \quad A,B\in\mathbb{R}.$$

2

2) Soit $y_1=(\alpha x+B)e^{x}$ une solution particulière de -2-, alors $y_1''-4y_1'+4y_1=(2x-4)e^{x}$

$\Rightarrow (2\alpha+B+\alpha x)e^{x}+(-4\alpha-4B-4\alpha x)e^{x}+(4\alpha x+4B)e^{x}$

$=(2x-4)e^{x} \Rightarrow \begin{cases}-2\alpha+B=-4\\ \alpha=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ B=0\end{cases}$

1

Donc $\boxed{y_1=2xe^{x}}$

3. La solution générale de -2- est

$$\boxed{y_G=y_0+y_1=(A+Bx)e^{2x}+2xe^{x},\ A,B\in\mathbb{R}}$$

1

Exercice 3 05pts :

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$

0,5

1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^0 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^1 dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$ 0,5

2) Montrons que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

on a $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} \cdot \sin x\, dx$

Posons $\begin{matrix} u(x) = (\sin x)^{n+1} \\ v'(x) = (\sin x) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)\cos x (\sin x)^n \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$

3

$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\, dx$

$= \left[-(\sin x)^{n+1} \cdot \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x\, dx$

$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(n+2)} x\, dx$

$(n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$, Donc $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$.

Conclusion $\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$

3) $I_2 = I_{0+2} = \frac{0+1}{0+2} I_0 = \frac{1}{2} I_0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$ 0,5

$I_3 = I_{1+2} = \frac{1+1}{1+2} I_1 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \boxed{\frac{2}{3}}$

0,5

Exercice 4 (06pts):

0,5

1) On a $\boxed{\dfrac{9}{x^2-5x-14} = -\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-7}}$, $a=-1$ et $b=1$.

2) On a $\displaystyle\int \frac{9}{x^2-5x-14}\,dx = \int \frac{-1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-7}\,dx = -\ln|x+2| + \ln|x-7| + c$

1,5

$= \ln\left|\dfrac{x-7}{x+2}\right| + c,\quad c \in \mathbb{R}.$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{9}{x^2-5x-14}\,dx = \left[\ln\left|\frac{x-7}{x+2}\right|\right]_0^1 = \boxed{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}$ 0,5

3) Posons $x = \sin t$, donc $dx = \cos t\,dt$, et on aura :

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{9\cos t}{-14-5\sin t+\sin^2 t}\,dt = \int_0^1 \frac{9\,dx}{-14-5x+x^2} = \boxed{\ln\left[\frac{4}{7}\right]}$ 1

4) Soit $x \in]7\ +\infty[$ et considérons l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{9}{x^2-5x-14}\,y = \frac{x-7}{x^2-5x-14} \quad \text{-----} \quad -1-$$

qui est une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

Soit l'équation sans second membre.

$$y' - \frac{9}{x^2-5x-14}\,y = 0 \quad \text{----} \quad -2-$$

$-2- \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9}{x^2-5x-14}\,y \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{9\,dx}{x^2-5x-14}$ $\quad y \neq 0$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln\left[\dfrac{x-7}{x+2}\right] + c,\quad c \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow y = K \cdot \dfrac{x-7}{x+2},\ K \in \mathbb{R}$ ($y=0$ est une solution triviale).

1,5

Variation de la constante k.

On a $y' = k'\frac{x-7}{x+2} + k\left(\frac{x+2-x+7}{(x+2)^2}\right)$

$= k'\frac{x-7}{x+2} + k\frac{9}{(x+2)^2}$

On remplace y' et y dans -1- et on trouve

$$k'\frac{x-7}{x+2} + \frac{9k}{(x+2)^2} - \frac{9}{x^2-5x-14}\, k\,\frac{x-7}{x+2} = \frac{x-7}{x^2-5x-14}$$

donc $k'\frac{x-7}{x+2} = \frac{x-7}{x^2-5x-14} \Rightarrow k' = \frac{1}{x-7}$

par conséquent $k = \ln[x-7] + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Finalement. $y = \left(\ln[x-7] + c\right)\frac{x-7}{x+2},\ c \in \mathbb{R}$.

1