MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Cours & Applications

Hichem Chaabane

Professeur de Physique à l'ISITCom - Hammam Sousse - Tunisie

Année 2010

Table des Matières

Chapitre I

CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

La mécanique étudie le mouvement des corps et la relation entre ce mouvement et des notions physiques telles que la force et la masse. Elle se divise en trois parties :

- la cinématique qui a pour objet l'étude de mouvement en fonction des concepts d'espace et de temps en faisant abstraction de ses causes.
- la dynamique qui étudie les relations entre les mouvements et les forces qui les produisent.
- la statique qui est l'étude des équilibres et des conditions aux quels doivent satisfaire les forces s'exerçant sur un corps pour qu'il reste au repos s'il l'est initialement. Dans notre cas nous ne parlerons que très peu de la statique, en la mentionnant comme cas particulier de la dynamique.

I - DÉFINITIONS FONDAMENTALES

I - 1 - point matériel

Un mouvement est le changement continu de la position d'un objet et peut s'accompagner de rotations ou de vibrations. Dans de nombreuses situations, on peut traiter l'objet comme s'il s'agissait d'une ***particule***. C'est à dire que l'état mécanique du système peut être suffisamment bien représenté par les coordonnées d'un point. C'est un élément matériel, cohésif, de petites dimensions par rapport aux autres dimensions mises en jeu. On lui associe un scalaire positif $\boldsymbol{m}$ appelé sa masse qui est la quantité de matière contenue dans le volume de l'objet.

I - 2 - événement

Les phénomènes physiques peuvent être considérés comme un ensemble d'événements, c'est à dire des phénomènes élémentaires qui se produisent en des endroits déterminés de l'espace et à un instant donné.

I - 3 - temps

En mécanique Newtonienne, le temps est une variable indépendante représentée généralement par la lettre $\boldsymbol{t}$ à l'exclusion de toute autre notation (sauf précisions particulières à un problème déterminé), qui repère l'instant où l'événement s'est produit. Cette variable temps s'écoule dans un sens et pas dans l'autre (dans un sens tel que la cause précède l'effet): tel événement a lieu après tel autre. Quand on sait classer la succession temporelle des événements on dit que l'on a établit une **chronologie**.
Nous supposons aussi que le temps est **uniforme**, ce qui revient à dire que les lois physiques sont invariantes par translation dans le temps.

I - 4 - repère d'espace

On appelle repère d'espace, un ensemble de points dont les distances sont invariables au cours du temps. On caractérise généralement un repère d'espace par un point $\boldsymbol{O}$, origine du repère, choisi conventionnellement et une base $(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3)$ dont on a intérêt à la choisir orthonormée.

I - 5 - notions de référentiel de temps absolu

Pour définir la position des différents points de l'espace géométrique, un observateur utilisera un repère d'espace (système de coordonnées qui lui est lié) et une horloge pour mesurer les temps. Ce repère **espace-temps** est appelé **référentiel**.

Nous supposons que le temps est une notion **absolue** indépendante du référentiel, c'est à dire deux observateurs liés à des référentiels différents attribuent les mêmes dates aux mêmes événements. Notons aussi que la masse d'un point matériel définie dans le paragraphe *I-1*, est invariable au cours du temps et par changement de référentiel.

I - 6 - mouvement

Il faut avant tout noter que la notion de mouvement est **relative**. Il n'est pas possible de parler avec précision d'un mouvement sans dire par rapport à quoi on l'observe, c'est à dire sans définir un référentiel. L'énoncé d'un mouvement devra obligatoirement être suivi de celui du référentiel correspondant.

On dit qu'un point matériel $\boldsymbol{M}$ est en mouvement si l'une au moins de ses coordonnées varie avec le temps. Si les coordonnées du point $\boldsymbol{M}$ sont constantes au cours du temps, le point $\boldsymbol{M}$ est dit **immobile** ou au **repos** (toujours par rapport à un référentiel $\boldsymbol{R}$ bien déterminé).

I - 7 - trajectoire

Considérons un point $\boldsymbol{M}$ en mouvement par rapport à un référentiel noté $\boldsymbol{R}$. La courbe décrite par ce point quand le temps s'écoule est appelée **trajectoire** du point $\boldsymbol{M}$ dans le référentiel considéré. C'est le lieu géométrique des positions effectivement occupées par le point matériel quand le temps s'écoule.

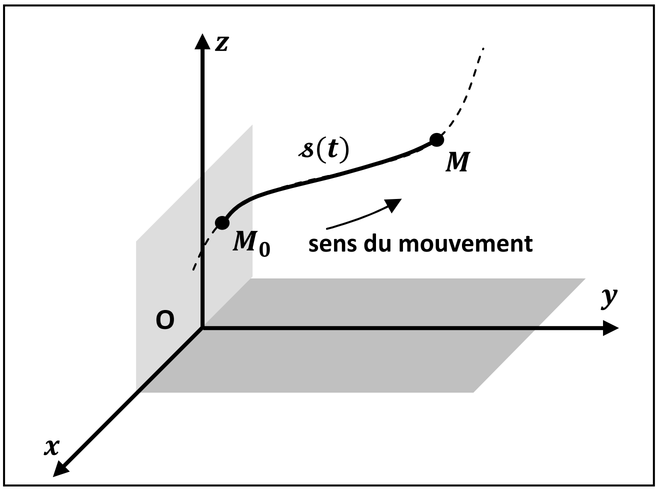
I - 8 - vecteur espace (vecteur position)

Soit $\boldsymbol{O}$ l'origine du repère espace et soit $\boldsymbol{M}$ la position, à l'instant $\boldsymbol{t}$, de la particule sur sa trajectoire. On appelle vecteur espace (ou aussi vecteur position) le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$, fonction vectorielle du temps $\boldsymbol{t}$. On écrit : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t})$

I - 9 - équation horaire du mouvement

Considérons une trajectoire $(\boldsymbol{C})$ décrite par un point matériel en mouvement dans un référentiel $\boldsymbol{R}$ de base orthonormée directe $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$.

Soit $\boldsymbol{M_0}$ la position de cette particule à l'instant $\boldsymbol{t_0}$ et soit $\boldsymbol{M}$ sa position sur $(\boldsymbol{C})$ à l'instant $\boldsymbol{t}$.



L'arc entre $\boldsymbol{M_0}$ et $\boldsymbol{M}$ est égale à $s(\boldsymbol{t})$
$s(\boldsymbol{t})$ est appelé **abscisse curviligne** de $\boldsymbol{M}$

Par définition, on appelle **équation horaire** du mouvement l'équation donnant l'abscisse curviligne en fonction du temps : $s = s(\boldsymbol{t})$

Dans un repère à trois dimensions (par exemple cartésien) on doit fournir trois équations du même type :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \quad ; \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$$

II - REPRÉSENTATION DES TRAJECTOIRES

II - 1 - différents systèmes de coordonnées

En physique, on doit souvent localiser des objets dans l'espace et on se sert pour cela des coordonnées. On peut situer un point sur une ligne à l'aide d'une seule coordonnée (***abscisse***), un point dans un plan à l'aide de deux coordonnées (***abscisse*** et ***ordonnée***) et un point dans l'espace à l'aide de trois coordonnées (***abscisse***, ***ordonnée*** et ***côte***).

Pour définir des positions dans l'espace, le système de coordonnées utilisé doit comprendre: un point de référence, appelé ***origine*** (souvent noté $\boldsymbol{O}$), un ***système d'axes orientés*** et des moyens de repérer la position d'un point de l'espace par rapport à l'origine et aux axes.

Soit donc, un système de trois axes rectangulaires, formé par les trois vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, et $\vec{\boldsymbol{k}}$ et d'origine $\boldsymbol{O}$ et soit $\boldsymbol{M}$ un point de l'espace, sa position est définie par le vecteur position $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$.

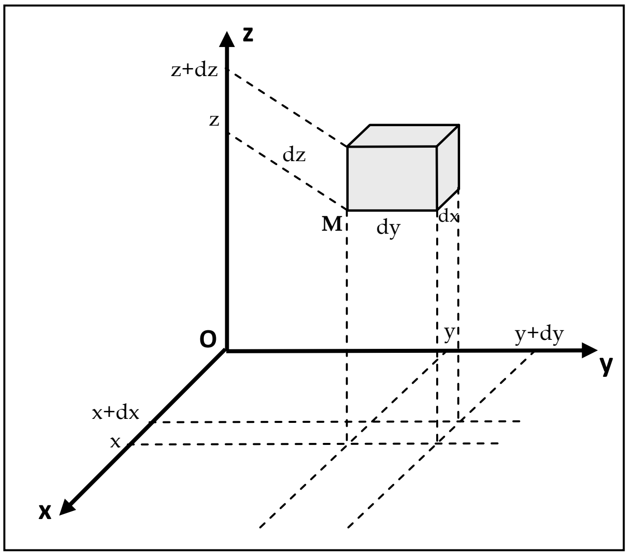
L'expression de ce vecteur peut prendre différentes formes selon le système de coordonnées utilisé.

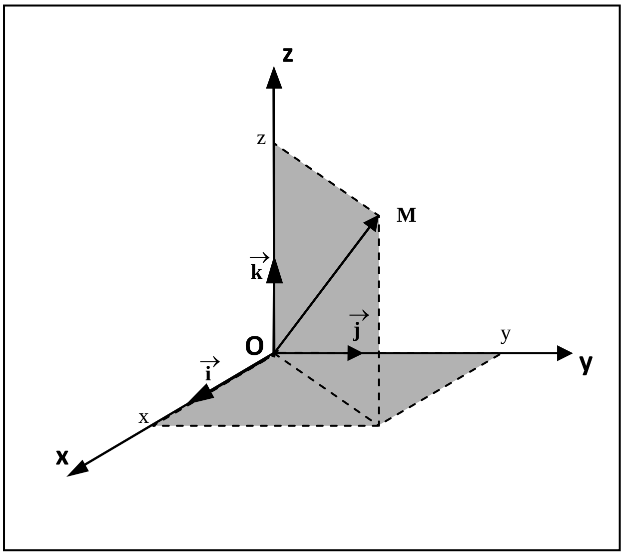
II - 1 - a - coordonnées cartésiennes

On appelle coordonnées cartésiennes du point $\boldsymbol{M}$, les trois valeurs algébriques $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, et $\boldsymbol{z}$ permettant de localiser ce point dans le repère d'espace (**O**, $\vec{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$).

Les composantes du vecteur position sont les **valeurs algébriques des projections** orthogonales de $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ sur les directions définies par les vecteurs de base. On écrit alors :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{z}\vec{\boldsymbol{k}} \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \text{ et } \boldsymbol{z} \in]-\boldsymbol{\infty}, +\boldsymbol{\infty}[$$





Si seule la coordonnée $\boldsymbol{x}$ varie de $\boldsymbol{dx}$, le point $\boldsymbol{M}$ se déplace de $\boldsymbol{dx}$ dans la direction $\boldsymbol{Ox}$ dans la direction du vecteur unitaire $\vec{\boldsymbol{\imath}}$; il en serait de même des deux autres coordonnées.

Ces déplacements élémentaires permettent de définir :

- un **vecteur déplacement élémentaire** : $\overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}} = \boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{dx}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{dy}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{dz}\vec{\boldsymbol{k}}$

- un **volume élémentaire** : $\boldsymbol{dv} = \boldsymbol{dxdydz}$

II - 1 - b - coordonnées cylindriques

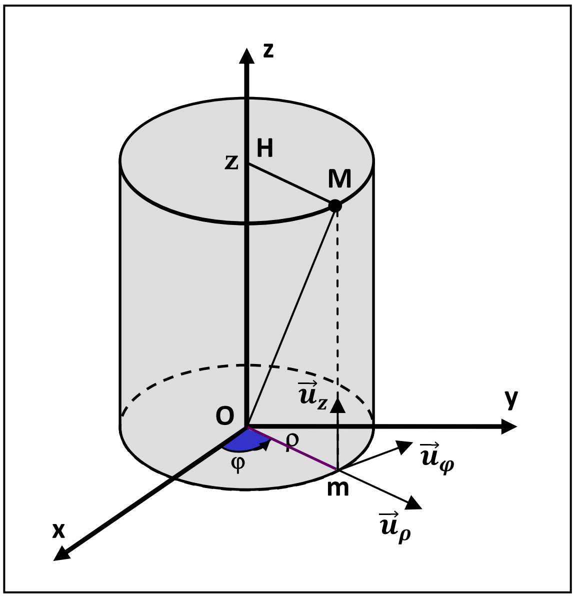
Il arrive, souvent, qu'un problème ait une symétrie cylindrique, il est plus commode alors d'utiliser le système de coordonnées cylindriques.

On appelle $\boldsymbol{coordonn}$é$\boldsymbol{es\ cylindriques}$ le triplet ($\boldsymbol{\rho}$,$\boldsymbol{\varphi}$,$\boldsymbol{z}$), permettant de localiser le point $\boldsymbol{M}$ tout aussi bien que le triplet ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{z}$).

Soit le point $\boldsymbol{m}$, projeté orthogonal de $\boldsymbol{M}$ sur le plan $\boldsymbol{xOy}$

Le paramètre $\boldsymbol{\rho}$ représente la distance $\overline{\boldsymbol{Om}}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ l'angle entre $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{Om}}$.

La coordonnée z correspond toujours à la projection orthogonale de M sur l'axe Oz, donc $z = \overline{OH}$ avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe Oz.



On recouvre l'espace une fois et une seule en astreignant les coordonnées à rester dans les intervalles :

$$\rho \in [0, +\infty[, \qquad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad z \in]-\infty, +\infty[$$

Le vecteur position peut alors s'écrire : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$

Si on définit les vecteurs unitaires :

$\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{Om}}{\|\overrightarrow{Om}\|}$ et $\vec{u}_z = \vec{k}$ alors on a :

$$\overrightarrow{Om} = \rho\vec{u}_\rho \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{mM} = z\vec{u}_z = z\vec{k}$$

Soit $\vec{u}_\varphi$ un vecteur unitaire appartenant au plan xOy et tel que $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ soit un trièdre direct, il vient que $\vec{u}_\varphi$ est perpendiculaire à $\vec{u}_\rho$ dans le sens des φ croissants.

Le repère défini par la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ et lié à M, est appelé **repère cylindrique**. Dans ce repère, le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$

- Les coordonnées cartésiennes et cylindriques sont reliées par les relations suivantes :

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z$$

ou

$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad z = z$$

- Les vecteurs de la base cylindrique s'écrivent :

$$\vec{u}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \qquad \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_z = \vec{k}$$

- À partir de ces expressions, nous pouvons déduire les expressions des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$ en fonction de $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\varphi$ et $\vec{u}_z$: $\vec{i} = \cos\varphi\,\vec{u}_\rho - \sin\varphi\,\vec{u}_\varphi$ $\quad \vec{j} = \sin\varphi\,\vec{u}_\rho + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$ $\quad$ et $\quad \vec{u}_z = \vec{k}$

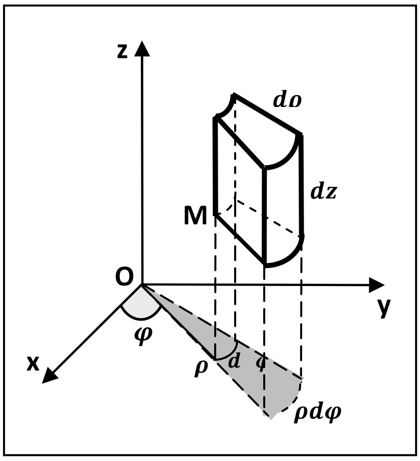
D'où le tableau de correspondance suivant :

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{u}_\rho$	$\cos\varphi$	$sin\varphi$	0
$\vec{u}_\varphi$	$-sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{k}$	0	0	1

- notons que : $\vec{u}_\varphi = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi}$ et $\vec{u}_\rho = -\frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi}$

Maintenant si la coordonnée radiale ou axiale (ρ ou z) varie de $d\rho$ ou de dz, le point M décrit un segment de droite de longueur $d\rho$ ou dz. Alors que si la coordonnée orthoradiale (φ) varie de $d\varphi$, le point M décrit un arc de cercle de longueur $\rho d\varphi$. Ces déplacements élémentaires permettent de définir :

- un **vecteur déplacement élémentaire** : $\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho d\varphi\,\vec{u}_\varphi + dz\,\vec{k}$
- un **volume élémentaire** : $dv = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$



<u>Cas particulier</u> : <u>les coordonnées polaires</u> :

si $\boldsymbol{M}$ se trouve dans le plan $\boldsymbol{xOy}$ (par exemple pour $\boldsymbol{z = 0}$), il suffit de connaître $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ pour définir $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$. Le couple $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ correspond aux **coordonnées polaires**.

Le vecteur position s'écrit dans ce cas $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{z}\vec{\boldsymbol{k}}$ avec $\boldsymbol{z = cte}$ $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{z = 0}\right)$

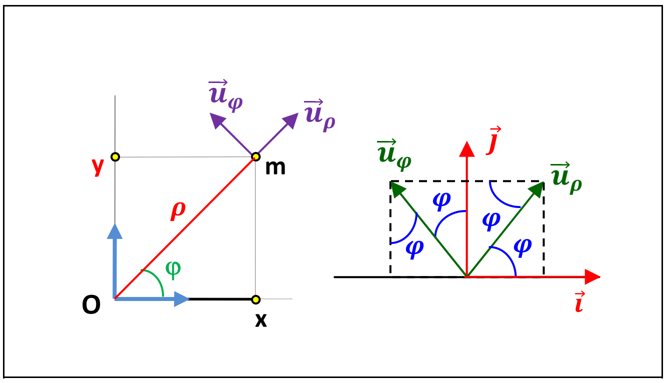
Ce paramétrage est très utile pour les mouvements dits plans où le paramétrage cartésien est moins adapté.
Le **vecteur déplacement élémentaire** s'exprime par : $\overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}} = \boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{d\rho}\,\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho d\varphi}\,\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varphi}}$

APPLICATIONS :

❶ Soit un vecteur $\vec{A}$ de composantes cartésiennes (A_x, A_y, A_z) et cylindriques (A_ρ, A_φ, A_z).
Exprimer A_ρ, A_φ, A_z en fonction de A_x, A_y, A_z.

<u>Solution</u> :

Les relations entre $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{k}$ et $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ sont résumées dans le tableau ci-dessous :



	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\vec{u}_\rho$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\vec{u}_\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{k}$	0	0	1

Dans la base cylindrique : $\vec{A} = A_\rho\vec{u}_\rho + A_\varphi\vec{u}_\phi + A_z\vec{k}$
Dans la base cartésienne : $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$
Il suffit de remplacer $\vec{\imath}$ par $(\cos\varphi\,\vec{u}_\rho - \sin\varphi\,\vec{u}_\phi)$ et $\vec{\jmath}$ par $(\sin\varphi\,\vec{u}_\rho + \cos\varphi\,\vec{u}_\phi)$
Il vient que :

$A_\rho = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi$ composante radiale
$A_\rho = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$ composante orthoradiale
$A_z = A_z$ composante axiale

❷ Calculer de la surface et du volume d'un cylindre de hauteur h d'axe Oz (le point O est à mi-hauteur) et de rayon R en utilisant la surface et le volume élémentaires en coordonnées cylindriques.

<u>*Solution :*</u>

on a $d\mathcal{V} = \rho d\rho d\varphi dz \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V} = \int_0^R r dr \times \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R \times [\varphi]_0^{2\pi} \times [z]_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} = \pi R^2 h$

considérons maintenant le cylindre de rayon $R = Cte \Rightarrow dS = R d\varphi dz$

$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = [\varphi]_0^{2\pi} \times [z]_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} = 2\pi R h$

❸ Quel est le repère le plus facile pour exprimer l'élément de surface dS d'un disque de centre O et de rayon R. Exprimer dans ce repère l'élément de surface dS et établir la formule donnant la surface d'un disque.

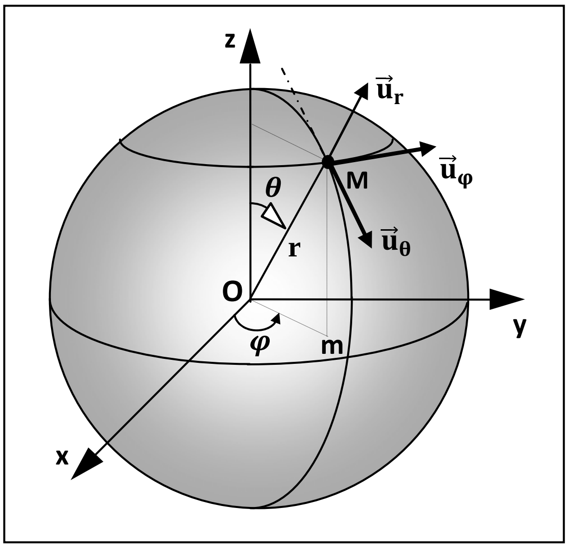
<u>Solution</u> :

Les coordonnées polaires sont les plus appropriées pour déterminer dS.
En coordonnées polaires, l'élément de surface dS s'écrit : $dS = \rho d\rho d\varphi \quad \Rightarrow S = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\varphi$
or ρ et φ sont des variables indépendantes, donc on peut séparer l'intégrale double en deux intégrales simples $\Rightarrow$

$$S = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2$$

<u>*II - 1 - c - coordonnées sphériques*</u>

Il arrive, souvent, qu'un problème ait une symétrie sphérique (tels que les mouvements par rapport à la terre). Il est alors, plus commode d'utiliser le système de coordonnées sphériques. Sur la figure ci dessous les coordonnées sphériques sont définies de la manière suivante :



- le rayon vecteur : $\mathbf{r} = \|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\|$
- l'angle $\boldsymbol{\theta} = \left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{Oz}}, \overrightarrow{\mathbf{OM}}}\right)$ appelé ***colatitude***
- l'angle $\boldsymbol{\varphi} = \left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{Ox}}, \overrightarrow{\mathbf{Om}}}\right)$ appelé ***azimut***

Le point $\boldsymbol{m}$ est le projeté orthogonal du point $\boldsymbol{M}$ sur le plan $(\boldsymbol{xOy})$.

On recouvre l'espace une fois et une seule en prenant :

$\boldsymbol{r} \in [\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty}[, \quad \boldsymbol{\theta} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ et $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$

Les coordonnées cartésiennes et sphériques sont reliées par les relations suivantes :

$\boldsymbol{x = r \sin\theta \cos\varphi} \qquad \boldsymbol{y = r \sin\theta \sin\varphi}$ et $\boldsymbol{z = r\cos\theta}$

ou

$\mathbf{r} = \sqrt{(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2)} \qquad \boldsymbol{\theta = arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$ et $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arctg}\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right)$

Considérons les vecteurs unitaires $\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\|}$ et $\vec{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\varphi}$ (déjà défini), on peut alors définir un troisième vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\theta}$ tel que $(\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r}, \vec{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\theta}, \vec{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\varphi})$ soit un trièdre direct. Il vient que $\vec{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\theta}$ est situé dans le plan $(\overrightarrow{\mathbf{Oz}}, \overrightarrow{\mathbf{OM}})$ et est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$ dans le sens des $\boldsymbol{\theta}$ croissants.

Le repère défini par la base ($\vec{u}_r$,$\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$) et lié à M, est appelé **repère sphérique**. Dans ce repère le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$

- Les vecteurs de la base sphériques s'expriment, en fonction des vecteurs de la base cartésienne, par :

$\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$; $\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$

et $\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$

D'où le tableau de correspondance suivant :

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{u}_r$	$\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$
$\vec{u}_\theta$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\theta$
$\vec{u}_\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0

- Notons qu'on a : $\vec{u}_\theta = \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}$ et $\vec{u}_r = -\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$

Sachant que $\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$ alors $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\varphi} = \sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

- Si les coordonnées de M varient de dr,$d\theta$, et $d\varphi$, on définit alors :

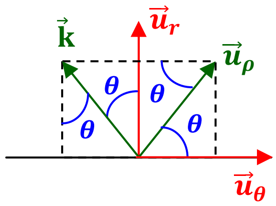
- un **vecteur déplacement élémentaire** : $\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + r d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$
- un **volume élémentaire** : $dv = r^2 dr\,\sin\theta\,d\theta d\varphi$

APPLICATIONS :

❶ Soit un vecteur $\vec{A}$ de composantes cartésiennes (A_x, A_y, A_z) et sphériques (A_r, A_θ, A_φ). Exprimer A_r, A_θ, A_φ en fonction de A_x, A_y, A_z.

Solution :

dans la base sphérique : $\vec{A} = A_r\vec{u}_r + A_\theta\vec{u}_\theta + A_\varphi\vec{u}_\phi$



dans la base cartésienne : $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{u}_z$

Considérons le plan défini par $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_z$ et passant par m (projeté de M sur le plan xOy).

La projection de $\vec{u}_\rho$ et $\vec{k}$ sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ donne :

$\vec{u}_\rho = \sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta$ *et* $\vec{u}_z = \vec{k} = \cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta$

D'autre part, on sait que : $\vec{i} = \cos\varphi\,\vec{u}_\rho - \sin\varphi\,\vec{u}_\varphi$ *et* $\vec{j} = \sin\varphi\,\vec{u}_\rho + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$

il suffit de remplacer $\vec{i}$ par ($\cos\varphi\,\vec{u}_\rho - \sin\varphi\,\vec{u}_\varphi$) et $\vec{j}$ par ($\sin\varphi\,\vec{u}_\rho + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$) et $\vec{k}$ par ($\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta$) puis $\vec{u}_\rho$ par ($\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta$), il vient :

$A_r = A_x\cos\varphi\sin\theta + A_y\sin\varphi\sin\theta + A_z\cos\theta$ *composante radiale*

$A_\theta = A_x\cos\varphi\cos\theta + A_y\sin\varphi\cos\theta - A_z\sin\theta$ *composante zénithale*

$A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$ *composante longitudinale*

❷ Calculer la surface et le volume d'une sphère de centre O et de rayon R en utilisant la surface et le volume élémentaires en coordonnées sphériques.

Solution :

on a $d\upsilon = r^2 dr\ \sin\theta\, d\theta d\varphi \Rightarrow \quad V = \int_0^R r^2 dr \times \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{1}{3}R^3\right]_0^R \times [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3$

si on considère maintenant que $r = Cte = R$, $dS = R^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$

$\Rightarrow S = R^2 \times \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 \times [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3$

❸ Quel est le repère le plus adapté pour calculer la surface latérale d'un cône de sommet O, de hauteur h et de demi-angle au sommet α?
Dans ce repère exprimer l'élément de surface dS du cône puis établir la formule donnant la surface latérale d'un cône.

Solution :

Les coordonnées les plus adaptées sont les coordonnées sphériques avec la variable $\theta = \alpha = cte$.
En coordonnées sphériques, avec $\theta = \alpha = cte$, *l'élément de surface dS s'écrit* : $dS = r \sin\alpha\, dr d\varphi$
La variable φ *varie de* 0 *à* π *et la variable* r *de* 0 *à* $\sqrt{R^2+h^2}$

$\Rightarrow \qquad S = \sin\alpha \int_0^{\sqrt{R^2+h^2}} r dr \times \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \frac{R^2+h^2}{2}\sin\alpha$

or $\quad \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \qquad \Rightarrow \qquad S = \pi R\sqrt{R^2+h^2}$

❹ Dans le repère $R(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, un point M est repéré par ses coordonnées sphériques r, θ et φ
1 - Exprimer :
a - le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$
b - les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ en fonction de θ, φ, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$
c - le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de r, θ, φ, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$
2 - a - Calculer les dérivées suivantes : $\left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}$; $\left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}$ et $\left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}$

vérifier que : $\left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} = \vec{u}_r$; $\left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} = r\,\vec{u}_\theta$ et $\left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} = r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

2 - b - Montrer que : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

Solution :

1 - a - dans le repère sphérique, le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

1 - b - $\vec{u}_r = \sin\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}$ *avec* $\vec{u}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$

$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_\rho - \sin\theta\,\vec{k}$ *et* $\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$

donc, $\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \quad \to\to\to \quad \vec{u}_r = \vec{u}_r(\theta,\varphi)$

$\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \quad \to\to\to \quad \vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(\theta,\varphi)$

$\vec{u}_\phi = -\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j} \quad \to\to\to \quad \vec{u}_\varphi = \vec{u}_\varphi(\varphi)$

1 - c - On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}$

2 - a - $\left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} = \vec{u}_r + r\left(\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} = \vec{u}_r$

$\left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} = r\left(\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} = r\left(\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}\right) = r\,\vec{u}_\theta$

$\left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} = r\left(\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} = r(-\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j}) = r\sin\theta(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) = r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

2 - b - on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(r,\theta,\varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}\frac{dr}{dt} + \left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}\frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}\frac{d\varphi}{dt}$

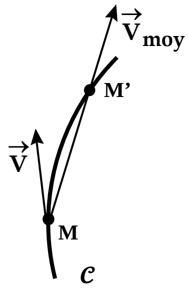
d'où, d'après la question précédente : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\phi$

III - Vitesse d'un Point Matériel

III - 1 - vitesse moyenne

Soit $\boldsymbol{M}$ la position, à l'instant $\boldsymbol{t}$ d'un point matériel mobile et soit $\boldsymbol{M'}$ sa position à l'instant $\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}$. La position de la particule varie dans le temps comme l'illustre la figure ci-dessous.

On appelle vitesse moyenne de $\boldsymbol{M}$ dans l'intervalle $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}]$, le vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{moy}}$ d'origine $\boldsymbol{M}$, de direction $\boldsymbol{MM'}$ de sens de $\boldsymbol{M}$ vers $\boldsymbol{M'}$ et dont le module est donné par :



$$\left\|\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{moy}}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}}\right\|}{|\Delta\boldsymbol{t}|}$$

Puisque $\Delta\boldsymbol{t}$ est positif, alors : $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{moy}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}}}{\Delta\boldsymbol{t}}$

D'après cette définition, on constate que la vitesse moyenne a la dimension d'une longueur divisée par un intervalle de temps, soit $\boldsymbol{L}.\boldsymbol{T}^{-1}\ (\boldsymbol{m}.\boldsymbol{s}^{-1})$

La vitesse moyenne est indépendante du trajet réellement effectué puisqu'elle est proportionnelle au déplacement dont la valeur dépend uniquement des positions de départ et d'arrivée de la particule. Par conséquent quelle que soit sa trajectoire, si une particule revient à son point de départ, sa vitesse moyenne est nulle puisque son déplacement est nul selon cette trajectoire.

III - 2 - vitesse instantanée

Si maintenant l'intervalle $\Delta\boldsymbol{t}$ tend vers **zéro**, le point $\boldsymbol{M}$ se rapproche du point $\boldsymbol{M'}$ et la pente de la droite $\boldsymbol{MM'}$ se rapproche de celle de la **tangente** à la courbe au point $\boldsymbol{M}$. Le vecteur vitesse moyenne tend alors vers ce que l'on appelle la vitesse instantanée du point $\boldsymbol{M}$.

On appelle donc vitesse instantanée de $\boldsymbol{M}$ à l'instant $\boldsymbol{t}$, le vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$ égal à la limite quand elle existe de $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{moy}}$ quand $\Delta\boldsymbol{t}$ tend vers zéro : $\vec{\boldsymbol{V}} = \mathbf{lim}_{\Delta t\to 0}\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{moy}}$

Soit $\boldsymbol{O}$ un point fixe quelconque, on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)$

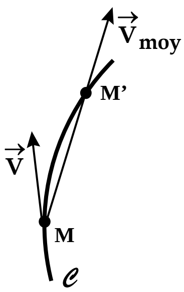
Donc $\mathbf{lim}_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \mathbf{lim}_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{dt}}$ d'après la définition de la dérivée.

C'est à dire $\vec{\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}}}{\boldsymbol{dt}}$

En calcul différentiel, la vitesse instantanée est la dérivée temporelle du vecteur position.

Cherchons maintenant le module du vecteur vitesse instantanée.

$\mathbf{lim}_{\Delta t\to 0}\left(\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{moy}}\right) = \mathbf{lim}_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\boldsymbol{MM'}}}{\Delta\boldsymbol{t}} \times \mathbf{lim}_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}}}{\overline{\boldsymbol{MM'}}}$



or d'après le §II-1-d, on a : $\frac{\overline{\boldsymbol{MM'}}}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \mathbf{lim}_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\boldsymbol{MM'}}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{V}$

En outre, $\frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}}\|}{\overline{\boldsymbol{MM'}}}$ tend vers $\mathbf{1}$, donc $\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}}}{\overline{\boldsymbol{MM'}}} \to \vec{\tau}$, avec $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ le vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire au point $\boldsymbol{M}$, orienté dans le **sens positif** sur la trajectoire (vecteur unitaire tangentiel).

La vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}$, du point matériel, à l'instant $\boldsymbol{t}$ est donc le vecteur : $\vec{\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}}\vec{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{V}\vec{\boldsymbol{\tau}}$ tangent à la trajectoire en $\boldsymbol{M}$.

$\boldsymbol{V}$ est appelée vitesse algébrique de $\boldsymbol{M}$ à l'instant $\boldsymbol{t}$. Son signe indique si $\boldsymbol{M}$ parcourt la trajectoire dans le sens positif ou négatif (sens préalablement choisi).

Le vecteur unitaire $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ est donné par l'expression $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\vec{\boldsymbol{V}}}{\|\vec{\boldsymbol{V}}\|}$

Notons que la vitesse instantanée a les dimensions $\mathbf{L}.\mathbf{T}^{-1}\ (\boldsymbol{m}.\boldsymbol{s}^{-1})$

Exprimons maintenant le vecteur vitesse dans les différents systèmes de coordonnées déjà étudiés dans le §II.

III - 3 - représentation de la vitesse dans les différents systèmes de coordonnées

III - 3 - a - composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes

Soit $\boldsymbol{R}$ le repère orthonormé d'origine $\boldsymbol{O}$ et de vecteurs de base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Soit $\boldsymbol{M}$, un point matériel mobile dans $\boldsymbol{R}$. Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$
Il vient :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

qui s'écrit aussi sous la forme $\vec{V} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$

où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ $\quad\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ $\quad$ et $\quad\dot{z} = \frac{dz}{dt}$

On note que $\vec{V}.\vec{\imath} = \dot{x}$, $\vec{V}.\vec{\jmath} = \dot{y}$ et $\vec{V}.\vec{k} = \dot{z}$

III - 3 - b - composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques

Considérons maintenant un système de coordonnées cylindriques. On a vu que dans ce système de coordonnées le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$, donc la vitesse du point $\boldsymbol{M}$, sera, en tenant compte de la règle de dérivation des fonctions vectorielles :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Or $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi = \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$

donc : $\vec{V} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$

en conclusion, en coordonnées cylindriques, $\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$

Dans le cas des **coordonnées polaires** ($z = cte \Rightarrow \dot{z} = 0$), la vitesse s'exprime par : $\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$

III - 3 - c - composantes de la vitesse en coordonnées sphériques

-1ère méthode :

On a vu dans §II-1-c que les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques s'écrivent : $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ et $z = r\cos\theta$

Dérivons ces dernières relations par rapport au temps ($r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$ et $\varphi = \varphi(t)$) :

$$\left|\begin{array}{l}\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\\ \dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\end{array}\right.$$

or d'après le §II--1-c, les relations entre les vecteurs de la base sphérique et ceux de la base cartésienne sont :

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{u}_r$	$\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$
$\vec{u}_\theta$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\theta$
$\vec{u}_\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0

Il vient : $\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

-2ème méthode :

Une autre méthode pour déterminer la vitesse en coordonnées sphériques consiste à utiliser la notion de différentielle d'une fonction à plusieurs variables (voir § II-1-c, application ❹) : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

Or le vecteur $\vec{u}_r$ dépend des deux variables θ et φ, il vient donc : $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \left(\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta}\right)_\varphi \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi}\right)_\theta \frac{d\varphi}{dt}$

et puisque $\left(\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta}\right)_\varphi = \vec{u}_\theta$ et $\left(\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi}\right)_\theta = \sin\theta\,\vec{u}_\varphi$, il vient :

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$

Remarque : ***Hodographe***

Le vecteur vitesse $\vec{V}$ d'un point matériel peut lui être associé un point P défini par : $\overrightarrow{OP} = \vec{V}(M)$.
Le point P appartient à un espace dit l'espace de vitesses (P n'est pas un point de l'espace des positions). La courbe définie, dans l'espace des vitesses, par le point **P** est appelée $\boldsymbol{hodographe}$.
Par exemple, l'hodographe d'un mouvement rectiligne uniforme se réduit à un point.

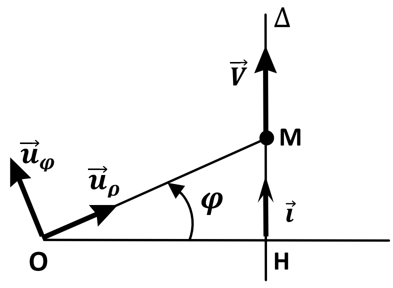
APPLICATION :

❶ Dans un référentiel $R(O,xyz)$, un point matériel M décrit une droite Δ, située à une distance D du point O, avec une vitesse constante de module V.

1- déterminer l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires

2- exprimer la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ en fonction de V, D et φ.

Solution :



1 - On a $\rho\cos\varphi = D$

2 - d'une part $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{D}{\cos\varphi}\vec{u}_\rho\right) = \frac{D\dot{\varphi}}{\cos\varphi}\left(tg\varphi\,\vec{u}_\rho + \vec{u}_\varphi\right)$

d'autre part $\vec{V} = V\sin\varphi\;\vec{u}_\rho + V\cos\varphi\;\vec{u}_\varphi$

d'où $V\sin\varphi = \frac{D\dot{\varphi}}{\cos\varphi}tg\varphi$ *et* $V\cos\varphi = \frac{D\dot{\varphi}}{\cos\varphi}$

expressions qui conduisent toutes deux à : $\dot{\varphi} = \frac{V}{D}\cos^2\varphi$

IV - ACCÉLÉRATION D'UN POINT MATÉRIEL

IV - 1 - définition

On appelle $\boldsymbol{accélération}\;\vec{a}$ du point mobile M à l'instant t la dérivée temporelle du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

L'accélération a les dimensions $L.T^{-2}$ ($m.s^{-2}$)

Remarque :

On ramène la notion d'accélération à celle de vitesse en considérant l'hodographe décrit par le point P défini par : $\overrightarrow{OP} = \vec{V}(M)$

La vitesse du point P est égale à $\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}$

IV - 2 - représentation de l'accélération dans les différents systèmes de coordonnées

IV - 2 - a - composantes de l'accélération en coordonnées cartésiennes

En dérivant, par rapport au temps, l'expression de la vitesse obtenue au §III-3-a, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

qui s'écrit aussi sous la forme : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$

Notons que : $\vec{a}.\vec{\imath} = \ddot{x}$, $\vec{a}.\vec{\jmath} = \ddot{y}$ et $\vec{a}.\vec{k} = \ddot{z}$

IV - 2 - b - composantes de l'accélération en coordonnées cylindriques

En dérivant par rapport au temps l'expression de la vitesse obtenue au §III-3-b, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \left(\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\vec{u}_\varphi + \rho\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

or $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$ et $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\rho$

ce qui donne : $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{u}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{k}$

En coordonnées polaires ($\dot{z} = \ddot{z} = 0$), l'accélération s'exprime par : $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{u}_\varphi$

IV - 2 - c - composantes de l'accélération en coordonnées sphériques

Dérivons l'expression de la vitesse trouvée dans le §III-3-c, il vient :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\right)$$

et utilisons les dérivées temporelles des vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, et $\vec{u}_\varphi$ données dans les §III-c et §IV-2-b, on obtient :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{u}_\varphi$$

V - EXEMPLES DE MOUVEMENT

V - 1 - mouvement rectiligne uniforme

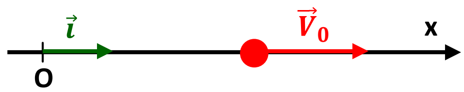
Un mouvement est dit rectiligne si le déplacement du mobile M a lieu sur une droite fixe dans le référentiel d'étude.

Considérons un point matériel M, animé, dans un référentiel $R(O, xyz)$, d'un mouvement rectiligne, suivant $x'Ox$ par exemple, de vitesse constante V_0 (V_0 est la valeur algébrique de la vitesse)

Le vecteur position s'écrit, dans le cas de cet exemple, $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$ où $\vec{\imath}$ est le vecteur unitaire porté par $x'Ox$

La vitesse s'exprime par $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} = V_0\vec{\imath}$

L'accélération est $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$ puisque la vitesse est constante.



L'équation horaire s'écrit : $\boldsymbol{V_0 = \frac{dx}{dt} = constante} \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{x(t) = V_0 t + x_0}$
$\boldsymbol{x_0}$ et $\boldsymbol{V_0}$ sont la position et la vitesse à l'instant initial $\boldsymbol{t = 0}$

V - 2 - mouvement rectiligne uniformément varié

Considérons un point matériel $\boldsymbol{M}$, animé , dans un référentiel $\boldsymbol{R(O, xyz)}$, suivant l'axe $\boldsymbol{x'Ox}$ par exemple, d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération constante $\vec{\mathbf{a}}$

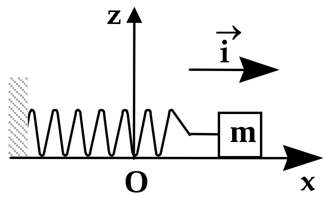
Notons $\boldsymbol{V_0}$ et $\boldsymbol{x_0}$ la vitesse et la position du mobile $\boldsymbol{M}$ à l'instant initial $\boldsymbol{t = 0}$
On a $\boldsymbol{\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = a\vec{\imath} = \frac{dV}{dt}\vec{\imath} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath}}$ où $\boldsymbol{a}$ est la valeur algébrique de l'accélération et $\boldsymbol{\vec{\imath}}$ le vecteur unitaire porté par $\boldsymbol{x'Ox}$.
Par intégration $\mathbf{\frac{dV}{dt} = a} \Rightarrow \mathbf{V = at + V_0}$, et la vitesse s'écrit $\boldsymbol{\vec{V} = (at + V_0)\vec{\imath}}$

Une deuxième intégration nous donne l'équation horaire du mouvement :

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0\right)\vec{\imath}}$$

Si $\boldsymbol{a} > 0$ le mouvement est dit **accéléré** et si $\boldsymbol{a} < 0$, le mouvement est dit **décéléré** (**retardé**).

V - 3 - mouvement rectiligne sinusoïdal



Considérons, dans un référentiel $\boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{(O, x, y, z)}$, un point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$ attaché à un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur $\boldsymbol{k}$. Le système est disposé horizontalement sur un banc. Le point matériel étant en position d'équilibre stable (en repos), on l'écarte d'une petite distance **d** de sa position d'équilibre dans la direction $\boldsymbol{Ox}$ puis on l'abandonne à lui-même. Le point matériel effectue des oscillations de part et d'autre de sa position d'équilibre et l'enregistrement graphique de ces oscillations montre que celles-ci sont caractérisées par l'élongation $\boldsymbol{x(t)}$ variant au cours du temps, autour de sa valeur $\boldsymbol{x_e = 0}$ à l'équilibre, d'une façon sinusoïdale et le mouvement est dit **rectiligne sinusoïdal**.

Ce mouvement est défini par l'équation horaire $\boldsymbol{x(t) = x_m Cos(\omega_o t + \varphi)}$
$\boldsymbol{x_m}$ est **l'amplitude**, $\boldsymbol{\omega_o}$ la **pulsation** et $\boldsymbol{\varphi}$ la **phase**.
Le mouvement du point $\boldsymbol{M}$ est périodique de période$\mathbf{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$ de **fréquence** $\mathbf{f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}}$, de vitesse :

$$\mathbf{\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = -x_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\,\vec{i} = -x_m\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i}}$$

et d'accélération :

$$\mathbf{\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -x_m\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)\,\vec{i} = -\omega_0^2\,\overrightarrow{OM}}$$

On remarque que $\vec{\mathbf{a}}$ est constamment dirigée vers le point fixe $\boldsymbol{O}$. On parle dans ce cas **d'accélération centrale** (ce type de mouvement sera étudié au §V-6).

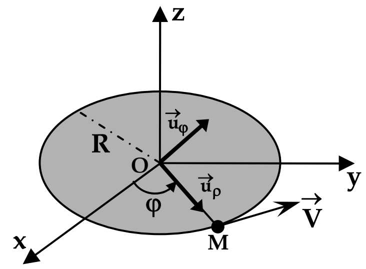
Remarque :

D'une manière générale, on peut définir un mouvement rectiligne sinusoïdal (suivant $\boldsymbol{Ox}$ par exemple) par l'équation horaire $\boldsymbol{x(t) = x_m Cos(\omega t + \varphi)}$ ou $\boldsymbol{x(t) = ACos(\omega t) + BSin(\omega t)}$. La détermination des constantes $\boldsymbol{x_m}$ et $\boldsymbol{\varphi}$(ou $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$) en utilisant les conditions initiales permet d'obtenir la loi du mouvement.

V - 4 - mouvement circulaire

Une particule est animée, dans un référentiel $\boldsymbol{R(O, xyz)}$ d'un mouvement circulaire si, à tout instant, elle est située en un point appartenant à un cercle de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon $\boldsymbol{R}$. Considérons donc un point matériel $\boldsymbol{M}$ qui se déplace sur un cercle d'axe, par exemple, $\boldsymbol{Oz}$ et de rayon $\boldsymbol{R}$ (voir figure). Pour étudier ce mouvement il est plus commode d'utiliser les coordonnées polaires.

On a donc : $\boldsymbol{\rho} = \|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\| = \mathbf{R} = \mathbf{Cte}$ et $\boldsymbol{\varphi} = \left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{Ox}}, \overrightarrow{\mathbf{OM}}}\right)$



D'après les relations trouvées dans le §III-3, on a :

$$\vec{\mathbf{V}} = \dot{\boldsymbol{\rho}}\, \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}\dot{\boldsymbol{\varphi}}\, \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{R}\, \dot{\boldsymbol{\varphi}}\, \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (\rho = \boldsymbol{R} = \boldsymbol{Cte})$$

Donc seule la composante orthoradiale de la vitesse qui n'est pas nulle (la composante radiale étant nulle).

Nous écrivons généralement cette expression sous la forme $\vec{\mathbf{V}} = \mathbf{R}\, \boldsymbol{\omega}\, \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ avec $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{dt}}$ qui représente la **vitesse angulaire**. On note $\|\vec{\mathbf{V}}\| = \mathbf{R}\, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{V}$ (ici $\omega > 0$)

Pour obtenir l'accélération dérivons, par rapport à **t**, l'expression de la vitesse :

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{V}}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{R}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{dt}}\, \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\varphi}}}{\mathbf{dt}}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{R}\frac{\mathbf{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{dt}^2}\, \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{R}\left(\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{dt}}\right)^2 \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\rho}} = -\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}^2\vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{R}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{dt}}\, \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

Ainsi, pour un mouvement circulaire, apparaissent les composantes normale et tangentielle de l'accélération :

$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{T}} + \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{N}}$ $\qquad$ $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{T}} = \mathbf{R}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{dt}}\, \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ $\qquad$ $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{N}} = -\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}^2\vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\rho}}$

Notons que $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{dt}} > 0$ si le sens positive est celui du mouvement et $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{dt}} < 0$ dans le cas contraire.

Remarques :

① Si le mouvement est circulaire uniforme, alors $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \boldsymbol{Cte}$, donc $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{0}} + \boldsymbol{\omega t}$

$$\vec{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\omega}\, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varphi}} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{\boldsymbol{V}}\| = \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{V} = \boldsymbol{Cte}, \quad \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{et} \quad \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{N}} = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

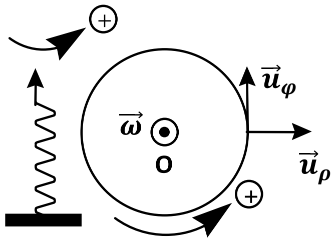
donc l'accélération est normale à la trajectoire (la composante tangentielle étant nulle). On parle dans ce cas, **d'accélération centripète**.

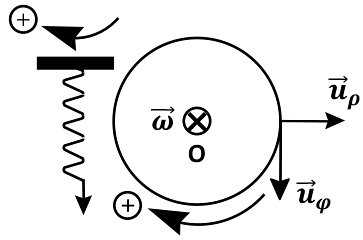
On peut facilement vérifier que le mouvement est uniforme si $\vec{\boldsymbol{a}}.\vec{\boldsymbol{V}} = \mathbf{0}$.

② la projection d'un mouvement circulaire uniforme sur un diamètre de cercle constituant la trajectoire peut être considérée comme un mouvement rectiligne sinusoïdal.

③ *vecteur rotation instantané*

Examinons de nouveau le mouvement circulaire. On rappelle que l'expression de la vitesse pour ce mouvement est $\vec{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\omega}\, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varphi}}$
Soit $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ un vecteur porté par la direction de l'axe de rotation, de module $\boldsymbol{\omega} = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$ et de sens donné par la règle du tire-bouchons en le faisant tourner dans le sens du mouvement, donc dans notre exemple (axe de rotation $\boldsymbol{Oz}$) $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}\vec{\boldsymbol{k}}$ (voir figure). Le vecteur $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ est appelé le ***vecteur rotation instantané***.

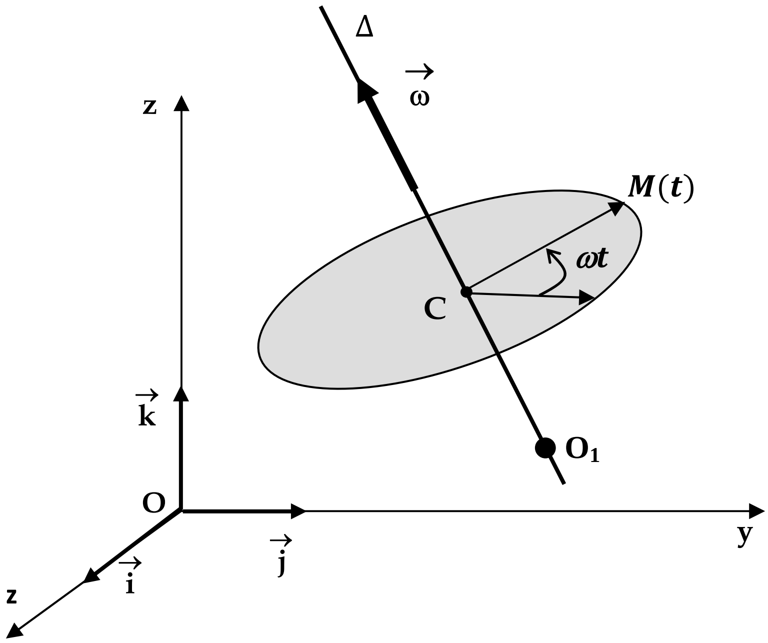




Calculons maintenant le produit vectoriel $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$, en tenant compte que $\overrightarrow{OM}$ s'écrit en coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}_\rho = R\,\vec{u}_\rho$

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \left(\omega\vec{k} \wedge R\vec{u}_\rho\right) = R\omega\left(\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho\right) = R\omega\vec{u}_\varphi = \vec{V}$$

On a donc $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$



Pour obtenir l'accélération du point matériel M, dérivons l'expression précédente par rapport au temps t :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{V} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{a} = \omega\vec{k} \wedge R\omega\vec{u}_\varphi + \frac{d\omega}{dt}\vec{k} \wedge R\vec{u}_\rho = R\omega^2\left(\vec{k} \wedge \vec{u}_\varphi\right) + R\frac{d\omega}{dt}\left(\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_\rho + R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\varphi$$

Il importe de remarquer que si un M est animé dans un référentiel $R(O,xyz)$ d'un mouvement circulaire, dont la trajectoire est un cercle bien défini, de centre C, d'axe Δ, la position de M sur le cercle étant définie par le vecteur position $\overrightarrow{CM}$, on peut écrire : $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$ avec $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantané porté par Δ et de mesure algébrique sur cet axe $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ vitesse angulaire du point M et O_1 est un point quelconque de cet axe.

④ D'après la remarque ③ on a : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

D'une manière générale, la dérivée par rapport au temps d'un vecteur tournant $\vec{A}$, est simplement le produit vectoriel du vecteur rotation instantané par le vecteur $\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

ce qui donne un vecteur perpendiculaire à $\vec{A}$ et de norme égale à $|\omega|\|\vec{A}\|$

APPLICATION :

On considère, dans le référentiel $R(O,xyz)$, un point matériel M mobile sur un cercle du plan xOy dans le rayon est R et le centre est $C(a,b)$.Ce point est repéré par l'angle $\theta(t)$ entre Cx et CM. On supposera que $\dot{\theta} \geq 0$.

1 - Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération du point M.

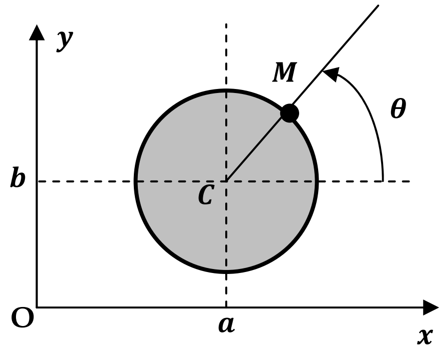
2 - On donne $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k}$. Que représente ce vecteur? Calculer $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ et $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CM}$.

3 - On définit le vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M par $\vec{e}_t$ tel que $\vec{e}_t = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ et l'abscisse curviligne s par $\frac{ds}{dt} = \|\vec{V}\|$
a - donner l'expression de s en fonction de θ et de R, sachant que pour $\theta = 0$, $s = 0$.
b - déterminer le vecteur unitaire $\vec{e}_t$ tangent à la trajectoire en M.
c - déterminer le vecteur unitaire $\vec{e}_n$ normal à la trajectoire en M.

Solution :

1 – Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + R\cos\theta \\ b + R\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$

Vitesse : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{vmatrix} -R\dot{\theta}\sin\theta \\ R\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$



Accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{vmatrix} -R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta \\ R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$

2 - le vecteur rotation instantané est $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a + R\cos\theta \\ b + R\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\dot{\theta}\sin\theta - b\dot{\theta} \\ R\dot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \neq \vec{V}$$

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CM} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\dot{\theta}\sin\theta \\ R\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{V}$$

3 - Abscisse curviligne : $\frac{ds}{dt} = \|\vec{V}\| = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} = R\dot{\theta} = R\frac{d\theta}{dt}$

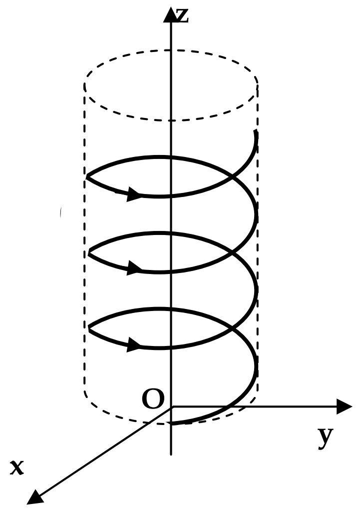
$\Rightarrow s = R\theta + constante$, *or pour* $\theta = 0$, $s = 0 \Rightarrow s = R\theta$

4 - On a $\vec{e}_t = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ *or* $\|\vec{V}\| = R\dot{\theta}$ $\Rightarrow$ $\vec{e}_t = \begin{vmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$

5 - La dérivée par rapport au temps du vecteur unitaire $\vec{e}_t$ (vecteur tournant) donne un vecteur de norme égale $|\omega| \left\|\vec{e}_t\right\| = |\omega| = \dot{\theta}$ et perpendiculaire à $\vec{e}_t$ (voir remarque ⑤); donc normal au cercle (trajectoire) puisque $\vec{e}_t$ est tangent au cercle

$\Rightarrow$ $\vec{e}_n = \frac{\frac{d\vec{e}_t}{dt}}{\dot{\theta}}$ *or* $\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \begin{vmatrix} -\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{e}_n = \begin{vmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$

V - 5 - mouvement hélicoïdal



Le mouvement d'un mobile $\boldsymbol{M}$ est dit $\boldsymbol{h\acute{e}lico\ddot{\imath}dal}$, si le point matériel se déplace sur une hélice circulaire, enroulée sur un cylindre de rayon $\boldsymbol{R}$. Les équations du mouvement dans le système de coordonnées cylindriques sont :

$\boldsymbol{\rho = R}$ rayon du cylindre

$\boldsymbol{\varphi = \varphi(t)}$ avec $\boldsymbol{\varphi(t)}$ une fonction arbitraire du temps

$\boldsymbol{z(t) = h\varphi(t)}$ $\boldsymbol{h}$ est le $\boldsymbol{pas\ r\acute{e}duit}$ de l'hélice

Quand le point $\boldsymbol{M}$ fait un tour, sa côte $\boldsymbol{z}$ varie de $\boldsymbol{2\pi h}$ qui est appelé le $\boldsymbol{pas\ de\ l'h\acute{e}lice}$.

Dans le système de coordonnées cylindriques, la vitesse s'exprime par :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\,\vec{u}_\rho + z\vec{k}\right) = R\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$\vec{V} = R\omega\vec{u}_\varphi + h\omega\vec{k}$ avec $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ (dans le cas d'un mouvement uniforme $\omega = constante$). D'où : $\|\vec{V}\| = |\omega|\sqrt{R^2 + h^2}$

Pour calculer les composantes de l'accélération, en coordonnées cylindriques, appliquons la relation trouvée dans le §IV-2-b avec $\boldsymbol{\rho = R = cte}$ et $\boldsymbol{z = h\varphi t}$) :

$$\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_\rho + R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\varphi + h\frac{d\omega}{dt}\vec{k}$$

APPLICATION :

Considérons, dans un référentiel R, un point matériel M, animé d'un mouvement hélicoïdal quelconque. Calculer l'angle α que fait le vecteur vitesse avec l'axe Oz.

<u>Solution</u> :

Faisons le produit scalaire $\vec{V}.\vec{k}$:

d'une part $\vec{V}.\vec{k} = \left(R\omega\vec{u}_\varphi + h\omega\vec{k}\right).\vec{k} = h\omega$ *(1)*

d'autre part, $\vec{V}.\vec{k} = \|\vec{V}\|\cos\alpha$ *(2)*

(1) et (2) impliquent que $\cos\alpha = \frac{h\omega}{\|\vec{V}\|} = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$

V - 6 - mouvement à accélération centrale

Si l'accélération du point $\boldsymbol{M}$ passe, à chaque instant, par un point fixe $\boldsymbol{O}$, on dit que le mouvement est à accélération centrale.

Donc, pour un mouvement à accélération centrale, $\overrightarrow{OM}$ *et* $\vec{a}$ sont colinéaires et par suite on a $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0}$

<u>V - 6 - a - propriétés</u>

Considérons le vecteur $\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$

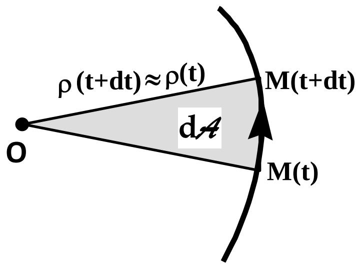
Calculons maintenant la dérivée de ce vecteur.

$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{V} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0}$ puisque $\vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires.

Donc le vecteur $\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$ est une constante du mouvement. Il est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$, donc $\overrightarrow{OM}$ reste au cours du mouvement perpendiculaire à une direction fixe, donc il se trouve

dans un plan. La trajectoire d'un mouvement à accélération centrale est donc une trajectoire plane. Il est donc conseillé de passer aux coordonnées polaires pour étudier ce mouvement.
Exprimons, maintenant $\vec{C}$ en utilisant les coordonnées polaires :

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = \rho\vec{u}_\rho \wedge (\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi) = \rho^2\dot{\varphi}(\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\varphi) = \rho^2\dot{\varphi}\,\vec{k} = C\,\vec{k}$$



avec $C = \|\overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \vec{\mathbf{V}}\| = \rho^2\dot{\varphi} = \rho^2\frac{d\varphi}{dt} = 2\frac{d\mathcal{A}}{dt}$

où $d\mathcal{A}$ est l'aire élémentaire balayée par le rayon vecteur (voir figure)

Donc $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}Cdt$ où C est appelée ***constante des aires***.

$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}C$ est appelée ***vitesse aréolaire***.

Les résultats précédents montrent que $\overrightarrow{OM}$ balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux ($d\mathcal{A} = \frac{1}{2}Cdt$ *avec* C *une constante*). On dit que le mouvement s'effectue suivant la ***loi des aires***.

V - 6 - b - les Formules de Binet

α - première formule de Binet ou formule de Binet relative à la vitesse :

Calculons le module au carré de la vitesse $\vec{V}$ dans le système de coordonnées polaires :

$$\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi \quad \Rightarrow \quad V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$$

or $\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{\rho^2}$
si on pose $u = \frac{1}{\rho}$, il vient :

$$V^2 = C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right)$$ c'est **la première formule de Binet**

β - deuxième formule de Binet ou formule de Binet relative à l'accélération :

Cherchons maintenant l'expression de l'accélération :
en coordonnées polaires $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{u}_\varphi$
Or pour un mouvement à accélération centrale, on a montré que $\vec{a}$ passe par $\overrightarrow{M}$ et donc la composante orthoradiale est nulle. On a donc :

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{u}_\rho$ en plus, $\ddot{\rho} = \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{C}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{C^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$\rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{\rho^3}$ ce qui donne pour l'expression de l'accélération, en posant toujours $u = \frac{1}{\rho}$

$$\vec{a} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)\vec{u}_\rho$$ c'est **la deuxième formule de Binet**

Si l'expression de l'accélération est connue, les formules de Binet permettent, par intégration de l'équation différentielle, de déterminer l'équation polaire ρ(φ) sans avoir à passer par les expressions de ρ(t) et φ(t)

APPLICATIONS :

❶ Une particule M de masse m, subie, dans un référentiel R, une accélération centrale qui dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ s'exprime par $\vec{a} = a(r)\vec{u}_r$. Déterminer la loi d'accélération $a(r)$ pour que la trajectoire de la particule soit une spirale logarithmique d'équation $r = ke^{\theta}$ avec k une constante non nulle. On précisera la constante à partir des conditions initiales r_0 et θ_0.

Solution :

$\vec{a} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\vec{u}_\rho$ *avec* $u = \frac{1}{a}e^{-\theta}$

d'où $a = -C^2u^2(u+u)$ $\Rightarrow$ $a(r) = -2\frac{C^2}{r^3}$

Donc l'accélération est de la forme $a(r) = -\frac{k}{r^3}$. *La valeur de* C *est déterminée par les conditions initiales, donc* $C = r_0^2\dot{\theta}_0$ $\Rightarrow$ $k = r_0^4\dot{\theta}_0^2$

❷ Dans le plan (xOy) un point matériel M, en mouvement, est repéré par ses coordonnées polaires $r(t)$ et $\theta(t)$.

1 - Donner, dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, l'expression de sa vitesse $\vec{V}$ et de son accélération $\vec{a}$

2 - Sachant que, la vitesse aréolaire $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ ($d\mathcal{A}$ est l'aire balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant un intervalle de temps dt) reste constante et égale à $\frac{C}{2}$; avec $C = r^2\dot{\theta}$

a- Déduire que l'accélération $\vec{a}$ est portée par le vecteur unitaire radial $\vec{u}_r$

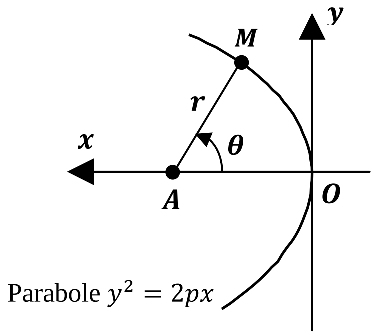
b- montrer que : $V^2 = C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right)$ et $\vec{a} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)\vec{u}_\rho$ avec $u = \frac{1}{r}$

3 - Une étude expérimentale du mouvement du point M, a montré que la trajectoire en coordonnées cartésiennes est une parabole d'équation : $y^2 = 2px$
avec $p = constante = 2OA$ (voir figure).

a - Exprimer x et y en fonction des coordonnées polaires r et θ.
En déduire que l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires s'écrit: $r = \frac{p}{1+\cos\theta}$ avec $r(\theta = 0) = \frac{p}{2}$

b - Montrer que l'accélération $\vec{a}$ est une accélération newtonienne, c'est à dire qu'elle est proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$

c- Donner l'expression de V^2



Solution :

1- Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ $\Rightarrow$ $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

or $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ $\Rightarrow$ $\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{}_\theta$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

car $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ *et* $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r$

2 - a - On a $C = r^2\dot{\theta} = cte$ $\Rightarrow$ *quel que soit l'instant t,* $\frac{dC}{dt} = 0 = \left(2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\theta\right)$

or pour tout t, $r \neq 0$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r$

2 - b - La vitesse est $\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ $\Rightarrow$ $V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$r^2\dot{\theta}^2 = r^2\frac{C^2}{r^4} = \frac{C^2}{r^2} = C^2u^2$ *avec* $u = \frac{1}{r}$

$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{d(1/r^2)}{d\theta} = -C\frac{du}{d\theta}$ $\Rightarrow$ $V^2 = C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right)$

L'accélération s'exprime par : $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r$

$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$ *en posant toujours* $u = \frac{1}{r}$

$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{r^3} = C^2u^3$ *ce qui donne pour l'expression :* $\vec{a} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\vec{u}_r$

3 - a - Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} -r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} \frac{p}{2} - r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{matrix}\right.$

or la trajectoire en coordonnées cartésiennes est une parabole d'équation $y^2 = 2px \Rightarrow$
$r^2\sin^2\theta = 2p\left(\frac{p}{2} - r\cos\theta\right) \quad \Rightarrow \quad r^2 = (p - r\cos\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \pm(p - r\cos\theta)$
la condition, pour $\theta = 0$, $r = \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad r = p - r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r = \frac{p}{1+\cos\theta}$

3 - b - On a $\vec{a} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\vec{u}_r$ *avec* $u = \frac{1}{r} = \frac{1+\cos\theta}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{\sin\theta}{p}$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\cos\theta}{p} \quad \Rightarrow \quad u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\cos\theta}{p} + \frac{1+\cos\theta}{p} = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{C^2}{p}u^2\vec{u}_r = -\frac{C^2}{pr^2}\vec{u}_r$

3 - c - pour le carré du module de la vitesse : $V^2 = C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right) = \frac{2C^2}{p^2}(1 + \cos\theta) = \frac{2C^2}{pr}$

Chapitre II

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL DANS UN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN

Nous avons déjà signalé que l'objet de la mécanique était d'établir un lien mathématique entre les circonstances d'un mouvement et les causes qui influent sur lui, et d'exploiter ce lien dans un but de prévision, qui est celui de toute science.

La cinématique a représenté sous une forme mathématique variable les éléments caractéristiques d'un mouvement (position, vitesse, accélération, hodographe). Il reste maintenant à représenter également sous une forme mathématique accessible, les causes qui influent sur les mouvements (les forces), à lier ces éléments les uns aux autres et aborder le domaine de la prévision à l'aide d'équations.

Notons que les lois physiques sur lesquelles s'appuie la dynamique, et qui seront présentées sous forme de principes, ont été énoncées par Issac Newton.

I - GÉNÉRALITÉS

I - 1 - la masse

Prénoms par exemple, deux grandes boules pleines, de mêmes dimensions, dont l'une est faite du liège et l'autre d'acier. Si l'on devait déplacer ces boules sur une surface horizontale, il faudrait fournir beaucoup plus d'effort pour faire rouler la boule d'acier. De même, une fois les boules en mouvement il serait beaucoup plus difficile d'immobiliser la boule d'acier. La vitesse d'un corps ne suffit donc pas à décrire son mouvement dans tous ses aspects (causes et conséquences). Il faut donc, en plus des grandeurs cinématiques, introduire une quantité caractérisant la répugnance du corps à toute modification de son mouvement qui est **l'inertie**. Nous disons donc que l'inertie de la boule d'acier est plus grande que celle de la boule de liège.
La masse est un scalaire positif noté $\boldsymbol{m}$, qui sert à quantifier cette **inertie**, c'est à dire que la masse d'un corps mesure la difficulté qu'un corps rencontre à changer sa vitesse.

C'est la quantité de matière contenue dans le volume du corps.

Nous postulons que la masse se conserve au cours du temps et qu'elle est invariable par changement de référentiel. L'expérience montre que la masse est une quantité scalaire positive qui obéit aux règles de l'arithmétique conventionnelle. Enfin, dans le système international, l'unité de la masse est le **kilogramme** ($\boldsymbol{kg}$).

I - 2 - notion de force

On appelle force toute cause capable de modifier le mouvement d'un corps, ou de créer un mouvement si le corps est initialement au repos, ou encore de créer une déformation.

La force a un caractère vectoriel. L'expérience quotidienne nous montre bien ce caractère. Par exemple, lâchons un corps sans vitesse initiale, il tombe suivant la verticale descendante qui définit la direction et le sens de la force (poids) auquel est soumis le corps abandonné. L'expérience (étude de la statique) montre aussi que les forces sont additives; c'est à dire la force résultat de plusieurs actions mécaniques (qu'on appelle la $\boldsymbol{r}$é$\boldsymbol{sultante}$ des forces) est égale à la somme vectorielle des forces dues à chacune de ces actions. Cette propriété se traduit par l'égalité $\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i$
L'unité de la force est le **Newton** ($\boldsymbol{N}$)

I - 3 - particule en interaction et particule isolée

Un point matériel est dit en interaction avec son environnement, s'il subit des actions (des forces) de la part de son environnement.

Un point matériel est dit **isolé**, s'il n'est soumis à aucune interaction.

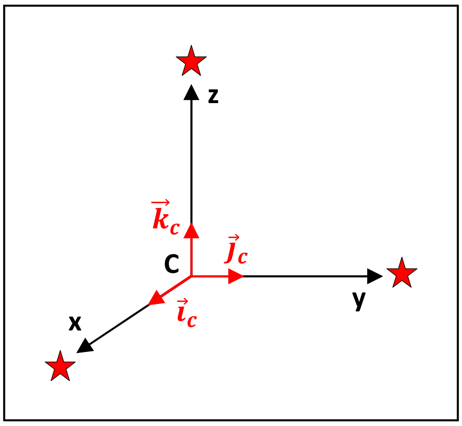
Un point matériel dont les actions mécaniques qu'il subit se compensent exactement (la résultante $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$) est dit **pseudo-isolé.**

I - 4 - référentiels galiléens ou d'inertie

Les principes de la mécanique ne sont valables que dans un référentiel bien déterminé, dit référentiel galiléen. Voyons ce qu'est veut dire un référentiel galiléen.

I - 4 - a - référentiel sidéral ou de Copernic

Le référentiel de Copernic $\boldsymbol{R_C(C,x,y,z)}$ est, par définition, un référentiel muni d'un repère d'espace dont l'origine est le centre d'inertie du système solaire, ses axes $\boldsymbol{Cx}$, $\boldsymbol{Cy}$ et $\boldsymbol{Cz}$ relient ce centre de masse à trois étoiles très éloignées considérées comme fixes.



Référentiel de Copernic $\boldsymbol{R_C}$

I - 4 - b - référentiel de Kepler

Le référentiel de Kepler $\boldsymbol{R_S}$ se déduit du référentiel de Copernic par une simple translation. L'origine $\boldsymbol{S}$ du repère de Kepler (repère *héliocentrique*) est le centre d'inertie $\boldsymbol{S}$ du soleil, et ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic $\boldsymbol{R_C}$.

I - 4 - c - référentiel Géocentrique

Le référentiel géocentrique est par définition un référentiel dont le repère a son origine au centre d'inertie **O** de la terre et ses axes $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$ et $\boldsymbol{Oz}$ sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic $\boldsymbol{R_C}$.

Le référentiel géocentrique n'est pas solidaire de la rotation de la terre sur elle-même (suivant l'axe nord-sud).

I - 4 - d - référentiel Terrestre

Le référentiel terrestre est par définition le référentiel dont le repère d'espace a son origine en un point de la Terre et ses axes sont liés à la rotation terrestre : un homme immobile est donc fixe dans le référentiel terrestre.

I - 4 - e - référentiel galiléen

Un référentiel qu'on appelle **galiléen** (ou ***inertiel***) est un référentiel dans lequel le mouvement d'un point matériel **isolé** est **rectiligne et uniforme**.
La recherche d'un référentiel inertiel est un sujet délicat, la détermination concrète d'un tel référentiel est toujours approximative. Un référentiel **fixe** ou animé d'un **mouvement de translation rectiligne uniforme** par rapport au référentiel de Copernic est la meilleure approximation d'un référentiel galiléen.

Cependant, l'expérience nous apprend que l'on peut toujours trouver un référentiel galiléen. En pratique on se contente d'un référentiel approximativement inertiel, approximation jugée satisfaisante pour l'expérience considérée. Ainsi, le référentiel terrestre peut être supposé galiléen, sauf si les effets de la rotation de la Terre ne sont pas négligeables : pour une expérience de courte durée en laboratoire, on l'acceptera généralement.

I - 5 - quantité de mouvement

Soit une particule $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$, animée, dans un référentiel $\boldsymbol{R}$, d'une vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}$, on appelle vecteur quantité de mouvement par rapport au référentiel $\boldsymbol{R}$, le produit de la masse $\boldsymbol{m}$ par le vecteur vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}$ dans le même référentiel $\boldsymbol{R}$: $\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}}$

C'est une quantité vectorielle orientée dans la direction et le sens de $\vec{\boldsymbol{V}}$ et ayant les dimensions $\boldsymbol{M\,L\,T^{-1}}\ (\boldsymbol{kg.m.s^{-1}})$.

II - Les Principes de la Dynamique du Point ou les Lois de Newton

Avant d'énoncer les trois lois de Newton qui régissent le mouvement des corps, il faut préciser que ces lois ne sont valables que dans un **référentiel galiléen**.

II - 1 - première loi de Newton ou principe d'inertie

On a constaté qu'un corps réductible à un point matériel, quand il était soustrait à toute action (particule isolée), était par rapport à un référentiel galiléen, soit en équilibre, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme. D'où la première loi qui s'énonce : *"tout corps isolé sur lequel n'agit aucune force extérieure est soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme, s'il est en mouvement, soit au repos s'il est initialement au repos"*

Cela se traduit par : $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext} = \vec{\boldsymbol{0}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{V}} = \overrightarrow{\mathbf{Cte}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$

Cette première loi de Newton est aussi appelée loi ou principe d'inertie car elle s'applique à des points matériels dans un **référentiel inertiel** (ou référentiel galiléen). On suppose aussi que l'observateur qui étudie le mouvement se trouve dans un tel référentiel.

II - 2 - deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique (P. F. D)

Dans un référentiel galiléen, une modification de la vitesse d'un point matériel doit être attribuée à une cause qui est la résultante des forces agissantes sur lui. Cependant, on a vu (§ I-1) que l'effet d'une même force est senti plus ou moins grand selon l'inertie du point matériel, c'est à dire, selon sa masse. D'où l'idée du principe fondamentale de la dynamique qui s'énonce :

" dans un référentiel galiléen la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des forces extérieures qui agissent sur lui "

Cela se traduit mathématiquement par : $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext} = \frac{d\vec{\boldsymbol{P}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}})$ (appelé aussi, ***théorème de la quantité de mouvement***)

Dans l'hypothèse où la masse est invariable, il vient :

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext} = \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}}) = \boldsymbol{m}\,\frac{d\vec{\boldsymbol{V}}}{dt} = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{a}}$$

La relation $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext} = \vec{\boldsymbol{0}}$ (que nous désignerons par la suite par les initiales **R**. **F**. **D**), s'applique à la plupart des problèmes pratiques. Mais si la masse n'est pas constante, ce qui est le cas, par exemple, pour une fusée, il faut revenir à la relation$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext} = \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt}$

Remarques :

① Si la résultante des forces appliquées au point matériel est nulle (cas d'une particule pseudo-isolée ou simplement isolée), $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext} = \vec{\boldsymbol{0}}$, alors $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ ce qui correspond à l'état $\vec{\boldsymbol{V}} = \overrightarrow{\boldsymbol{Cte}}$. La première loi de Newton est donc un cas particulier de la deuxième loi (ou P. F. D).

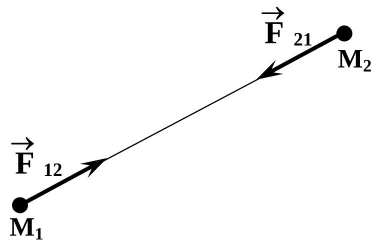
② D'après la relation fondamentale de la dynamique on a :

$$d\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{d} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{p}} - \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{o}} = \int_{t_o}^{t} \vec{\boldsymbol{F}}\,\boldsymbol{dt} = \vec{\boldsymbol{I}}$$

Le vecteur $\vec{I}$ est appelé **impulsion**. Donc la variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force appliquée.

II - 3 - troisième loi de Newton ou principe des actions réciproques

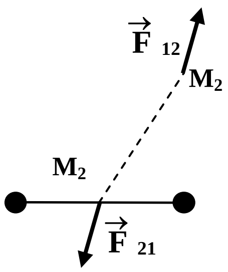
Soient deux points matériels M_1 et M_2 qui sont en interaction et ne subissant que les forces d'actions mutuelles. Soit $\vec{F}_{12}$ la force exercée sur M_2 de la part de M_1 et la force $\vec{F}_{21}$ exercée par M_2 sur M_1.
Le principe des actions réciproques, nommé aussi principe de l'action et de la réaction, énonce que ces deux forces, $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{21}$, sont opposées et égales en modules, donc: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$



On utilise parfois le terme **force d'action** pour désigner la force qu'exerce le point M_1 sur le point M_2 et le terme **force de réaction** pour désigner la force qu'exerce le point M_2 sur le point M_1.

Le principe de l'action et de la réaction suppose que les forces se propagent instantanément, donc avec une vitesse infinie.
Dans la mesure où les corps étudiés sont réductibles à deux points matériels M_1 et M_2, ces actions sont portées par la direction M_1M_2. L'expérience montre que ces deux forces ont une intensité inversement proportionnelle au carré de la distance M_1M_2 et proportionnelle à des coefficients algébriques caractéristiques des propriétés physiques de M_1 et M_2.

<u>Remarque</u> :



Les forces $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{21}$ sont portées par la droite M_1M_2 dans la mesure où M_1 et M_2 sont des points matériels. Cependant, si par exemple au point M_2 on place une particule chargée q, et au point M_1 un dipôle (qui n'est pas un point matériel) alors ce dernier exerce une force $\vec{F}_{12}$ qui est bien opposée et égale en norme à la force $\vec{F}_{21}$ mais n'est pas portée par M_1M_2.

III - PRINCIPE DE RELATIVITÉ DE GALILÉE

Soient deux référentiels galiléens R et R'. Le référentiel R' étant animé d'un mouvement de translation uniforme de vitesse constante $\vec{U}$ par rapport au référentiel R. Soit une particule M de masse m en mouvement par rapport à R et par rapport à R'.
D'après la loi de composition des vitesses, la vitesse du point M dans R est : $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$
avec $\vec{V}_r$ la vitesse relative et $\vec{V}_e$ la vitesse d'entraînement.
Donc : $\vec{V}_a = \vec{U} + \vec{V}_r$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel M dans le référentiel R, s'écrit :

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_a = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\frac{d\vec{V}_r}{dt} + m\frac{d\vec{U}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F} = m\frac{d\vec{V}_r}{dt} = m\vec{a}_r \qquad \text{car } \vec{U} = \overrightarrow{constant}$$

Dans le référentiel R', la force $\vec{F'}$ que subit le point matériel M est $\vec{F'} = m\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{F}$

Donc, pour deux référentiels R et R' animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement de translation uniforme, l'accélération d'un point matériel est la même qu'on la mesure dans R ou dans R'. Donc les lois de la mécanique s'expriment de la même manière dans R et dans R'. Cette propriété est générale et non pas limitée aux seules lois de la mécanique, et le principe de relativité de Galilée s'énonce : *"les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels animés d'un mouvement de translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen"*.

Remarque : transformation de Galilée

Considérons les deux référentiels $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{R}'$ cités ci-dessus. Désignons par $\boldsymbol{O}$ l'origine du référentiel $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{O}'$ l'origine du référentiel $\boldsymbol{R}'$. Supposons qu'à l'instant initial, le point $\boldsymbol{O}$ coïncide avec le point $\boldsymbol{O}'$. Pour repérer le point $\boldsymbol{M}$ dans l'espace et dans le temps, l'observateur lié à $\boldsymbol{R}$ utilise le vecteur position $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ et le temps $\boldsymbol{t}$. Celui de $\boldsymbol{R}'$ utilise le vecteur position$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}'}$ et le temps $\boldsymbol{t}'$. Dans l'hypothèse, d'un temps absolu indépendant du référentiel et d'après la loi de composition de mouvement, on a :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OO}'} + \overrightarrow{\boldsymbol{O}'\boldsymbol{M}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}'$$

Donc,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{U}} \times \boldsymbol{t} + \overrightarrow{\boldsymbol{O}'\boldsymbol{M}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}'$$

La transformation représentée par les équations ci-dessus qui permettent de passer d'un référentiel à un autre (en translation uniforme par rapport au premier) est appelée **transformation de Galilée**.

IV - LES FORCES FONDAMENTALES

Nous venons de voir que la relation fondamentale de la dynamique fait intervenir plusieurs concepts : les référentiels galiléens, la masse d'un point matériel, la force qu'exerce le reste de l'univers sur ce point. Grâce à cette relation et par des expériences convenables, il est évidemment possible de représenter toute action physiquement bien représentée par un vecteur force bien défini. Le travail d'un physicien est de dresser un catalogue des actions, dans lequel on puisera pour mettre en évidence un problème physiquement bien défini. Le rôle de la mécanique sera essentiellement d'apprendre à effectuer cette mise en équation dans les meilleures conditions et d'en déduire le maximum de conséquences utiles.
On distingue deux grandes catégories de forces. Les forces dites de contact et les forces dites à distance.

IV - 1 - les forces à distance

Ce sont les forces qui s'exercent à distance. Dues à des propriétés particulières de la matière, elles se manifestent dés que la distance entre les deux systèmes n'est pas trop grande par rapport à leurs dimensions. La forces d'attraction entre deux corps (appelée force gravitationnelle), les forces électromagnétiques entre des charges en mouvement, et les forces nucléaires sont des exemples des forces à distance.

Dans la mesure où les corps en présence sont réductibles à deux points matériels $\boldsymbol{M_1}$ et $\boldsymbol{M_2}$, d'après le principe de l'action et de la réaction, ces actions à distance sont portées par $\boldsymbol{M_1M_2}$ et telles que : $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{21}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{12}}$. L'expérience montre qu'elles ont une norme inversement proportionnelle au carré de la distance $\boldsymbol{M_1M_2}$ et proportionnelle à des coefficients algébriques caractéristiques des deux points.

Donnons quelques exemples des forces à distance :

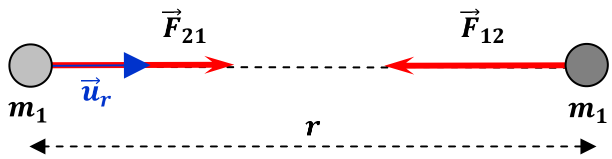
IV - 1 - a - l'interaction gravitationnelle

Cette force **attractive** est responsable du mouvement des corps célestes et explique le poids d'un corps. Cette interaction est déduite, en théorie classique par la loi de Newton et intéresse tous les corps, chargés ou non.
Un point matériel $\boldsymbol{M_1}$ subit de la part d'un autre point matériel $\boldsymbol{M_2}$ une force d'expression :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{12} = -\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_{g_1}m_{g_2}}}{\boldsymbol{r^2}}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$$

où $\quad \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \quad$ avec $\quad \vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M_1M_2}}$

La grandeur $\boldsymbol{G}$ est la constante de gravitation et vaut $\boldsymbol{6,67259 \times 10^{-11}}\ N.m^2.kg^{-2}$
$\boldsymbol{m_{g_1}}$ et $\boldsymbol{m_{g_2}}$ sont les masses gravitationnelles.



Remarques :

① Dans deux lois distinctes de la mécanique intervient une quantité scalaire $\boldsymbol{m}$ (masse), en effet :

• d'après le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ avec $\vec{p} = m\vec{V}$. Dans cette équation, $\boldsymbol{m}$ caractérise l'inertie

• d'après la loi d'attraction universelle : $\vec{F} = -G\frac{m_{g_1}m_{g_2}}{r^2}\vec{u}_r$.

Dans cette équation, m_{g_1} et m_{g_2} caractérisent le pouvoir attractif de chaque point.

L'expérience (observation du mouvement apparent de la lune) a permis de montrer l'identité de deux masses gravitationnelle et inertielle. Cette égalité est remarquable car elle confond dans le cas d'un point matériel soumis aux seules forces de gravitation, le champ de gravitation $\vec{G}$ et l'accélération galiléenne de la particule : $\vec{F} = m\vec{a}$ et $\vec{F} = m_g\vec{G} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{G} = \vec{g}$

On ne distingue plus désormais les masses inertielle et gravitationnelle :

$$m_g\ (masse\ gravitationnelle) = m\ (masse\ inertielle).$$

② D'après le principe de l'action et de la réaction, le point matériel M_1 subit de la part du point matériel M_2 une force $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

③ Dans le cas où on a une répartition de masses ponctuelles de centre $\boldsymbol{O}$, la force gravitationnelle subie par une particule de masse $\boldsymbol{m}$ se trouvant en $\boldsymbol{M}$ est :

$$\vec{F} = \sum_i -G\frac{m_{g_i}m}{r^2}\vec{u}_r = m\sum_i -G\frac{m_{g_i}}{r^2}\vec{u}_r = m\vec{G}$$

où $\vec{G} = \sum_i -G\frac{m_{g_i}}{r^2}\vec{u}_r = \sum_i -G\frac{m_i}{r^2}\vec{u}_r$ est le champ gravitationnel engendré par les masses $m_{g_i} = m_i$, placées en $\boldsymbol{O}$, crée en $\boldsymbol{M}$.

④ Dans le cas des corps célestes tels que la terre, le soleil, la lune, on montre (par analogie avec le champ électrostatique; à partir du théorème de Gauss; voir §V-4, Chapitre VIII) que les astres, supposés avoir une répartition de masse de symétrie sphérique, se comportent comme des points matériels confondus avec leurs centres. De telle sorte qu'à l'extérieure de l'astre $\vec{G} = -G\frac{M_C}{r^2}\vec{u}_r$ avec M_C est la masse du corps céleste, $\boldsymbol{r}$ est la distance entre le centre de l'astre et le point matériel et $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire radial dirigé dans le sens *point matériel - centre du corps* céleste.

IV - 1 - b - l'interaction électromagnétique

Un système matériel de charges électriques, au repos ou en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\boldsymbol{R}$ exerce, sur un point matériel $\boldsymbol{M}$, de charge $\boldsymbol{q}$, de vitesse $\vec{V}$ par rapport au référentiel $\boldsymbol{R}$, une force, appelée **force de Lorentz** dont l'expression est donnée par : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B})$

Entre deux particules de charges respectives q_1 et q_2, fixes par rapport au référentiel galiléen $\boldsymbol{R}$, l'interaction électromagnétique se réduit à l'interaction décrite par la **loi de Coulomb** :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et vaut $8,85 \times 10^{-12}$ **SI**.

Cette force est responsable de la structure des atomes et des molécules et des propriétés des matériaux.

Notons que la force d'interaction électrostatique est attractive ou répulsive suivant le signe de q_1q_2.

Remarque :

Dans le cas du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, on a, puisque le rayon de l'atome de Bohr vaut $a_0 \approx 0{,}51\ \text{Å}$, $\|\vec{F}_e\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_e^2}{r^2} \approx 8 \times 10^{-8}N$ et $\|\vec{F}_g\| = \frac{Gm_pm_e}{a_0^2} \approx 4 \times 10^{-47}N$

Donc pour des particules chargées, en général, la force gravitationnelle est négligeable devant l'interaction électrostatique

APPLICATION :

Déterminer le champ gravitationnel crée au niveau de la surface :

a - de la terre (au niveau du sol).

b - de la lune.

On donne : masse de la terre $M_T = 5,97 \times 10^{24}\ kg$, rayon de la terre $R_T = 6367\ km$, masse de la lune $M_L = 0,074 \times 10^{24}\ kg$ et rayon de la lune $R_L = 1738\ km$

Solution :

Le champ gravitationnel crée par un astre au niveau de sa surface est donné par : $G = \frac{GM_A}{R_A^2}$

où M_A *est la masse de l'astre et* R_A *son rayon.*

$\Rightarrow$ pour la terre $\|\vec{G}\| = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9,88\ m.s^{-2}$ *et Pour la lune* $\|\vec{G}\| = \frac{GM_L}{R_L^2} = 1,64\ m.s^{-2}$

IV - 2 - les forces de contact

Ce sont les forces qui résultent d'un contact physique entre le corps (ou point matériel) et son environnement.

Considérons deux exemples de forces de contact.

IV - 2 - a -la réaction d'une surface ou d'une courbe

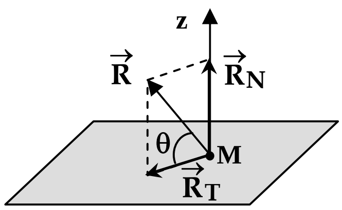
Les forces de frottement et la force de pression sont des exemples de forces de contact.

Un exemple important des forces de contact est la réaction exercée sur un point matériel en mouvement sur une courbe ou une surface. Ces points matériels sont dits des **points liés** (le degré de liberté est inférieur à trois en raison des liaisons).

Soit un point matériel en contact en un point $\boldsymbol{M}$ d'une surface où on définit un plan tangent et une normale $\boldsymbol{Mz}$.

L'expérience montre que du fait de ce contact la surface exerce sur le point matériel une action, *dite **action de contact***, appliquée au point matériel qui se trouve en $\boldsymbol{M}$ à l'instant considérée, représentée par le vecteur $\vec{\boldsymbol{R}}$, appelée la ***réaction*** de la surface ou de la courbe sur le point matériel en $\boldsymbol{M}$.

Si la vitesse du point matériel n'est pas nulle (la particule est en mouvement sur la surface ou sur la courbe), on constate que $\vec{\boldsymbol{R}}$ fait un angle $\boldsymbol{\theta}$ avec la direction du mouvement.



Cette réaction $\vec{\boldsymbol{R}}$ est la somme d'une composante normale à la surface (ou à la courbe), $\vec{\boldsymbol{R}}_N$ et d'une composante tangentielle à la surface (ou à la courbe), $\vec{\boldsymbol{R}}_T$ ayant la direction opposée à celle de la vitesse :

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \underbrace{\vec{\boldsymbol{R}}_N}_{\substack{\textbf{Réaction}\\ \textbf{normale}}} + \underbrace{\vec{\boldsymbol{R}}_T}_{\substack{\textbf{Réaction}\\ \textbf{tangentielle}}}$$

Il n'est pas possible de donner à priori d'autres renseignements sur $\vec{\boldsymbol{R}}$: sa direction (l'angle $\boldsymbol{\theta}$) et son intensité ne pourront être déterminées qu'une fois les autres éléments du mouvement sont connus.

Notons que la réaction tangentielle $\vec{\boldsymbol{R}}_T$ représente les **forces de frottement** dues au contact entre la courbe (ou la surface) et le point matériel. Elle obéit à des lois caractéristiques des corps en contact.

Si le mouvement s'effectue sans frottement $\vec{\boldsymbol{R}}_T = \vec{\boldsymbol{0}}$ et $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{R}}_N$

Remarques :

① Si le point matériel a la possibilité de quitter la surface, c'est à dire que le contact peut être rompu, la liaison est dite **unilatérale** (exemple : un skieur glissant sur une piste). Dans le cas contraire, elle est **dite bilatérale**. Dans ce dernier cas, le support impose une trajectoire au point matériel (exemple : anneau coulissant sur une tige, un mobile guidé par des rails, skieur glissant sur une piste sans décoller).

② En vertu du principe des réactions réciproques, l'action de contact en $\boldsymbol{M}$ du point matériel sur la surface ou la courbe est représentée par une force $\vec{\boldsymbol{R}}'$ opposée à $\vec{\boldsymbol{R}}$

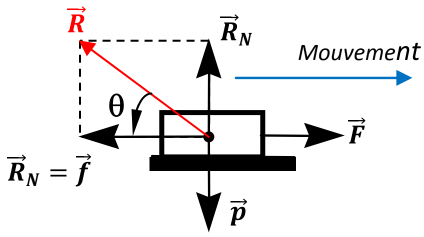
③ Dans le cas d'un point mobile sur une surface la direction de $\vec{\boldsymbol{R}}_N$ est unique (normale à la surface), alors que pour un point lié à une courbe c'est la direction de $\vec{\boldsymbol{R}}_T$ qui est déterminée de manière unique (tangente à la courbe).

④ *les forces de frottement*

Lorsqu'un corps se déplace sur une surface (ou une courbe) ou dans un fluide, il y a une résistance au mouvement attribuée à l'interaction entre le corps et son environnement qu'on appelle **force de frottement** représenté par la composante tangentielle $\vec{\boldsymbol{R}}_T$ de la réaction. Ce type de force joue un rôle très important dans la vie courante, elle nous permet de marcher, et de nous déplacer à l'aide des automobiles, bicyclette, etc...

α - force de frottement solide

Considérons un corps posé sur une table horizontale.
Si nous exerçons sur lui une force horizontale $\vec{\boldsymbol{F}}$ dirigée vers la droite, l'expérience montre que si l'intensité de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ est assez grande, le bloc se déplace et il est accéléré dans la direction de $\vec{\boldsymbol{F}}$ (vers la droite dans notre exemple). Le module de la force de frottement $\vec{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{R}}_T$ s'exprime ici par : $\|\vec{\boldsymbol{R}}_T\| = \boldsymbol{\mu}\|\vec{\boldsymbol{R}}_N\|$ où $\boldsymbol{\mu}$ est le **coefficient de frottement** cinétique (solide-solide).



β - action de contact entre un solide et un fluide

On modélise l'ensemble des interactions microscopiques entre un solide et le fluide par la force de frottement fluide. Les actions de contact entre solides et liquides, mettant en jeu la viscosité, sont complexes, et leur étude est du domaine des techniques particulières (mécanique des fluides, étude du lubrifiant, …) Il n'y a pas une loi générale pour exprimer cette force, mais on se contente d'utiliser deux lois décrivant les deux cas limites :

- frottement proportionnel à $\boldsymbol{V}^2$ pour les grandes vitesses , $\vec{\boldsymbol{f}} = -\boldsymbol{V}^2\vec{\boldsymbol{\tau}}$ où $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ est un vecteur unitaire porté par la direction de la vitesse.
- frottement proportionnel à $\boldsymbol{V}$ pour les faibles vitesse, $\vec{\boldsymbol{f}} = -\boldsymbol{h}\vec{\boldsymbol{V}}$

le paramètre positif $\boldsymbol{h}$ est le **coefficient de frottement fluide**.

IV - 2 - b - la tension d'un ressort

Considérons une masse $\boldsymbol{m}$ attachée à l'extrémité libre d'un ressort de longueur à vide $\boldsymbol{l}_0$. Une fois allongé par rapport à sa longueur à vide (ou compressé), le ressort exerce une force de rappel $\vec{\boldsymbol{F}}$ d'intensité proportionnelle à son allongement. C'est une ***force de rappel***.

L'expression de cette force de rappel est donnée par : $\vec{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{k}\,\Delta\boldsymbol{l}\,\vec{\boldsymbol{u}}$
où :
$\boldsymbol{k}$ est la ***raideur***. C'est une constante positive caractéristique du ressort. Elle s'exprime en $\boldsymbol{N.m^{-1}}$.
$\Delta\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}_0$ est l'allongement du ressort avec $\boldsymbol{l}$ la longueur totale du ressort allongé (ou comprimé).
$\vec{\boldsymbol{u}}$ est un vecteur unitaire dans la direction du ressort et orienté vers l'extérieur du ressort.

V - RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE DYNAMIQUE

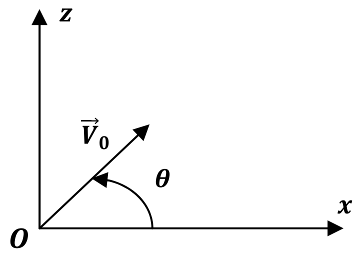
Pour résoudre un problème de dynamique , il convient de procéder suivant une démarche bien déterminée :

① *définition du système : dans notre cas, le système est toujours formé par un point matériel*
② *nature du référentiel R par rapport auquel on étudie le mouvement (galiléen ou non galiléen). Le cas où le référentiel n'est pas galiléen sera traité dans le chapitre 8. Dans ce paragraphe tous les référentiels sont considérés comme galiléens.*
③ *bilan des forces appliquées au point matériel.*
④ *expression vectorielle de la relation fondamentale de la dynamique(R.F.D).*
⑤ *projection de la R.F.D sur une base.*
⑥*intégration des équations différentielles en tenant compte des conditions initiales.*
⑦ *analyse du résultat*

Illustrons ceci par deux exemples.

V - 1 - chute libre

Considérons un point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$ lancé, du point $\boldsymbol{O}$, à la surface de la terre, avec une vitesse initiale $\vec{\boldsymbol{V}}_0$ faisant un angle $\boldsymbol{\theta}$ avec l'horizontal.
L'intensité du champ de pesanteur est constante et vaut $\boldsymbol{g}$.



V - 1 - a - on néglige la résistance de l'air (sans frottement)

Supposons que la force due au frottement de l'air est négligeable.

définition du système :

le système est constitué du projectile, considéré comme un point matériel.

nature du référentiel R par rapport auquel on étudie le mouvement :

le référentiel d'analyse $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O};\boldsymbol{xyz})$ de **B.O.N.D**$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. est le référentiel terrestre, qui est considéré comme galiléen.

bilan des forces :
le poids $\boldsymbol{m\vec{g}} = -\boldsymbol{mg\vec{k}}$

expression vectorielle de la loi fondamentale :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$$

projection dans une base :

projection sur $\boldsymbol{Ox}$: $\quad m\ddot{x} = 0 \qquad (1)$
projection sur $\boldsymbol{Oy}$: $\quad m\ddot{y} = 0 \qquad (2)$
projection sur $\boldsymbol{Oz}$: $\quad m\ddot{z} = -mg \qquad (3)$

intégration des équations différentielles :

(1) $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = Cte = C_1 \qquad \Rightarrow x(t) = C_1 t + D_1$

(2) $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = Cte = C_2 \qquad \Rightarrow y(t) = C_2 t + D_2$

(3) $\Rightarrow \frac{dz}{dt} = -mgt + C_3 \qquad \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2} C_3 t^2 + D_3 t + E$

conditions initiales :

à $t = 0, x = 0, y = 0, z = 0, V_x(t = 0) = V_0 \cos\theta$ et $V_z(t = 0) = V_0 \sin\theta$

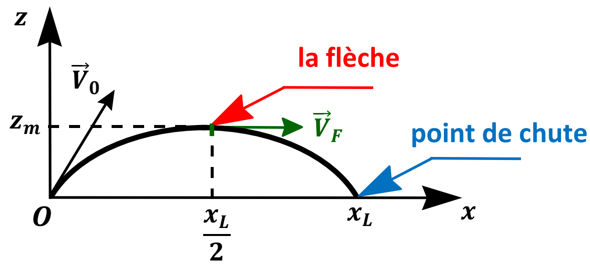
$\Rightarrow D_1 = 0, C_1 = V_0 \cos\theta \,, C_2 = 0, D_2 = 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} x(t) = V_0 t \cos\theta \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t \sin\theta \end{cases}$

analyse du résultat :

• équation de la trajectoire du projectile :

$t = \frac{x}{V_0 \cos\theta} \qquad \Rightarrow \qquad z(t) = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta} + x\, tg\theta$

C'est l'équation d'une **parabole**.



• ***la portée :*** c'est la distance entre le point de lancement (ici l'origine O) et le point de chute, soit x_L. Le point de chute correspond à $z = 0$, donc x_L vérifie l'équation de la parabole, ce qui implique :

$$z(x_L) = -\frac{1}{2} g \frac{x_L^2}{V_0^2 \cos^2\theta} + x_L\, tg\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_L = \frac{V_0^2}{g} \sin(2\theta)$$

On remarque que la portée est maximale pour $\sin(2\theta) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

• ***la flèche :*** c'est l'altitude maximale atteinte. Cherchons donc les coordonnées du sommet S.

Au sommet on a : $\frac{dz}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = x_S = \frac{V_0^2}{2G} \sin(2\theta) = \frac{x_L}{2}$

L'altitude du sommet est alors : $z_m = z\left(\frac{x_L}{2}\right) = \frac{V_0^2}{4g}$

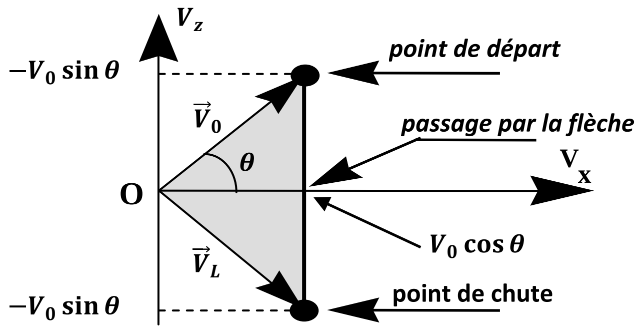
• ***hodographe :***

c'est la courbe décrite par le point P de coordonnées :

$$X = V_x = V_0 \cos\theta = Cte$$

$$Z = V_z = -gt + V_0 \sin\theta$$

L'hodographe est donc un segment de droite de longueur $2V_0 \sin\theta$ situé à $x = V_0 \cos\theta$



• ***parabole de sûreté :***

Pour V_0 donnée, cherchons l'angle de tir θ qui permet au projectile d'atteindre un point $C(x_c, z_c)$ qui représente la cible.

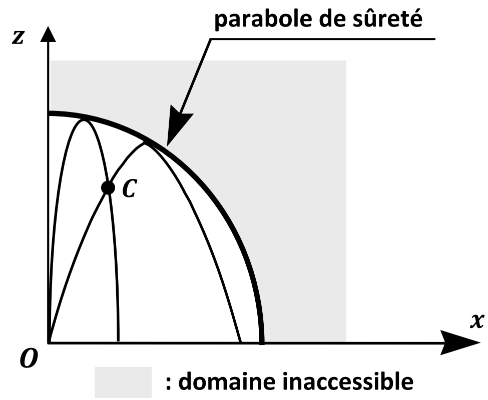
Résolvons donc, l'équation $z(x_c) = z_c$

$$z(x_c) = -\frac{1}{2}g\frac{x_c^2}{V_0^2\cos^2\theta} + x_c\,tg\theta = z_c \qquad \text{or} \qquad \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + tg\theta$$

$$z_c = -\frac{gx_c^2}{2V_0^2}\left(1 + tg^2\theta\right) + x_c tg\theta \qquad \Rightarrow \qquad 2V_0^2 z_c + gx_c^2 + gx_c^2 tg^2\theta + 2V_0^2 tg\theta = 0$$

$$\Rightarrow\ gx_c^2 tg^2\theta - 2\left(V_0^2 tg\theta\right)x_c^2 + gx_c^2 + 2V_0^2 z_c = 0$$

$$\Rightarrow\ gx_c^2 tg^2\theta - 2\left(V_0^2 x_c\right)tg\theta + gx_c^2 + 2V_0^2 z_c = 0$$



Pour que cette dernière équation admette des solutions, il faut que le discriminant réduit soit positif ou nul :

$$\Delta' = V_0^4 x_c^2 - gx_c^2\left(gx_c^2 + +2V_0^2 z_c\right) \geq 0$$

Donc $\Delta' = x_c^2\left(V_0^4 - g^2x_c^2 - 2z_c g V_0^2\right) \geq 0$

$$\Rightarrow\ V_0^4 - g^2x_c^2 - 2z_c g V_0^2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_c \leq \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}x_c^2$$

L'équation $z = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}x^2$ constitue la frontière séparant les points accessibles des points inaccessibles. C'est l'équation d'une parabole qu'on appelle **parabole de sûreté**.

Si $C(x_c, z_c)$ appartient à l'intérieur de la parabole sûreté, deux valeurs de θ conviennent pour l'atteindre et s'il se trouve sur la parabole de sûreté, une seule valeur convient, à savoir la racine double.

V - 1 - b - tenir compte de la résistance de l'air (mouvement avec frottement)

L'air a pour effet d'exercer sur le point matériel une force de frottement $\vec{f} = -h\vec{V}$ où h est une constante positive (coefficient de frottement fluide) et $\vec{V}$ la vitesse du point M

La R. F. D $\Rightarrow$ $\quad m\vec{a} = m\vec{g} - h\vec{V} \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{d\vec{V}}{dt} = -h\vec{V} + m\vec{g} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{h}{m}\vec{V} = \vec{g}$

soit par projection sur les axes Ox et Oy :

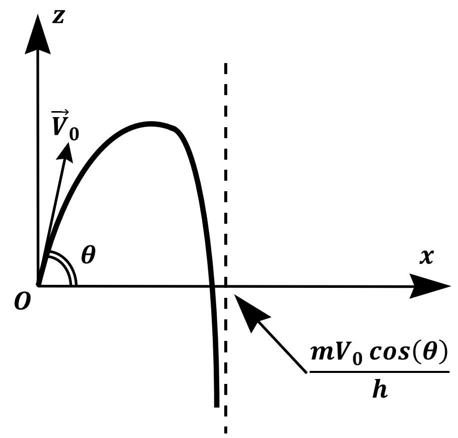
$$\frac{dV_x}{dt} + \frac{h}{m}V_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_x}{V_x} = -\frac{h}{m}dt \quad \Rightarrow \quad ln(V_x) = -\frac{h}{m}dt + C_1 \quad \Rightarrow V_x = C_2 exp\left(-\frac{h}{m}t\right)$$

et

$\frac{dV_z}{dt} + \frac{h}{m}V_z = -g$ la solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et de la solution particulière $-\frac{mg}{h}$

La solution générale est $C_3 exp\left(-\frac{h}{m}t\right)$

$$\Rightarrow \qquad V_z = C_3 exp\left(-\frac{h}{m}t\right) - \frac{mg}{h}$$



en tenant compte des conditions initiales, on déduit :

$V_x = V_0 exp\left(-\frac{h}{m}t\right)$

et

$V_z = V_0 \sin\theta\, exp\left(-\frac{h}{m}t\right) - \frac{mg}{h}\left(1 - exp\left(-\frac{h}{m}t\right)\right)$

Après intégration, en tenant compte des conditions initiales :

$$x = \frac{mV_0}{h}\cos\theta\left(1 - exp\left(-\frac{h}{m}t\right)\right)$$

$$z = \frac{m}{h}\left(\frac{mg}{h} + V_0\sin\theta\right)\left(1 - exp\left(-\frac{h}{m}t\right)\right) - \frac{mg}{h}t$$

Si t est très grand ($t \to \infty$) alors :

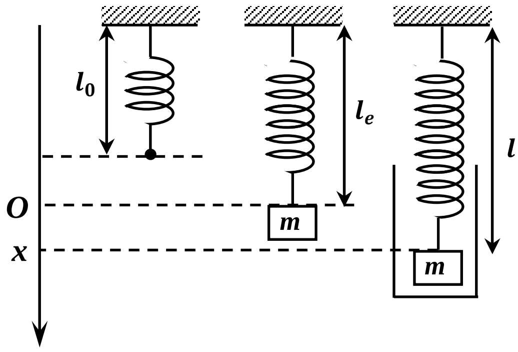
$V_x \to \infty$; $V_z = -\frac{mg}{h}$ et $x = \frac{mV_0\cos\theta}{h}$

La trajectoire présente une asymptote verticale d'abscisse $\frac{mV_0\cos\theta}{h}$

Le mouvement tend donc vers un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $-\frac{mg}{h}\vec{k}$

V - 2 - masse m attachée à un ressort

Considérons un point matériel M, de masse m, attaché à un ressort parfaitement élastique de masse négligeable et à spires non jointives, de longueur l_0 et de raideur k.



La masse m, attachée à l'une des extrémités du ressort dont l'autre extrémité est fixe, coulisse sans frottement le long de l'axe vertical Ox du référentiel $R(O; xyz)$ de **B.O.N.D**($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).

À l'instant initial $t = 0$, on écarte le point M de sa position d'équilibre initial d'une longueur x_0 puis on le lâche sans vitesse initiale.

définition du système :

le système est constitué de la masse m, considérée comme un point matériel.

nature du référentiel R par rapport auquel on étudie le mouvement :

le référentiel d'analyse R est le référentiel du laboratoire, qui est considéré comme galiléen.

bilan des forces : dans le le référentiel d'analyse $R(O; xyz)$, le point matériel est soumis à :

- son poids $m\vec{g} = mg\vec{\imath}$
- la force de rappel $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{\imath} = -k(l_e + x - l_0)\vec{\imath}$

avec x le déplacement du point M par rapport à sa position d'équilibre. Ici, l'origine O de l'axe vertical Ox correspond à la position d'équilibre. L'abscisse x est définie comme étant l'écart par rapport à la position d'équilibre et non pas comme l'allongement du ressort.

l_e est la longueur du ressort à l'équilibre.

expression vectorielle de la loi fondamentale : $\sum\vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} = mg\vec{\imath} - k(l_e + x - l_0)\vec{\imath}$

or à l'équilibre, au point O, nous avons : $\vec{p} + \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad mg\vec{\imath} - k(l_e - l_0)\vec{\imath} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad -kx\,\vec{\imath} = m\vec{a}$$

projection sur l'axe vertical Ox :

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

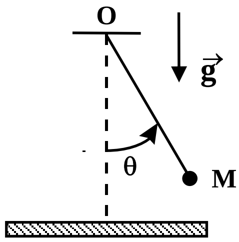
avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

intégration des équations différentielles :

La solution de l'équation différentielle précédente s'écrit sous la forme : $\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$
conditions initiales : à $t = 0$, $x = x_0$, et $V(t = 0) = 0$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x(t) = x_0\, A\cos(\omega_0 t)}$

V - 3 - le pendule simple

Considérons un point matériel $\boldsymbol{M}$, de masse $\boldsymbol{m}$, relié au point fixe $\boldsymbol{O}$ par un fil inextensible de longueur $\boldsymbol{OM = \ell}$ et de masse négligeable.



À l'instant initial $\boldsymbol{t = 0}$, on abandonne l'ensemble sans vitesse initial, $\boldsymbol{OM}$ faisant l'angle $\boldsymbol{\theta_0}$ avec la verticale. On se propose de déterminer l'expression $\boldsymbol{\theta(t)}$ dans le cas des petites élongations angulaires.
On suppose que les forces de frottement sont négligeables.
Notons que le système des coordonnées polaires est le système le plus adapté pour étudié ce mouvement avec $\boldsymbol{r = \ell = constante}$.

définition du système :

le système est constitué du point matériel de masse $\boldsymbol{m}$.

*nature du référentiel **R** par rapport auquel on étudie le mouvement* :

le référentiel d'analyse $\boldsymbol{R}$ est le référentiel terrestre, qui est considéré comme galiléen.

bilan des forces :

- le poids $\boldsymbol{m\vec{g} = mg\vec{k} = mg\cos(\theta)\,\vec{u}_r - mg\sin(\theta)\,\vec{u}_\theta}$

- la tension du fil $\boldsymbol{\vec{T} = -T\,\vec{u}_r}$ avec $\boldsymbol{T}$ la norme de la tension du fil.

expression vectorielle de la loi fondamentale :

$$\boldsymbol{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} = mg\cos(\theta)\,\vec{u}_r - mg\sin(\theta)\,\vec{u}_\theta - T\vec{u}_r}$$

Notons que :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \ell\,\vec{u}_r} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{V} = \ell\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r}$$

projection sur l'axe vertical $\boldsymbol{\vec{u}_\theta}$ *:*

$$\boldsymbol{m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\sin(\theta) = 0} \qquad \text{avec } \boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

intégration des équations différentielles :

Si $\boldsymbol{\theta_0}$ est assez petit, on peut confondre l'angle $\boldsymbol{\theta}$ avec son sinus. Il vient alors : $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0}$

La solution de l'équation différentielle $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega_0^2 = 0}$ est de la forme : $\boldsymbol{\theta = \theta_1\cos(\omega_0 t) + \theta_2\sin(\omega_0 t)}$

conditions initiales :
à $t = 0$, on a : $\boldsymbol{\theta(t = 0) = \theta_1 = \theta_0}$ et $\boldsymbol{\dot{\theta}(t = 0) = \omega_0\theta_2 = 0}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\theta_2 = 0}$ d'où la solution :

$$\boldsymbol{\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$$

Le mouvement est donc périodique de période $\boldsymbol{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \boldsymbol{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}}$

V - 4 - recherche de la loi de force lorsque le mouvement est connu

Parfois l'étude expérimentale du mouvement permet de déterminer la trajectoire et l'accélération à chaque instant. On peut donc déduire la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ responsable du mouvement. Considérons un exemple.
Dans le plan $\boldsymbol{xOy}$ un point matériel $\boldsymbol{M}$ décrit une conique d'équation polaire $\boldsymbol{r(\theta)} = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ et d'accélération $\vec{\boldsymbol{a}}$

Cherchons la force auquel est soumis le point $\boldsymbol{M}$, en utilisant la deuxième formule de Binet :

$$\vec{\mathbf{a}} = -\frac{\mathbf{C^2}}{\mathbf{r^2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{d^2(1/r)}}{\mathbf{d\theta^2}}\right)\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m\vec{a}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{a}} = -\frac{\mathbf{mC^2}}{\mathbf{r^2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{d^2(1/r))}}{\mathbf{d\theta^2}}\right)\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$$

or $\boldsymbol{r} = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{d^2(1/r))}}{\mathbf{d\theta^2}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}} = -\frac{\mathbf{mC^2}}{\mathbf{r^2}}\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$

VI - Statique Du Point Matériel

VI - 1 - définitions

• Soit, dans un référentiel $\boldsymbol{R}$, un point matériel soumis à plusieurs forces. On dit que $\boldsymbol{M}$ est en **équilibre** dans $\boldsymbol{R}$ si sa vitesse reste indéfiniment nulle dans ce référentiel (les coordonnées du point matériel $\boldsymbol{M}$, dans le référentiel $\boldsymbol{R}$, prennent des valeurs constantes)

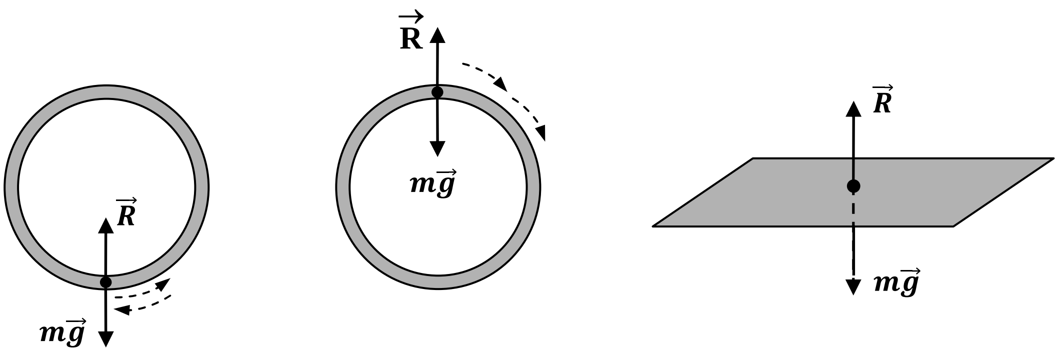
• Pour qu'un point soit en équilibre il faut et il suffit que la somme des forces auxquelles il est soumis soit nulle : $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \vec{\mathbf{0}}$

Remarque :

si le point n'est pas initialement immobile, la condition $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \vec{\mathbf{0}}$ n'implique pas l'immobilité ultérieure puisque. En effet, $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\mathbf{0}}$. Il faut donc (en plus de $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$) que la vitesse initiale soit nulle, c'est à dire que le point matériel soit déjà au repos.

VI - 2 - stabilité de l'équilibre

Un équilibre est **stable** si, lorsque le point est légèrement écarté de sa position d'équilibre il tend à y revenir. Il est **instable** dans le cas contraire. L'équilibre est **indifférent** si lorsque le point est légèrement écarté de sa position d'équilibre, il reste en équilibre dans sa nouvelle position.



Équilibre stable **Équilibre instable** **Équilibre indifférent**

Supposons que $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. À l'équilibre on a $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$

Étudions le cas d'un équilibre stable

$$\boldsymbol{dF} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{dy}$$

à $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{cte}$ (donc $\boldsymbol{dy} = \mathbf{0}$), une variation élémentaire de $\boldsymbol{x}$, soit $\boldsymbol{dx}$ engendre une force de rappel $\boldsymbol{dF}$

si $\boldsymbol{dx} > 0$, la force $\boldsymbol{F}$ est une force de rappel donc, $\boldsymbol{dF} < 0$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{y}} < 0$

si $\boldsymbol{dx} < 0$, la force $\boldsymbol{F}$ est une force de rappel donc, $\boldsymbol{dF} > 0$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\boldsymbol{x}} < 0$

de même pour $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Cte}$, si l'équilibre est stable alors $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\boldsymbol{x}} < 0$

donc pour un équilibre stable on a toujours $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{y}} < 0$ et $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\boldsymbol{x}} < 0$

Si l'équilibre est instable on aura $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{y}} > 0$ et $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\boldsymbol{x}} > 0$

Chapitre III

TRAVAIL ET ÉNERGIE

La notion d'énergie est sans doute une notion très importante en physique.
L'énergie se présente sous différentes formes : l'énergie mécanique, électromagnétique, chimique, thermique et nucléaire. Cependant, les diverses formes d'énergie ont une caractéristique en commun: lorsque l'énergie passe d'une forme à une autre, elle est toujours conservée.

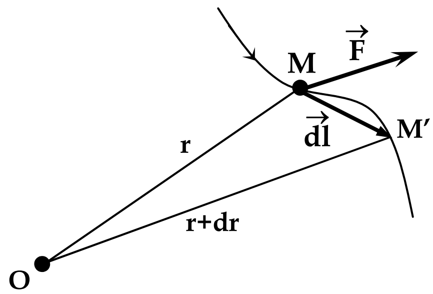
Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser exclusivement aux formes mécaniques de l'énergie. Nous verrons qu'il est possible d'appliquer les notions de travail et d'énergie pour étudier le mouvement d'un point matériel, sans avoir recours aux lois de Newton. Cependant, nous élaborons ces notions de travail et d'énergie à partir des lois de Newton.
Nous allons d'abord définir le travail, notion qui permet d'établir le lien entre les concepts de force et d'énergie.

I - TRAVAIL ET PUISSANCE D'UNE FORCE

I - 1 - Travail d'une force

Considérons, un point matériel de masse **m** mobile dans un référentiel $\boldsymbol{R(O,xyz)}$ et qui à l'instant $\boldsymbol{t}$, se trouve au point $\boldsymbol{M}$ de la trajectoire $\boldsymbol{C}$.

Soit $\vec{F}$, la force qui s'exerce sur ce point et $\vec{V}$ sa vitesse dans le référentiel $\boldsymbol{R}$.
A l'instant $(t+dt)$ le mobile vient en $\boldsymbol{M'}$, infiniment voisin de $\boldsymbol{M}$. Soit le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl}$



Par définition le travail élémentaire de la force $\vec{F}$qui s'exerce sur le point matériel $\boldsymbol{M}$ est la quantité scalaire :

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \vec{F}.\vec{V}\,dt \qquad \text{puisque} \qquad \overrightarrow{dl} = \vec{V}dt$$

Dans la base cartésienne de $\boldsymbol{R}$, le point $\boldsymbol{M}$ étant défini par ses coordonnées cartésiennes x, y, z, les composantes de la force $\vec{F}$ étant F_x, F_y et F_z, alors le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ est :

$$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Si la position du point $\boldsymbol{M}$ est définie par ses coordonnées cylindriques (ρ,φ,z), les composantes de $\vec{F}$ étant F_ρ, F_φ et F_z, alors le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ est : $\delta W = F_\rho d\rho + \rho F_\varphi d\varphi + F_z dz$

Si la position du point $\boldsymbol{M}$ est définie par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ), les composantes de $\vec{F}$ étant F_r, F_θ et F_φ, alors le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ est :

$$\delta W = F_r dr + rF_\theta d\theta + rF_\varphi \sin\theta\, d\varphi$$

Cette définition du travail, montre immédiatement que si $\vec{F}$ et $\vec{V}$ sont perpendiculaires, c'est à dire si la force $\vec{F}$ est perpendiculaire à la trajectoire du point $\boldsymbol{M}$, alors le travail de la force $\vec{F}$ est nul. C'est ce qui se produit quand on évalue le travail d'une action de contact sans frottement. C'est également ce qui se produit dans le cas de la force magnétique qui s'exerce sur une particule chargée, se trouvant dans un champ magnétique, puisque : $\delta W = q\,(\vec{V}\wedge\vec{B})\bullet\vec{V}dt = 0$

Pour un trajet quelconque qui mène le point matériel $\boldsymbol{M}$ de sa position initiale M_i à l'instant initial t_i, en une position finale M_f à l'instant final t_f, le travail de la force entre les instants t_i et t_f est :

$$W_{if} = \int_{M_i}^{M_f} \vec{F}\overrightarrow{dl} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\vec{V}dt$$

Remarques:

① La notion de travail n'est pas seulement utile pour l'exploitation qu'elle permet de la loi fondamentale de la dynamique. Elle a depuis longtemps été choisie dans le domaine pratique pour caractériser l'efficacité d'une force. Cette efficacité est considérée comme d'autant plus grande que le travail est plus grand; un travail positif correspond à une force active (force motrice), efficace, un travail négatif à une force passive, nuisible en quelque sorte (force qui s'oppose au mouvement telle que la force de frottement).

② le travail est une quantité scalaire dont les dimensions sont celles d'une force multipliée par une longueur. L'unité $\boldsymbol{SI}$ du travail est donc le Newton-Mètre ($\boldsymbol{N.m}$) que l'on nomme le ***Joule*** ($\boldsymbol{J}$).

③ lorsque le point matériel subit l'action de plusieurs forces, le travail total correspond à la somme de tous les travaux des différentes forces (égal aussi au travail de la force résultante). En effet, puisque $\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_{i,ext}$ représente la force résultante, alors le travail net effectué dans l'intervalle allant de $\boldsymbol{M_i}$ à $\boldsymbol{M_f}$ s'écrira : $\boldsymbol{W_{if}} = \int_{M_i}^{M_f}(\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_{i,ext}).\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = \int_{t_i}^{t_f}(\vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \cdots \vec{\boldsymbol{F}}_n).\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = \sum_i \int_{t_i}^{t_f}(\vec{\boldsymbol{F}}_{i,ext})\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = \sum_i \boldsymbol{W}_{i,ext}$

I - 2 - puissance d'une force

Il est souvent intéressant de connaître non seulement le travail effectué, mais également la rapidité avec laquelle il s'effectue, c'est à dire le taux de variation temporelle du travail.
Par définition, la puissance de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ s'exerçant sur le point matériel $\boldsymbol{M}$ (ou aussi reçue par le point matériel $\boldsymbol{M}$) est : $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{\boldsymbol{F}}.\vec{\boldsymbol{V}}$
En coordonnées cartésiennes $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}}$
En coordonnées cylindriques $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{F_\rho\dot{\rho} + \rho F_\varphi\dot{\varphi} + F_z\dot{z}}$
En coordonnées sphériques $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{F_r\dot{r} + rF_\theta\dot{\theta} + rF_\varphi \sin\theta\,\dot{\varphi}}$

Évidemment si le travail d'une force $\vec{\boldsymbol{F}}$ est nul, la puissance correspondante est nulle.
Dans le $\boldsymbol{S.I}$, l'unité de la puissance est le $\boldsymbol{Watt}$ ($\boldsymbol{kg^2s^{-3}}$)

APPLICATIONS :

① Soit la force qui s'exprime dans la base ($\vec{\imath},\vec{\jmath}$) par $\vec{F}_1 = (3x+y)\vec{\imath} + 2xy\vec{\jmath}$. Les unités utilisées sont les unités légales. Calculer le travail de cette force entre les points $O(0,0)$ et $A(1,2)$ dans les déplacements suivants :
a - le segment OH puis le segment HA; $H(1,0)$.
b - l'arc de parabole reliant O à A d'équation $y = 2x^2$
- Reprendre l'exercice pour $\vec{F}_2 = y\vec{\imath} + x^2y\vec{\jmath}$

Solution :

$\delta W = \vec{F}_1.\overrightarrow{dl}$ avec $\vec{F}_1 = (3x+y)\vec{\imath} + 2xy\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}$

$\Rightarrow \delta W = (3x+y)dx + 2xydy$

- *segment :*

$y = 0 \Rightarrow \quad dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W = 3xdx \quad \Rightarrow \quad W_{OH} = \int_0^1 3xdx = 1{,}5\,J$

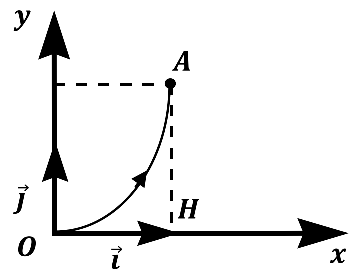
- *segment :*

$x = 1 \Rightarrow dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W = 2ydy \quad \Rightarrow \quad W_{HA} = \int_0^2 2ydy = 4\,J$

- *travail total :* $W = W_{OH} + W_{HA} = 5{,}5\,J$

b - L'arc de parabole $y = 2x^2$. $\Rightarrow \quad dy = 4xdx \quad \Rightarrow \quad \delta W = (3x + 2x^2 + 16x^4)dx$
$\Rightarrow \quad W = \int_0^1 (3x + 2x^2 + 16x^4)dx = 5{,}36\,J$

1ère Conclusion : le travail de la force $\vec{F}_1$ dépend du chemin suivi.



Cas où $\vec{F}_2 = y\vec{\imath} + x^2y\vec{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \delta W = y^2dx + x^2ydy$

- *segment :*

$y = 0 \Rightarrow \quad dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{OH} = 0$

- *segment : $x = 1 \Rightarrow dx = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{HA} = \int_0^2 ydy = 2\,J$*
- *travail total : $W = W_{OH} + W_{HA} = 2\,J$*

b - L'arc de parabole $y = 2x^2$. $\quad \Rightarrow \quad dy = 4xdx \quad \Rightarrow \quad \delta W = (2x^2 + 8x^5)dx$

$\Rightarrow \quad W = \int_0^1 (2x^2 + 8x^5)dx = 2\,J$

2ème conclusion : le travail de la force $\vec{F}_2$ ne dépend pas du chemin suivi. Le travail d'une telle force le long d'une courbe fermée est nul. Une force ayant cette propriété est dite conservative.
Une condition pour savoir si une force $\vec{F}$ est conservatrice, c'est à dire si elle dérive d'une énergie potentielle, est que le travail le long d'un chemin fermé (une boucle) est nul : $\oint \vec{F}\overrightarrow{dl} = \vec{0}$

② Un point matériel M, de masse m, se déplace, au cours du temps, dans le plan xOy avec la vitesse $\vec{V} = t^2\vec{\imath} + (2t - 3)\vec{\jmath}$

a - Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ de la force à laquelle il est soumis.
b - Déterminer à quel instant la force est perpendiculaire au déplacement.

Solution :

a - par définition $\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{V}$ *avec* $\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m(2t\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P} = 2m(t^3 + 2t - 3)$
b - *quand la force et la vitesse sont perpendiculaires, la puissance est nulle, $\mathcal{P} = 0$. Ce qui implique $t^3 + 2t - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t^2 + t + 3)(t - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$ seconde est l'unique solution.*

II - Énergie Cinétique - Théorème de l'énergie Cinétique

Considérons un point matériel $\boldsymbol{M}$, de masse $\boldsymbol{m}$, animé dans un référentiel $\boldsymbol{R}$, d'une vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}$.
Par définition, on appelle **énergie cinétique**, dans le référentiel $\boldsymbol{R}$, du point mobile $\boldsymbol{M}$, la quantité scalaire positive $\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}mV^2}$

C'est une fonction qui dépend essentiellement de la vitesse, donc du temps

D'après le principe fondamental de la dynamique, le mouvement dans le référentiel $\boldsymbol{R}$, du point matériel $\boldsymbol{M}$ satisfait à la relation vectorielle $\sum_i \vec{F}_{i,ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)$
d'où $\left(\sum_i \vec{F}_{i,ext}\right)\vec{V}dt = m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V}dt = m\vec{V}d\vec{V} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\delta W = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = dE_c}$
Après intégration on a : $\boldsymbol{W = \Delta E_c = E_c(t_f) - E_c(t_i)}$

D'où le **théorème de l'énergie cinétique** :

Le travail de la force qui s'exerce sur un point matériel entre deux instants $\boldsymbol{t_i}$ et $\boldsymbol{t_f}$, est égal à la variation de l'énergie cinétique du point matériel entre ces mêmes instants $\boldsymbol{t_i}$ et $\boldsymbol{t_f}$:

$$\boldsymbol{W = \Delta E_c = E_c(t_f) - E_c(t_i)}$$

Le théorème de l'énergie cinétique peut aussi s'énoncer de la façon suivante :

Le travail élémentaire de la force qui s'exerce sur un point matériel, est égal à la variation élémentaire de l'énergie cinétique du point matériel : $\boldsymbol{\delta W = dE_c}$

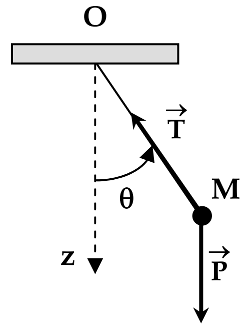
Ou encore (**théorème de la puissance cinétique**) :

La puissance de la force qui s'exerce sur un point matériel, est égale à la variation de l'énergie cinétique du point matériel par unité de temps : $\frac{\delta W}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$

Remarque :

le théorème de l'énergie cinétique est particulièrement adapté aux systèmes dont la position est définie par un seul paramètre, puisqu'il ne fournit qu'une seule équation scalaire.

APPLICATION :



Une masselotte M, de masse m, glisse sans frottement sur un guide circulaire de rayon vertical ℓ. On repère sa position par l'angle θ que fait $\overrightarrow{OM}$ avec la verticale ascendante (O étant l'origine du référentiel terrestre R supposé galiléen). Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ.

Solution :

$E_c = \frac{1}{2}mV^2$ or $\vec{V} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \; E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

$\vec{p} = m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \delta W(\vec{p}) = m\vec{g}\vec{V}dt = mgl\cos\theta\, dt \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(\vec{p}) = \vec{p}.\vec{V} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta$

La tension du fil $\vec{T}$ et $\vec{V}$ sont perpendiculaires $\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{T}) = 0$

Le théorème de l'énergie cinétique $\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\right) = -mgl\dot{\theta}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

III - ÉNERGIE POTENTIELLE

On va considérer le cas important, où le travail d'une force qui s'exerce sur le point matériel ne dépend ni de la façon dont le parcours est effectué au cours du temps ni du parcours suivi entre les positions initiale et finale fixées (c'est le cas de l'exemple du §I-2, application ①, force $\vec{F}_2$), c'est à dire le cas où la force qui s'exerce sur le point matériel est conservative.

III - 1 - gradient d'une fonction

Soit $\boldsymbol{f(x,y,z)}$ une fonction scalaire des coordonnées cartésiennes $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ et soient $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ les vecteurs unitaires des axes $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$, $\boldsymbol{Oz}$. On appelle gradient de la fonction $\boldsymbol{f(x,y,z)}$ le vecteur:

$$\overrightarrow{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\vec{k}$$

En coordonnées cylindriques, les composantes du gradient sont :

$$\overrightarrow{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z}\vec{u}_\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi}\vec{k}$$

En coordonnées sphériques, les composantes du gradient sont :

$$\overrightarrow{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}\vec{u}_\varphi$$

Remarque :

Dans le système des coordonnées cartésiennes, le vecteur déplacement élémentaire du point matériel $\boldsymbol{M}$ s'écrit : $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{dl} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz = df$

Cette propriété est indépendante du système de coordonnées.

APPLICATION :

Soit la fonction $U(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ où k est une constante et x, y et z sont les coordonnées cartésiennes d'un point M.

1 - Déterminer dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le vecteur $\overrightarrow{gradU}$

2 - Montrer que $\overrightarrow{grad}U = f(r)\vec{u}_r$ où r est le rayon vecteur, $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire de la base sphérique et $f(r)$ est une fonction de r à déterminer

3 - Exprimer U en coordonnées sphériques et vérifier que $f(r) = \frac{dU}{dr}$

4 - Démontrer que pour toute fonction $U = F(r)$, on a $\overrightarrow{grad}U = \frac{dF(r)}{dr}\vec{u}_r$ et vérifier que $\overrightarrow{grad}U.\overrightarrow{dl} = du$

Solution :

1 – Dans la base cartésienne : $\overrightarrow{grad}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{\imath} + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x,z}\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{x,y}\vec{k}$ *d'où :*

$$\overrightarrow{grad}U = -\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right)$$

2 - les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques (voir chapitre III, § II-1-c) sont :

$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi$ *et* $z = r\cos\theta$ *avec* $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{grad}U = -\frac{k}{r^2}\left(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right)$

or $\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{grad}U = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r = f(r)\vec{u}_r$ *avec* $f(r) = -\frac{k}{r^2}$

3 - En tenant compte des relations entre les coordonnées cartésiennes (x,y,z) et les coordonnées sphériques (r,θ,φ), la fonction U s'exprime en coordonnées sphériques par :

$U(r) = \frac{k}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dU}{dr} = -\frac{k}{r^2} = f(r)$

4 - En cordonnées sphériques le gradient de la fonction U s'exprime par :

$\overrightarrow{grad}U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)_{r,\varphi}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta}\vec{u}_\varphi$

si la fonction U ne dépend que de la variable r, $U = F(r)$, alors $\left(\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)_{r,\varphi} = \left(\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{grad}U = \frac{dU}{dr}\vec{u}_r = \frac{dF(r)}{dr}\vec{u}_r \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{grad}U.\vec{u}_r = dU$ *car* $\overrightarrow{dl} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

III - 2 - énergie potentielle

On dit que la force $\vec{F}$ (ou qu'un champ de forces $\vec{F}$) dérive d'une énergie potentielle s'il existe une fonction $\boldsymbol{E_p}$ telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$

La fonction $\boldsymbol{E_p}$ est appelée **l'énergie potentielle** de $\boldsymbol{M}$ associée à la force $\vec{F}$

En coordonnées cartésiennes où $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$, la relation précédente s'explicite comme suit :

$$F_x = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\right)_{y,z}, \qquad F_y = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial y}\right)_{x,z}, \qquad F_z = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial z}\right)_{x,y}$$

En coordonnées cylindriques où $\vec{F} = F_\rho\vec{u}_\rho + F_\varphi\vec{u}_\varphi + F_z\vec{k}$, on a :

$$F_\rho = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z}, \qquad F_\varphi = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial E_P}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z}, \qquad F_z = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi}$$

En coordonnées sphériques où $\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta + F_\varphi\vec{u}_\varphi$, on a :

$$F_r = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}, \qquad F_\theta = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}, \qquad F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial E_P}{\partial z}\right)_{r,\theta}$$

<u>Remarques</u> :

① D'après la remarque du § II-1, le travail élémentaire de la force conservative $\vec{F}$, qui dérive de l'énergie potentielle E_p, est : $\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -\overrightarrow{grad}E_p.\vec{dl} = -dE_p$

$\Rightarrow \delta W = -dE_p$ et $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$

Donc le travail d'une force conservatrice le long d'un trajet donné est égal à la diminution de l'énergie potentielle:

$$W = -\Delta E_p = E_{p_i} - E_{p_f}$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique on a :

$$dE_c = -dE_p$$

② l'énergie potentielle est toujours définie à une constante près. Le choix de son origine est arbitraire.

③ *<u>Exemples d'énergie potentielle</u>*

La relation $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$ est importante, elle permet de déterminer une force à partir de l'énergie potentielle dont elle dérive et inversement de déterminer l'énergie potentielle associée dont dérive une force conservative. La plupart des forces fondamentales dérivent d'une énergie potentielle.

➢ *<u>énergie potentielle Newtonienne</u>*

Considérons un point matériel M soumis, de la part d'un centre O, à la force ***Newtonienne*** de la forme : $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r$ où $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ et K une constante.

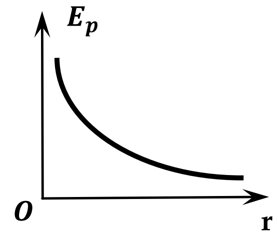
Le travail élémentaire de cette force s'exprime par :

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dr} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r\vec{dl} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r dr\vec{u}_r = \frac{K}{r^2}dr \quad \Rightarrow \quad \delta W = \frac{K}{r^2}dr = d\left(-\frac{K}{r} + Cte\right) = -dE_p$$

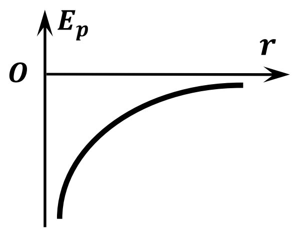
$$\Rightarrow \quad E_p = \frac{K}{r} + Cte$$

conventionnellement, on pose $E_p(r \to \infty) = 0$ à l'infini ce qui implique que la constante est nulle et $E_p = \frac{K}{r}$

Si $K > 0$, l'interaction est **répulsive**, c'est le cas d'une force entre deux charges électriques de mêmes signes (électron-électron ou proton-proton, la constante K vaut $K = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}$). Dans ce cas l'énergie potentielle a l'allure ci-dessous.



Si $K < 0$, l'interaction est **attractive**, c'est le cas d'une force entre deux charges électrique de signes opposés (électron-proton), ou aussi le cas de l'attraction gravitationnelle. L'énergie potentielle a l'allure ci-contre



➢ *énergie potentielle de pesanteur*

Considérons une particule de masse $\boldsymbol{m}$, placée en un point $\boldsymbol{M}$ de l'espace et elle est soumise au champ de pesanteur $\vec{g}$, donc au poids $\vec{p} = m\vec{g}$. Lors du déplacement du point matériel $\boldsymbol{M}$, le poids travaille et son travail élémentaire s'exprime par : $\delta W = m\vec{g}\,\overrightarrow{dl}$ avec $\overrightarrow{dl} = dz\,\vec{k}$ et si on a choisit l'axe $\boldsymbol{Oz}$, l'axe de la verticale descendante $\vec{p} = m\vec{g} = mg\vec{k}$

Donc : $\delta W = mgdz = d(mgz + Cte) = -dE_p \quad \Rightarrow \quad E_p = -mgz + Cte$

Si conventionnellement, E_p est nulle pour $z = 0$ (au niveau du sol) alors la constante est nulle et $E_p = -mgz$

Si on effectue le produit scalaire dans une base où l'axe $\boldsymbol{Oz}$ désigne la verticale ascendante, $\vec{g}$ a pour coordonnées $(0, 0, -g)$ et $\overrightarrow{dl}$ a pour composantes (dx, dy, dz), alors $E_p = mgz$ avec la convention $E_p = 0$ pour $z = 0$

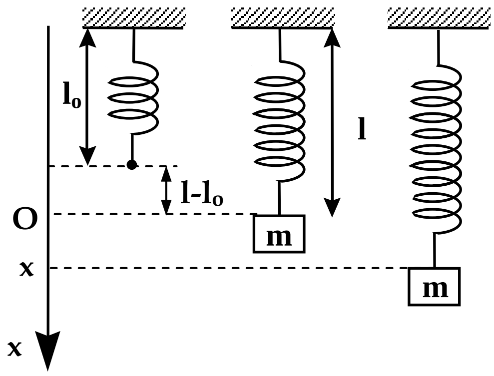
➢ *énergie potentielle élastique d'un ressort*

Soit un ressort de raideur $\boldsymbol{k}$, parfaitement élastique, de longueur à vide l_o et de masse négligeable, disposé suivant l'axe de la verticale descendante $\boldsymbol{Ox}$ d'un référentiel galiléen $\boldsymbol{R}$.

À l'équilibre, la condition $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} = \vec{0}$, indique que le ressort, qui maintenant a une longueur égale à **l**, exerce une force de rappel ayant pour valeur algébrique $T = -k(l - l_o) = -mg$

Notons que la position d'équilibre est prise au point **O** origine du repère.

Tirons l'extrémité libre du ressort (l'extrémité supérieure du ressort étant fixe au support) en l'allongeant d'une petite distance $\boldsymbol{a}$. Le ressort exerce alors une force de rappel dirigée suivant l'axe $\boldsymbol{Ox}$, ayant pour valeur algébrique : $T = -k(x + l - l_0)$



Le travail élémentaire de cette force est : $\delta W = -k(x + l - l_0)dx = -dEp$

$\Rightarrow \quad E_p = \frac{1}{2}k(x + l - l_o)^2 + C_1$ où C_1 est une constante.

Déterminons l'énergie potentielle associée à la force totale (le poids $m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$), subie par la masse $\boldsymbol{m}$, sachant que l'énergie potentielle de pesanteur vaut $(-mgx)$ en prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au point $\boldsymbol{O}$.

L'énergie potentielle totale étant la somme des énergies potentielles de pesanteur et élastique :

$$E_p = \frac{1}{2}k(x + l - l_o)^2 + C_1 - mgx$$

or $-k(l - l_o)x = -mgx$ (condition d'équilibre)

Il vient : $E_p = -k(l - l_o)x + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(l - l_o)^2 + k(l - l_o)x + C_1$

Si l'on convient que l'énergie potentielle est nulle lorsque le ressort est au repos $(x = 0)$ alors, $C_1 = -\frac{1}{2}k(l - l_o)^2 \quad \Rightarrow \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2$

APPLICATION :

Considérons la force conservative $\vec{F}$ qui, dans la base polaire ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$), s'exprime par $\vec{F} = \frac{k}{r^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r +$ $\sin\theta u\theta$ où (r,θ) sont les coordonnées polaires du point matériel M qui subit l'action de la force F et k une constante.

1 - Déterminer par deux méthodes, à une constante près, l'énergie potentielle associée à la force conservative $\vec{F}$

2 - Calculer le travail W effectué par cette force pour le déplacement le long de l'arc d'équation $r = \frac{p}{1+\cos\theta}$ où p est une constante, selon l'intervalle angulaire $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution :

1 - Première méthode : recherche de l'énergie potentielle à partir de l'expression $\delta W = -dE_p$:

$\delta W = \vec{F}\vec{dl} = -dE_p$ *avec* $\vec{dl} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$

$\delta W = 2\frac{k}{r^3}\cos\theta\,dr + \frac{k}{r^2}\sin\theta\,d\theta = d\left(-\frac{k}{r^2}\cos\theta + cte\right) = -dE_p \quad \Rightarrow \quad E_p = \frac{k}{r^2}\cos\theta + cte$

Deuxième méthode : recherche de l'énergie potentielle à partir de l'expression $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_r = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial r}\right)_{\theta,z} = 2\frac{k}{r^3}\cos\theta & \text{équation } (1) \\ F_\theta = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\right)_{r,z} = \frac{k}{r^3}\sin\theta & \text{équation } (2) \\ F_z = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial z}\right)_{r,\theta} = 0 & \text{équation } (3) \end{cases}$$

L'équation (3) montre que E_P ne dépend pas de la variable z.

L'équation (1) $\Rightarrow$ $E_p = \frac{k}{r^2}\cos\theta + f(\theta)$ avec $f(\theta)$ est une fonction de la variable θ

$\Rightarrow \left(\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\right)_{r,z} = -\frac{k}{r^2}\sin\theta + \frac{df(\theta)}{d\theta}$

or d'après l'équation (2), $\left(\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\right)_{r,z} = \frac{k}{r^2}\sin\theta \Rightarrow \frac{df(\theta)}{d\theta} = cte \quad \Rightarrow \quad E_p = \frac{k}{r^2}\cos\theta + cte$

2 - On a $\delta W = -dE_p \Rightarrow W = -\Delta Ep$

or d'après l'équation $r = \frac{p}{1+\cos\theta}$, quand $\theta = 0$, $r = \frac{p}{2}$ et quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = p$ $\quad \Rightarrow \quad W = 4\frac{k}{p^2}$

IV - ÉNERGIE MÉCANIQUE - CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

IV - 1 - définition

Considérons un point matériel mobile dans un référentiel $\boldsymbol{R}$. On appelle **énergie mécanique** dans le référentiel $\boldsymbol{R}$, et on note par $\boldsymbol{E_m}$, du point matériel $\boldsymbol{M}$, la somme de l'énergie cinétique $\boldsymbol{E_c}$ et de l'énergie potentielle $\boldsymbol{E_p}$: $\quad \boldsymbol{E_m = E_c + E_p}$

IV - 2 - théorème de l'énergie mécanique

Distinguons dans les forces qui s'exercent sur le point matériel $\boldsymbol{M}$ celles qui dérivent d'une énergie potentielle de celles qui n'en dérivent pas.

Soit $\boldsymbol{\delta W_{pot}}$ le travail élémentaire des forces qui dérivent d'une énergie potentielle.
Soit $\boldsymbol{\delta W_{non\,pot}}$ le travail élémentaire des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

Soient $\boldsymbol{dE_c}$, $\boldsymbol{dE_p}$ et $\boldsymbol{dE_m}$ les variations élémentaires correspondantes des énergies cinétique, potentielle et mécanique. Il vient, $\boldsymbol{dE_c = \delta W = \delta W_{pot} + \delta W_{non\,pot}}$ et $\boldsymbol{dE_p = -\delta W_{pot}}$

D'où : $\boldsymbol{dE_m = dE_c + dE_p = \delta W_{non\,pot}}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta W_{non\,pot}}{dt} = \mathcal{P}_{non\,pot}}$

Donc :

la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle : $\Delta \boldsymbol{E_m = W_{non\,pot}}$

ou encore :

la variation d'énergie mécanique par une unité de temps est égale à la puissance des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle : $\boldsymbol{\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{non\,pot}}$

IV - 3 - conservation de l'énergie mécanique

Dans le cas général, l'énergie mécanique ne se conserve pas puisque $\boldsymbol{\mathcal{P}_{non\,pot} \neq 0}$. Cependant, lorsque les seules forces qui travaillent sont celles qui dérivent d'une énergie potentielle, ou aussi lorsque la particule n'est soumise qu'à des forces conservatives, alors :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}_{non\,pot} = 0} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\frac{dE_m}{dt} = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E_m = E_c + E_p = constante}$$

L'énergie mécanique $\boldsymbol{E_m}$ est alors déterminée par les conditions initiales du mouvement. Donc, *lorsqu'un point matériel se déplace dans un champ de forces dérivant d'un potentiel, son énergie mécanique reste constante au cours du mouvement*.

Remarques :

① Lorsque l'énergie mécanique se conserve, l'énergie potentielle peut, au cours du mouvement, se transformer en énergie cinétique et inversement, mais de manière que la somme de ces deux formes d'énergie reste constante. Cette conservation de l'énergie mécanique donne une équation différentielle de premier ordre. Pour cette raison, on l'appelle parfois l'intégrale première de l'énergie.

② La loi de conservation de l'énergie mécanique est très utile pour résoudre les problèmes de mécanique car elle fournit une relation avec des dérivées premières par rapport au temps, alors que la R.F.D contient des dérivées secondes.

③ Nous venons de démontrer la conservation de l'énergie mécanique pour un point matériel soumis seulement à des forces dérivant d'un potentiel. Dans le cas le plus général, l'énergie mécanique ne se conserve pas puisque $\boldsymbol{\mathcal{P}_{non\,pot} \neq 0}$. La thermodynamique postule précisément dans son premier principe que seule l'énergie totale, somme de l'énergie mécanique, de l'énergie électromagnétique et d'une nouvelle énergie, appelée l'énergie interne, est une grandeur conservative (voir cours thermodynamique).

V - ÉQUILIBRE ET STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE

V - 1 - équilibre

Considérons un point matériel $\boldsymbol{M}$ auquel est exercée la résultante des forces $\boldsymbol{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i}$

Supposons que la force $\boldsymbol{\vec{F}}$ dérive de l'énergie potentielle $\boldsymbol{E_p}$.

Si un point $\boldsymbol{M_e}$ de coordonnées $\boldsymbol{x_e}$, $\boldsymbol{y_e}$, $\boldsymbol{z_e}$ est une position d'équilibre dans l'espace, alors on a en ce point

$$\boldsymbol{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = \vec{0}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\right)_{x_e} = \left(\frac{\partial E_P}{\partial y}\right)_{y_e} = \left(\frac{\partial E_P}{\partial z}\right)_{z_e} = 0}$$

Donc, tout point en lequel $\boldsymbol{\overrightarrow{grad}E_p = \vec{0}}$ est une position d'équilibre.

V - 2 - stabilité de l'équilibre

Considérons le cas particulier, simple, où la particule est assujettie à se déplacer le long de l'axe $\boldsymbol{Ox}$ d'un référentiel $\boldsymbol{R}(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Supposons que ce point matériel est soumis à la résultante des forces $\vec{F} = F\vec{\imath}$ qui dérive de l'énergie potentielle E_P, donc $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\frac{dE_p}{dx}\vec{\imath}$

d'après le paragraphe précédent, si x_e est une position d'équilibre, alors en ce point on a : $\left(\frac{dE_P}{dx}\right)_{x_e} = \mathbf{0}$

c'est à dire, qu'en un point d'équilibre, l'énergie potentielle présente un extremum (un maximum ou un minimum de l'énergie potentielle).

D'après le § VII - 2 du chapitre III, un équilibre est dit stable si, lorsque le point est légèrement écarté de sa position d'équilibre il tend à y revenir. Il est instable dans le cas contraire. Écartons alors le point matériel de sa position d'équilibre x_e (choisissons, pour simplifier, x_e confondu avec le point origine $\boldsymbol{O}$) d'une distance élémentaire dx. On distingue trois cas :

1[er] cas : *Équilibre stable :*

Le point matériel revient à sa position d'équilibre initial $\Rightarrow$ la force $\vec{F}$ est une force de rappel

si $dx > 0$ alors $F < 0$ $\Rightarrow$ $dE_P = -Fdx > 0$ $\Rightarrow$ $\frac{dE_p}{dx} > 0$

et si $dx < 0$ alors $F > 0$ $\Rightarrow$ $dE_P = -Fdx > 0$ $\Rightarrow \frac{dE_p}{dx} < 0$

d'où le tableau de variation de la fonction $E_P(x)$

x		x_e	
$\frac{dE_P}{dx}$	-	0	+
$E_P(x)$	$\searrow$	$E_P(x_e)$	$\nearrow$

Pour un équilibre stable l'énergie potentielle présente un **minimum**. En outre $\frac{dE_p}{dx}$ est une fonction croissante autour de x_e. En effet on a toujours $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$

2[ème] cas : *Équilibre instable :*

Le point matériel s'éloigne de sa position d'équilibre $\Rightarrow$ F et dx ont les mêmes signes $\Rightarrow$

si $dx > 0$ alors $F > 0 \Rightarrow dE_P = -Fdx < 0$ $\Rightarrow \frac{dE_p}{dx} < 0$

et si $dx < 0$ alors $F < 0$ $\Rightarrow dE_P = -Fdx < 0$ $\Rightarrow \frac{dE_p}{dx} > 0$

d'où le tableau de variation de la fonction $E_P(x)$

x		x_e	
$\frac{dE_P}{dx}$	+	0	-
$E_P(x)$	$\nearrow$	$E_P(x_e)$	$\searrow$

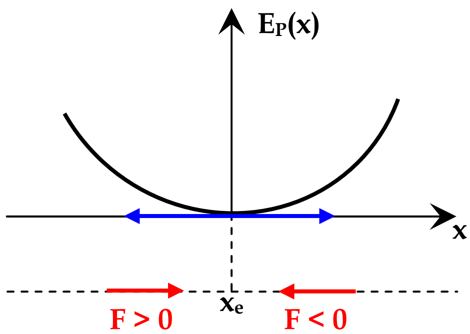
Pour un équilibre instable l'énergie potentielle présente un **maximum.** En outre $\frac{dE_p}{dx}$ est une fonction décroissante autour de x_e. En effet on a toujours $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$

3[ème] cas : *Équilibre indifférent :* dans ce cas $F = \mathbf{0}$ $\forall x$ $\Rightarrow$ $\frac{dE_p}{dx} = -F = \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ $E_p = constante$ quelle que soit la valeur de x.

En résumé :

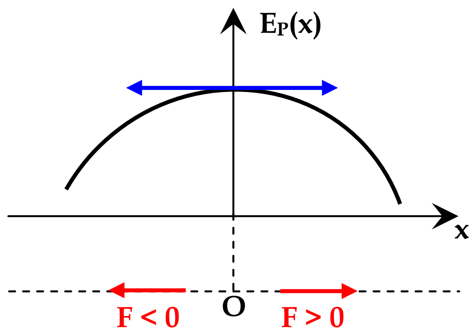
- pour un équilibre stable :

$$\left|\begin{array}{l}\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0 \\ E_P(x) \quad est\ un\ minimum\end{array}\right.$$



• pour un équilibre instable :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d^2E_p}{dx^2} < 0 \\ E_P(x) \quad \boldsymbol{est\ un\ maximum} \end{array} \right.$$

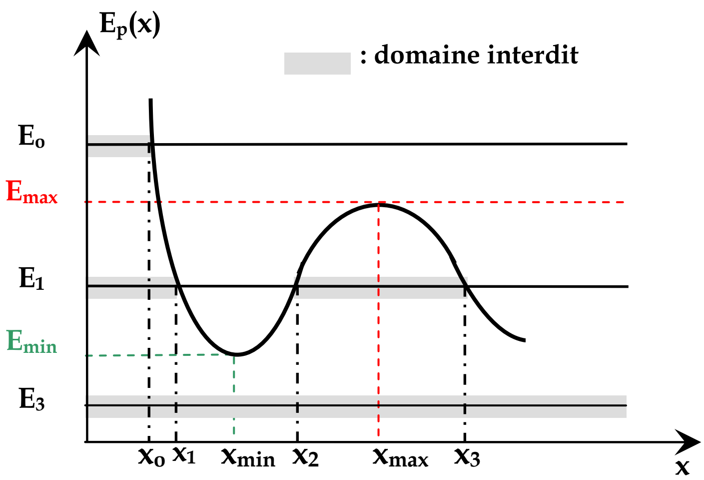


• pour un équilibre indifférent $E_p(x) = constante \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0$ quelque soit x

V - 3 - discussion qualitative d'un mouvement d'un point à un degré de liberté

La résolution des problèmes de mécanique à un degré de liberté, à partir de la conservation de l'énergie mécanique, est fondamentalement très enrichissante. Comme $E_m = E_c + E_p$, les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels $E_c = E_m - E_p \geq 0$. On représente alors graphiquement E_p en fonction du seul degré de liberté, par exemple x, et les mouvements possibles sont ceux qui réalisent $E_m \geq E_p$

Supposons qu'un point matériel de masse m soit assujetti à se déplacer sur l'axe Ox par exemple, d'un référentiel galiléen, dans un champ de forces conservatif, d'énergie potentielle $E_p(x)$ qui a l'allure donnée dans la figure ci-dessous :



Envisageons différents cas possibles selon la valeur de l'énergie mécanique E_m.

<u>1^er^ cas</u> : $E_m = E_0$

Les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels $x \geq x_0$
x_0 étant défini par $E_m = E_p(x_0) = E_0$

<u>2ème cas</u> : $E_m = E_1$

Les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels $x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, +\infty[$
x_1, x_2 et x_3 étant définis par $E_m = E_p(x_1) = E_p(x_2) = E_p(x_3) = E_1$

<u>3ème cas</u> : $E_m = E_3$

On a toujours $E_m \leq E_p$, ce qui est impossible.

4ème cas : $\boldsymbol{E_m = E_{max}}$, pour $\boldsymbol{x = x_{max}}$

Le point matériel est en position d'équilibre. Cet équilibre est instable puisqu'il s'agit d'un maximum d'énergie potentielle.

5ème cas : $\boldsymbol{E_m = E_{min}}$, pour $\boldsymbol{x = x_{mmin}}$

Le point matériel est en position d'équilibre. Cet équilibre est stable puisqu'il s'agit d'un minimum d'énergie potentielle.

Chapitre IV

L'OSCILLATEUR HARMONIQUE ET AMORTI PAR FROTTEMENT FLUIDE

De nombreux problèmes de mécanique, lorsqu'on se limite aux petits mouvements d'un point matériel autour d'une position d'équilibre stable, se ramènent à celui d'un oscillateur. Ceci ne se limite d'ailleurs pas à la mécanique. En effet, les mouvements vibratoires sont communément présents dans la nature, citons les oscillations d'un circuit électrique et les vibrations des atomes dans un cristal.

I - L'OSCILLATEUR IDÉAL : OSCILLATEUR LIBRE OU NON AMORTI

I - 1 - définition d'un oscillateur unidimensionnel non amorti

On appelle **oscillateur harmonique à une dimension** (oscillateur linéaire), tout système dont le mouvement est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \omega_0^2 X(t) = 0$$

où $X(t)$ est la grandeur oscillante, $\frac{d^2X(t)}{dt^2}$ sa dérivée seconde par rapport au temps et ω_0 la pulsation propre des oscillations.

I - 2 - étude de l'oscillateur unidimensionnel non amorti

Considérons dans le référentiel galiléen $R(O, xyz)$ de **B.O.N.D**$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, un point matériel M de masse m, soumis uniquement à une force de rappel, conservative, $\vec{F}$ et assujetti à ce déplacer sur l'axe horizontal Ox. On suppose que l'origine O du repère d'espace associé au référentiel R est une position d'équilibre stable. C'est l'exemple d'une masse m attachée à un ressort de raideur k où la force de rappel s'exprime par :

$$\vec{F} = -k\Delta l\,\vec{\imath} = -k(l - l_0)\vec{\imath} = -k(l_e + x - l_0)\vec{\imath}$$

avec l_0 la longueur à vide du ressort et l_e sa longueur à l'équilibre.

<u>I - 2 - a - approche énergétique</u>

La force de rappel $\vec{F}$ (linéaire à la déformation) est conservative, elle dérive donc d'une énergie potentielle E_p telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$

En coordonnées cartésiennes on a : $-kx = -dE_p \quad \Rightarrow \quad E_p(x) = \frac{1}{2}k\,x^2 + constante$

S

Si par convention on considère qu'à l'équilibre ($x = 0$) l'énergie potentielle élastique est nulle, alors la constante est nulle et $E_p(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$

Dans ces conditions l'énergie mécanique s'écrit : $E_m = \frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2$

Le théorème de l'énergie mécanique implique : $\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Remarque :

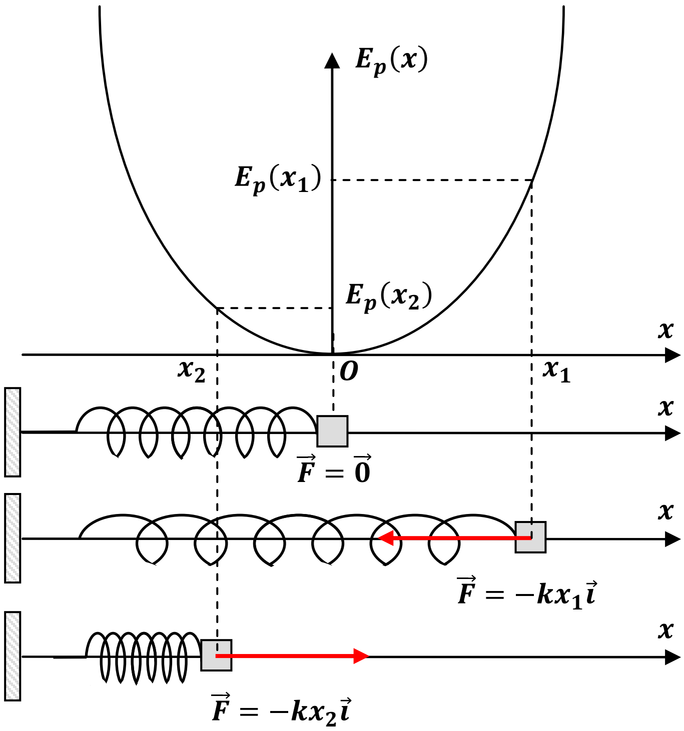
Écrivons le développement limité de $\boldsymbol{E_p(x)}$ autour de la position d'équilibre $\boldsymbol{x = 0}$ en se limitant à l'ordre deux : $\boldsymbol{E_p(x) = E_p(0) + x\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=0} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=0}} + \cdots$

$\boldsymbol{E_p(0)}$ est la valeur de l'énergie potentielle à l'origine.

Par convention on peut prendre $\boldsymbol{E_p(0)}$ et rappelons que par hypothèse $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=0} = \boldsymbol{0}$ ($x = 0$ est une position d'équilibre) et $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=0} = \boldsymbol{k} > 0$ (équilibre stable).

Donc $\boldsymbol{E_p(x) = \frac{1}{2}k\,x^2}$

L'oscillateur harmonique évolue dans un puits de potentiel de type parabolique (voir figure ci-dessous). Il est ainsi pour de nombreux systèmes mécaniques, électriques, acoustiques, thermodynamiques, etc.



Plus généralement, si $\boldsymbol{x_0}$ est une position d'équilibre stable, alors l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique à une dimension s'écrit : $\boldsymbol{E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}k\,(x - x_0)^2}$

Pour une valeur déterminée de l'énergie mécanique $\boldsymbol{E_m}$, le point matériel $\boldsymbol{M}$ oscille entre les deux positions symétriques $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$ (pour lesquelles $\boldsymbol{E_m = E_p}$) et on a :

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_0} = \boldsymbol{0} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} = \boldsymbol{k} > 0$$

I - 2 - b - approche dynamique

Appliquons, dans le référentiel galiléen $\boldsymbol{R}$, au point matériel $\boldsymbol{M}$ la relation fondamentale de la dynamique : $\boldsymbol{\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}}$

or dans l'exemple étudié $\boldsymbol{m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}}$ et la force $\boldsymbol{\vec{F}}$ est une force de rappel, elle s'écrit $\boldsymbol{\vec{F} = -kx\,\vec{i}}$

Soit par projection sur l'axe $(\boldsymbol{Ox})$:

$$\boldsymbol{m\ddot{x} = -kx} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0} \qquad \text{avec } \boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

I - 2 - c - équation du mouvement

L'équation différentielle du mouvement est : $\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$
La solution générale de cette équation différentielle est de la forme : $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

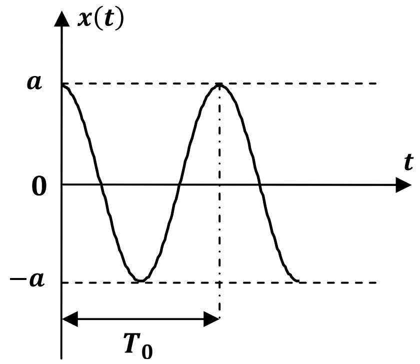
avec :

$x_m > 0$ est l'***amplitud***e du mouvement (amplitude des oscillation).
φ la ***phase initiale***.
ω_0 est appelée ***pulsation propre*** du mouvement.
x_m et φ sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales.

Le mouvement de l'oscillateur harmonique est périodique de ***période propre*** T_0 donnée par $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ donc de ***fréquence propre*** $T_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Si, par exemple, à l'instant initial $t = 0$ on a $x = a$ et $\dot{x} = 0$, alors $a = x_m \cos\varphi$ et $0 = x_m \sin\varphi$

$\Rightarrow \quad \sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad x_m = a \quad \Rightarrow \quad x = a\cos(\omega_0 t)$



<u>Remarques</u> :

① La période T_0 est indépendante de l'amplitude x_m. On dit qu'il y a ***isochronisme*** des oscillations.

② Pour une constante de rappel k donnée, la période est une fonction croissante de la masse m, ce qui est conforme à la notion de masse inerte.

③ On peut, aussi, écrire la solution générale de l'équation différentielle du mouvement sous la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

où A et B (comme x_m et φ) sont des constantes déterminées par les conditions initiales.
Si, par exemple, à l'instant initial $t = 0$ on a $x = x_0$ et $\dot{x} = V_0$ alors $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

I - 2 - d - aspect énergétique

L'énergie potentielle correspondant à la force de rappel est $E_p(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$, en choisissant l'origine des énergies à la position d'équilibre $x = 0$
Puisque $x = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$, alors :

l'énergie potentielle est : $E_p(x) = \frac{1}{2}k\,x_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

l'énergie cinétique est : $E_c = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\,x_m^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}k\,x_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

D'où $\boldsymbol{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} k\, x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k\, x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} k\, x_m^2}$

donc :

$$\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2} k\, x_m^2 = constante}$$

On retrouve bien sûr que l'énergie mécanique est une constante de mouvement et sa valeur est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.

La relation $\boldsymbol{E_m = E_c + E_p = constante}$ montre qu'au cours du mouvement il y a échange continuel entre énergie potentielle et énergie cinétique.

Calculons maintenant la valeur moyenne sur une période de l'énergie potentielle $\boldsymbol{E_p}$, celle de l'énergie cinétique $\boldsymbol{E_c}$ et celle de l'énergie mécanique $\boldsymbol{E_m}$:

$$< \boldsymbol{E_c} >= \frac{1}{\boldsymbol{T_0}} \int_0^{\boldsymbol{T_0}} \boldsymbol{E_c\, dt} = \boldsymbol{\frac{1}{2} \frac{m\omega_0^2\, x_m^2}{T_0}} \int_0^{\boldsymbol{T_0}} \sin^2(\boldsymbol{\omega_0 t + \varphi})\ \boldsymbol{dt}$$

$$< \boldsymbol{E_c} >= \frac{1}{2} \frac{k\, x_m^2}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{1-\cos[2(\omega_0 t+\varphi)]}{2}\ \boldsymbol{dt} = \frac{1}{4} \boldsymbol{k\, x_m^2} \qquad \Rightarrow$$

$$< \boldsymbol{E_c} >= \boldsymbol{\frac{1}{4} k\, x_m^2}$$

De la même manière on montre que : $< \boldsymbol{E_p} >= \frac{1}{4} \boldsymbol{k\, x_m^2}$

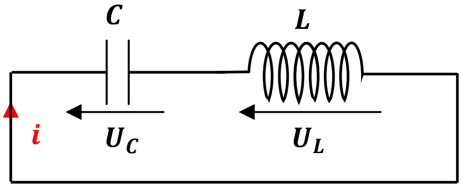
Donc : $< \boldsymbol{E_m} >=< \boldsymbol{E_c} > +< \boldsymbol{E_p} >= \frac{1}{2} \boldsymbol{k\, x_m^2}$

C'est à dire que : $< \boldsymbol{E_c} >=< \boldsymbol{E_p} >= \frac{<E_m>}{2} = \frac{1}{4} \boldsymbol{k\, x_m^2}$

L'égalité de l'énergie cinétique moyenne et de l'énergie potentielle moyenne est une propriété spéciale de l'oscillateur harmonique. On montrera plus loin qu'elle s'applique pour les oscillateurs faiblement amortis.

I - 2 - e - analogie électrocinétique

Considérons un circuit électrique fermé, constitué d'une capacité $\boldsymbol{C}$ portant la charge $\boldsymbol{q}$ se déchargeant dans une bobine d'inductance $\boldsymbol{L}$ et de résistance interne négligeable Si le conducteur est initialement chargé, on constate qu'il se décharge de façon oscillante : la charge $\boldsymbol{q}$ de la capacité varie au cours du temps suivant une loi sinusoïdale. L'inductance $\boldsymbol{L}$ joue le rôle analogue à celui d'une masse $\boldsymbol{m}$, l'inverse de la capacité $\boldsymbol{C}$ à celui d'un ressort de raideur $\boldsymbol{k}$ et la charge $\boldsymbol{q}$ correspond à l'élongation $\boldsymbol{x}$. De même l'énergie magnétique $\frac{1}{2}\boldsymbol{Li^2}$ correspond à l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\boldsymbol{mV^2}$ et l'énergie électrostatique $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ à l'énergie potentielle $\frac{1}{2}\boldsymbol{k\, x^2}$



La loi des mailles appliquée au circuit précédent en régime quasi-stationnaire donne :

$\boldsymbol{L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0}$ avec $\boldsymbol{i = \frac{dq}{dt}}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\ddot{q} + \omega_0^2\, q = 0}$

avec $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$ pulsation propre du circuit électrique.

Ce système électrique est donc dynamiquement équivalent à l'oscillateur non amorti. D'où le tableau de correspondance suivant :

Grandeur		Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique
Grandeurs caractéristiques	*coefficient d'inertie*	masse $\boldsymbol{m}$	inductance $\boldsymbol{L}$
	coefficient de rappel	raideur $\boldsymbol{k}$	inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
Grandeurs oscillantes		élongation **x**	charge $\boldsymbol{q}$
		vitesse $V = \frac{dx}{dt}$	intensité $i = \frac{dq}{dt}$
équation différentielle		$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$	$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$
équation horaire		$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$	$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$
pulsation propre ω_0		$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Période T_0		$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

II - OSCILLATEUR AMORTI PAR FROTTEMENT VISQUEUX

Dans la réalité, la conservation de l'énergie mécanique n'est jamais parfaitement observée. En pratique, on observe une dissipation de l'énergie qui résulte de la présence des forces de frottement qui ne sont pas conservatives (force de frottement visqueux ou force de frottement solide).
En présence des forces de frottement de type visqueux, le point matériel est soumis en plus à la force de frottement $\vec{f} = -\alpha\, \vec{V}$ où α est le coefficient de frottement visqueux ($\alpha > 0$).

II - 1 - équation différentielle du mouvement

II - 1 - a - approche énergétique

L'énergie mécanique s'écrit : $E_m = \frac{1}{2} m V^2 + E_p = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k\, x^2$

le théorème de l'énergie mécanique implique : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f}.\vec{V} = -\alpha \dot{x}^2$

$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = -\frac{\alpha}{m} \dot{x}$

posons $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$

Le paramètre λ est appelé ***coefficient d'amortissement*** $\quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$

II - 1 - b - approche dynamique

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel M, dans le référentiel galiléen R, s'écrit après projection sur l'axe Ox :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$$

avec $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

II - 2 - nature du mouvement

Le mouvement de l'oscillateur est déterminé par une équation différentielle du second ordre sans second membre, à coefficients constants.
L'équation caractéristique de cette équation différentielle est : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$
son discriminant réduit est $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$

II - 2 - a - cas d'un faible amortissement ($\lambda < \omega_0$) : régime pseudopériodique

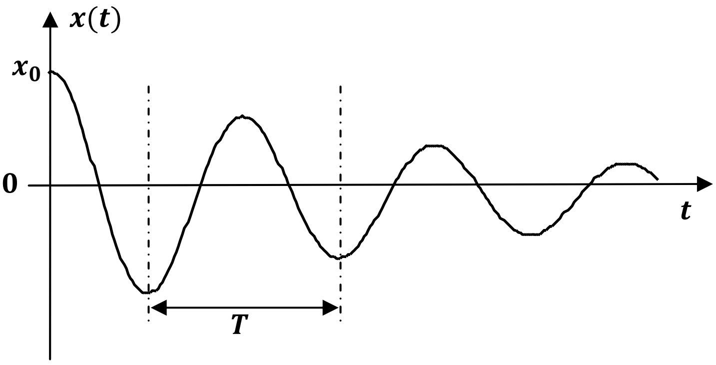
Dans ce cas $\Delta' < 0$ et le discriminant peut s'écrire sous la forme : $\Delta' = \left[i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right]^2 = (i\omega)^2$

avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ appelée ***pseudo-pulsation*** et i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$

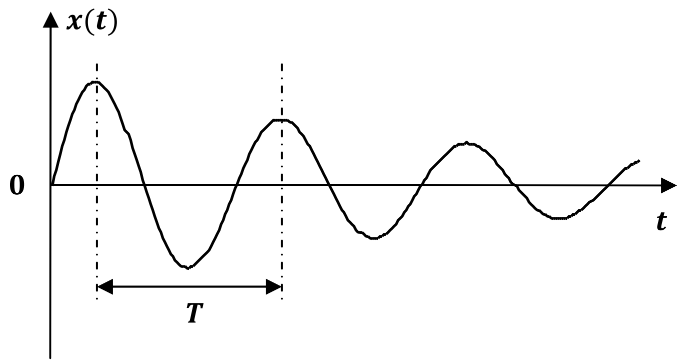
L'équation caractéristique admet alors deux racines complexes : $r_{1,2} = -\lambda \pm i\,\omega$
La solution s'écrit :
$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ ou simplement $x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$

Les paramètres A (**amplitude**) et φ (**phase**) sont déterminés par les conditions initiales.

- Si, par exemple, à l'instant initial $t = 0$ on a $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$ alors : $x(t) = x_0\, e^{-\lambda t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)$



- Si, par exemple, à l'instant initial $t = 0$ on a $x = 0$ et $\dot{x} = V_0$ alors : $x(t) = \frac{V_0}{\omega}\, e^{-\lambda t}\, \sin(\omega t)$



On obtient donc une solution sinusoïdale dont l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps et tend vers zéro.
Ce mouvement est appelé ***pseudopériodique*** de pseudo-période T telle que :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}}$$

Remarques :

① *cas d'un amortissement très faible :*

Dans le cas d'un amortissement très faible, c'est à dire, $\lambda \ll \omega_0$ on a :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2} \approx \omega_0\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2\right) \approx \omega_0 \qquad \text{et} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$$

② *La durée de relaxation :*

L'équation aux dimensions du coefficient d'amortissement λ est T^{-1}. Le coefficient $\tau = \frac{1}{\lambda}$ qui a les dimensions d'un temps est appelé la ***durée de relaxation en amplitude***. La durée de relaxation caractérise la durée de vie des oscillations amorties (l'amplitude devient nulle après quelques valeurs de τ).

③ *Le décrément logarithmique :*

On caractérise la décroissance de l'oscillateur amorti par le décrément logarithmique δ tel que :

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left[\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right]$$

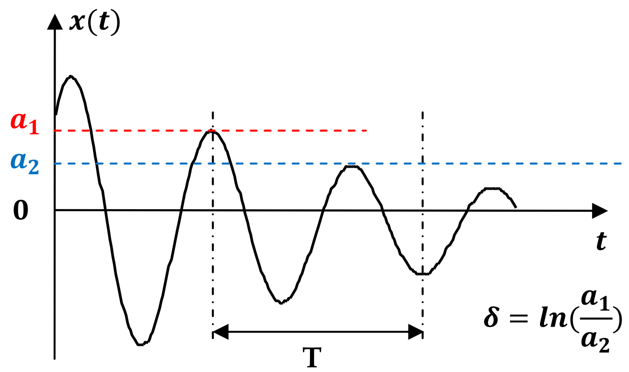
$x(t)$ et $x(t+nT)$ étant les élongations à des instants séparés par un nombre entier de périodes.

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi) \qquad \text{et} \qquad x(t+nT) = Ae^{-\lambda(t+nT)}\cos(\omega t + n\omega T+\varphi) = e^{-\lambda nT}x(t)$$

$$\Rightarrow \qquad \ln\left[\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right] = \ln\left(e^{\lambda nT}\right) = \lambda nT \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \lambda T$$

Si l'amortissement est très faible ($\lambda \ll \omega_0$) alors $\delta \approx \lambda T_0$

La mesure expérimentale du décrément logarithmique et celle de la pseudo-période T permet d'accéder au coefficient d'amortissement λ (donc aussi au coefficient de frottement α)



④ *le facteur de qualité :*

La force de frottement induit une perte d'énergie mécanique. Pour caractériser cette dissipation, on définit un coefficient appelé ***facteur de qualité*** noté Q et il est défini par :

$$Q = 2\pi\frac{\text{Energie Mécanique de l'oscillateur}}{\text{Energie Mécanique perdue pendant une période}} = 2\pi\frac{E_m}{\Delta E_m}$$

L'énergie mécanique est : $E_m = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$

or $\dot{x}(t+nT) = e^{-\lambda T}\dot{x}(t)$ et $(t+T) = e^{-\lambda T}x(t)$

$\Rightarrow E_c(t+T) = e^{-2\lambda T}E_c(t)$ et $E_p(t+T) = e^{-2\lambda T}E_p(t)$ $\Rightarrow$ $E_m(t+T) = e^{-2\lambda T}E_m(t)$

L'énergie $\boldsymbol{\Delta E_m}$ perdue pendant une pseudo-période $\boldsymbol{T}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{\Delta E_m = E_m(t) - E_m(t+T) = (1 - e^{-2\lambda T})E_m(t)}$$

dans le cas d'un amortissement très faible on a, $\boldsymbol{\lambda \ll \omega_0}$ et $\boldsymbol{T \approx T_0}$, c'est à dire $\boldsymbol{\lambda T_0 \ll 1}$

le développement limité de $\boldsymbol{e^{-2\lambda T_0}}$ quand $\boldsymbol{\lambda T_0}$ tend vers zéro est :

$\boldsymbol{e^{-2\lambda T_0} \approx 1 - 2\lambda T_0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{1 - e^{-2\lambda T_0} \approx 2\lambda T_0} \quad \Rightarrow$

$$\boldsymbol{Q = 2\pi \frac{E_m}{\Delta E_m} \approx \frac{\pi}{\lambda T_0} = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{m\omega_0}{\alpha}}$$

puisque $\boldsymbol{\delta = \lambda T}$, le facteur de qualité s'écrit aussi $\boldsymbol{Q = \frac{\pi}{\delta}}$

Tenant compte des relations établies dans les paragraphes précédents, on a :

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

et

$$\boldsymbol{T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

<u>II - 2 - b - cas d'un amortissement fort ($\lambda > \omega_0$) : régime apériodique</u>

Dans ce cas $\boldsymbol{\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2} > 0$ et l'équation caractéristique admet deux racines réelles négatives :

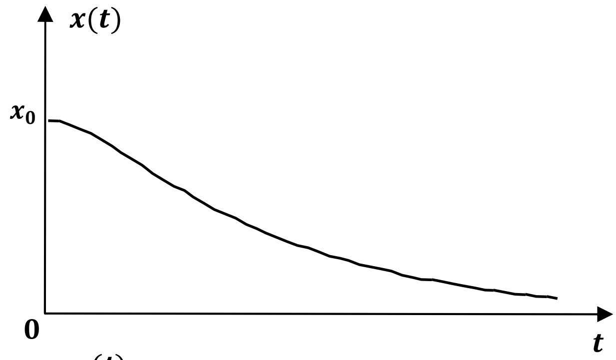
$$\boldsymbol{r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}$$

La solution s'écrit $\boldsymbol{x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}}$ ou simplement : $\boldsymbol{x(t) = e^{-\lambda t}\left(Ae^{\sqrt{\Delta'}\,t} + Be^{-\sqrt{\Delta'}\,t}\right)}$

Les constantes $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont déterminées à partir des conditions initiales.

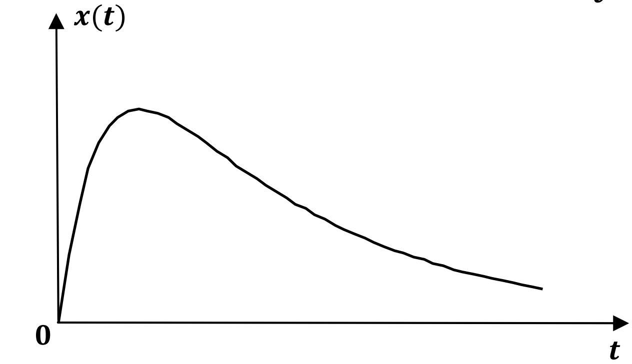
- Si, par exemple, à l'instant initial $\boldsymbol{t = 0}$ on a $\boldsymbol{x = x_0}$ et $\boldsymbol{\dot{x} = 0}$, alors :

$$\boldsymbol{x(t) = x_0\, e^{-\lambda t}\left(ch(\sigma t) + \frac{\lambda}{\sigma}\, sh(\sigma t)\right)}$$



avec $\quad \boldsymbol{\sigma = \lambda\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\lambda}\right)^2}}$

$\boldsymbol{ch(\sigma t) = \frac{e^{\sigma t} + e^{-\sigma t}}{2}} \qquad$ et $\qquad \boldsymbol{sh(\sigma t) = \frac{e^{\sigma t} - e^{-\sigma t}}{2}}$



- Si, par exemple, à l'instant initial $\boldsymbol{t = 0}$ on a $\boldsymbol{x = 0}$ et $\boldsymbol{\dot{x} = V_0}$ alors :

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{V_0}{\sigma}\; e^{-\lambda t}\, sh(\sigma t)}$$

avec $\quad \boldsymbol{\sigma = \lambda\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\lambda}\right)^2}}$

Ce mouvement est caractériser par un retour vers la position d'équilibre sans oscillations. Ce régime est dit ***apériodique***.

II - 2 - c - cas d'un amortissement critique ($\lambda = \omega_0$) : régime critique

Dans ce cas $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$ et l'équation caractéristique admet une racine réelle double :

$$r_1 = r_2 = -\lambda = -\omega_0$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit : $x(t) = (At + B)\, e^{-\lambda t}$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales.

- Si, par exemple, à l'instant initial **t = 0**, $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$, alors : $x(t) = x_0(\lambda t + 1)\, e^{-\lambda t}$ *(fig1)*

- Si, par exemple, à l'instant initial $t = 0$ on a $x = 0$ et $\dot{x} = V_0$ alors : $x(t) = V_0\, t\, e^{-\lambda t}$ *(fig2)*

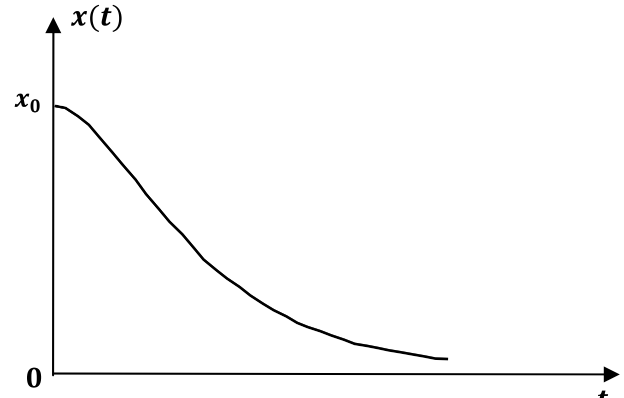


Figure1

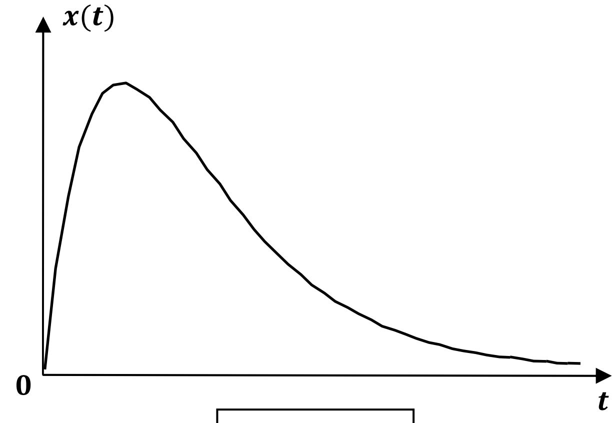
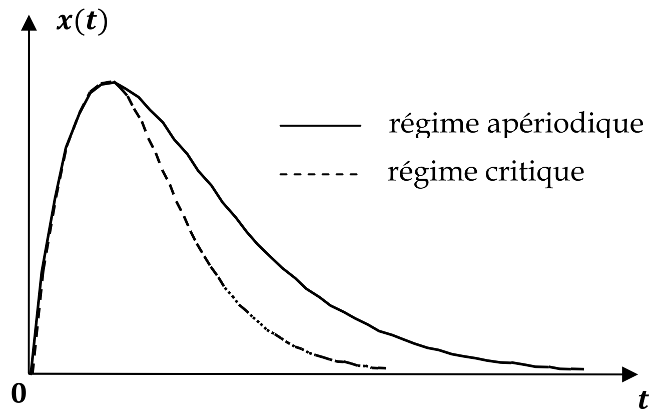


Figure2

Ce mouvement est aussi caractériser par un retour vers la position d'équilibre sans oscillations. Ce régime est dit **critique**.

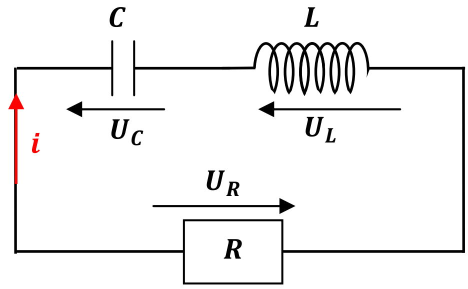
Ce retour à l'équilibre se fait plus rapidement que dans le cas du régime apériodique. Donc, contrairement à ce que l'on pouvait penser au départ, un amortissement très fort retarde le retour à l'équilibre.



En conclusion, plus l'amortissement est important, plus les oscillations sont amorties et plus leur pseudo-période est grande. En augmentant l'amortissement les oscillations sont de plus en plus amorties jusqu'à ce que le régime cesse d'être pseudopériodique. Le point matériel regagne sa position d'équilibre, sans effectuer aucune oscillation, au bout d'un temps d'autant plus long que l'amortissement est plus important (le régime critique est caractérisé par le retour le plus rapide à la position d'équilibre). Le régime critique est appelé ainsi parce qu'il n'est obtenu que pour un amortissement unique séparant le régime pseudo-périodique du régime apériodique.

II - 3 - analogie électromécanique

Le système électrique dynamiquement équivalent à l'oscillateur amorti est le circuit LC étudié dans le paragraphe auquel on rajoute une résistance R (circuit RLC). La résistance R joue le même rôle que le coefficient de frottement α.

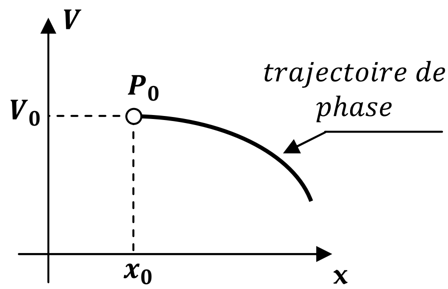


III - PLAN DE PHASE ET PORTRAIT DE PHASE

III - 1 - définition

Considérons, dans un référentiel $R(O, xyz)$ un oscillateur linéaire, dont l'état est déterminé par la connaissance de $x(t)$ et $V(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

On appelle **plan de phase**, le plan obtenu en portant x en abscisse (ou une grandeur proportionnelle à x) et la vitesse V (ou une grandeur proportionnelle à V) en ordonnées. Quand le temps s'écoule, un point P du plan de phase de coordonnées $(x(t), V(t))$ décrit une courbe appelée **trajectoire de phase** du système.



Toute trajectoire de phase commence en un point $P_0(x(0), V(0))$ représentant les conditions initiales.
L'ensemble des trajectoires de phases obtenues en considérant plusieurs conditions initiales possibles est appelé **portrait de phase**.
Rappelons que si $x(0)$ et $V(0)$ sont donnés alors la solution $x(t)$, de l'équation différentielle de mouvement, est unique.

III - 2 - propriétés des trajectoires de phase

① En vertu de l'unicité de la solution $x(t)$, les trajectoires de phase, d'un système libre, obtenues pour des différentes conditions initiales ne se coupent jamais (cette propriété n'est plus valable pour les systèmes forcés).

② Les positions d'équilibre correspondent à $V = 0$. Donc les positions d'équilibre sont situées sur l'axe Ox. Ces points sont appelés des **points singuliers** du système.

③ Si $V = \frac{dx}{dt} > 0$ alors $dx > 0$, donc x croit et si $V = \frac{dx}{dt} < 0$ alors $dx < 0$, donc x **décroît** $\Rightarrow$ le sens de parcours d'une trajectoire de phase est celui des aiguilles d'une montre.

④ Si le mouvement est périodique alors le système retrouve les mêmes conditions initiales (même point P_0 de l'espace des phases) et la trajectoire de phase est une courbe fermée.

⑤ La trajectoire de phase coupe l'axe Ox à angle droit sauf aux points singuliers

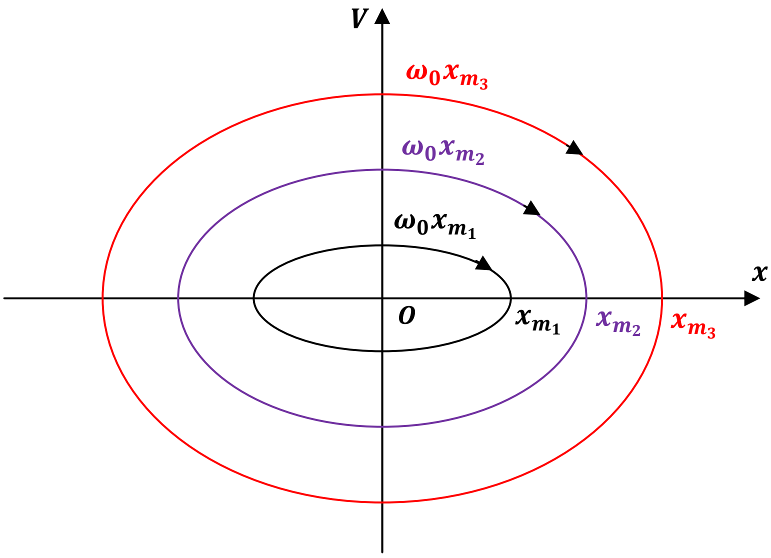
III - 3 - portrait de phase d'un oscillateur harmonique linéaire non amorti

Considérons l'oscillateur harmonique libre étudié dans le § I du présent chapitre. Les équations d'évolution de cet oscillateur sont :

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{et} \qquad V = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

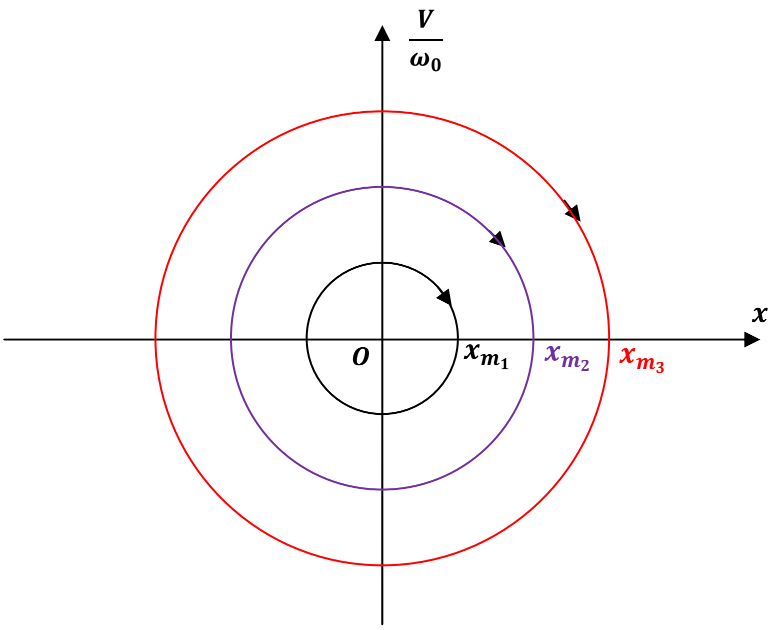
$\Rightarrow \quad \left(\frac{x}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{V}{x_m \omega_0}\right)^2 = \mathbf{1}$ c'est l'équation d'une ellipse.

Donc, le portrait de phase de l'oscillateur harmonique linéaire non amorti est constitué par un ensemble d'ellipses centrées en $\boldsymbol{O}$ et d'axes $\boldsymbol{Ox}$ et $\boldsymbol{OV}$ (voir figure ci-dessous).



Remarques :

① On trace souvent le portrait de phase de l'oscillateur harmonique dans le plan $\left(x, \frac{V}{\omega_0}\right)$ dont les coordonnées sont des grandeurs de mêmes dimensions. Dans ces conditions, la trajectoire de phase est un **cercle** de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon x_m (déterminée par les conditions initiales) :



② Pour l'oscillateur harmonique linéaire non amorti on a $\boldsymbol{E_m} = \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\, \boldsymbol{x_m^2}$ donc dans le plan $\left(x, \frac{V}{\omega_0}\right)$, les trajectoires de phase sont des cercles isoénergétiques (même valeur de l'énergie)

III - 4 - portrait de phase d'un oscillateur harmonique linéaire faiblement amorti

Considérons l'oscillateur harmonique faiblement amorti (régime pseudopériodique) étudié dans le §II du présent chapitre. Les équations d'évolution de cet oscillateur sont :

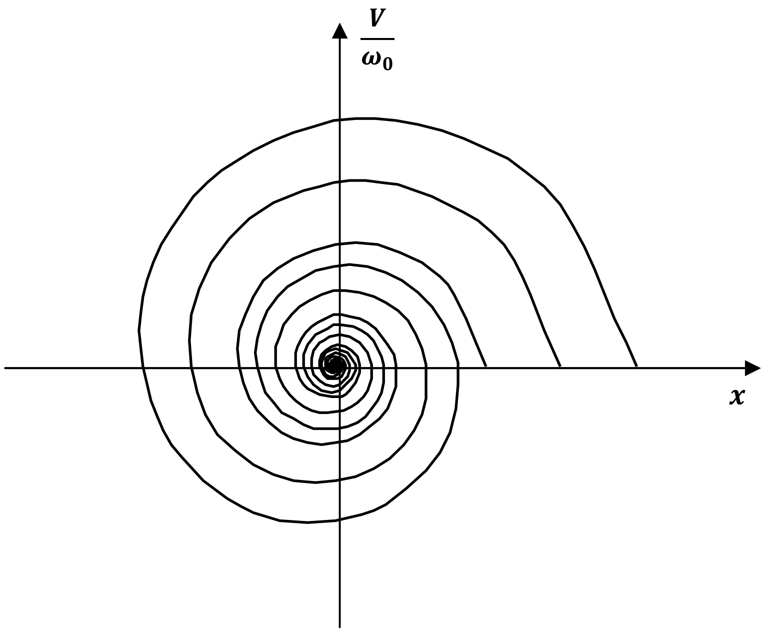
$$\boldsymbol{x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{V(t) = Ae^{-\lambda t}[-\lambda\cos(\omega t + \varphi) - \omega\sin(\omega t + \varphi)]}$$

et dans le cas d'un amortissement faible (§II - 2 - a), $\boldsymbol{\lambda \ll \omega_0}$ et $\boldsymbol{\omega \approx \omega_0}$, ces équations deviennent :

$\boldsymbol{x(t) \approx Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t + \varphi)}$ et $\boldsymbol{V(t) \approx -A\,e^{-\lambda t}\,\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)}$ $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{x^2 + \left(\frac{V}{\omega_0}\right)^2 = \left(A\,e^{-\lambda t}\right)^2}$$

donc, dans le plan $\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{\omega_0}}\right)$, le portrait de phase est formé par l'ensemble des ***spirales***. Le point $\boldsymbol{O}$ qui correspond à la position d'équilibre du système attire toutes les trajectoires de phase.



Chapitre V

OSCILLATEUR HARMONIQUE EN RÉGIME FORCÉ

I - L'Oscillateur Forcé

L'oscillateur livré à lui-même (oscillateur libre) se met à osciller grâce à l'énergie emmagasinée. Dans le chapitre précédent, on an a vu que la force de frottement induit un amortissement des oscillations qui s'annulent au bout d'un certain temps (quelques τ). Si l'on veut maintenir ces oscillations, il faut restituer régulièrement à l'oscillateur l'énergie dissipée par les forces de frottement (ou par effet Joule dans le cas du circuit RLC) : on dit qu'il faut entretenir ces oscillations. Pour cela on applique une force, dite **force excitatrice**, (ou **excitateur**) indépendante de l'élongation du système. L'oscillateur qui répond aux excitations est appelé, pour des raisons qui apparaîtront plus tard, résonateur et les oscillations entretenues par la force excitatrice sont dites **oscillations forcées**.
Cette étude est très intéressante car elle permet de traiter une grande variété de phénomènes de même type, mais de natures physiques très différentes. Il peut s'agir de systèmes mécaniques (un amortisseur de voiture par exemple) soumis à des contraintes extérieures, des atomes excités par des ondes lumineuses, ou encore certains réseaux électriques soumis à des excitations (circuits RLC par exemple).

À titre d'exemple d'oscillations forcées, on va considérer le cas d'une excitation sinusoïdale de type $\boldsymbol{F = F_0 \cos(\Omega t)}$ où $\boldsymbol{\Omega}$ est la pulsation de la force excitatrice et $\boldsymbol{F_0}$ une constante.

I - 1 - équation différentielle du mouvement

Considérons le cas de l'oscillateur amorti par frottement visqueux étudié dans le chapitre IV : c'est l'exemple d'une masse $\boldsymbol{m}$ attachée à un ressort de raideur $\boldsymbol{k}$ et soumis, en plus de la force de rappel $\vec{\boldsymbol{F}}$, à une force de frottement visqueux $\vec{\boldsymbol{f}} = -\boldsymbol{\alpha}\,\vec{\boldsymbol{V}}$ où $\boldsymbol{\alpha}$ est le coefficient de frottement visqueux ($\boldsymbol{\alpha} > 0$).

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}) + \mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{f}.\vec{V} + \vec{F}.\vec{V} = -\alpha\dot{x}^2 + \dot{x}F_0\cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2\, x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

avec $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (pulsation propre) et $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\alpha}{2m}$ (coefficient d'amortissement)

Cette équation différentielle est une équation de second ordre avec second membre dont la solution est la somme :

- de la ***solution générale*** de l'équation différentielle sans second membre, c'est à dire de l'équation $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2\, x$ (qui correspond à l'oscillateur amorti étudié dans le chapitre précédent). Après un certain temps plus ou moins court selon la force de frottement, cette solution tend vers zéro.

- d'une ***solution particulière*** de l'équation différentielle avec second membre. Cette solution particulière s'écrit : $\boldsymbol{x_m \cos(\Omega t + \varphi)}$

I - 2 - étude du mouvement

I - 2 - a - régime transitoire et régime permanent

Le régime transitoire correspond à la solution complète de l'équation différentielle (somme de la solution générale et de la solution particulière). Ce régime qui ne dure pas puisque après un temps (quelques τ) la solution générale s'annule, est dit **régime transitoire**.

Quand le régime transitoire s'est complètement évanoui (solution générale s'annule) il ne subsiste que la solution particulière est le régime est dit **permanent** (**oscillations forcées** ou **régime forcé**).
Les oscillations forcées (régime permanent) sont caractérisées par la solution :

$$x(t) = x_m \cos(\Omega t + \varphi)$$

où x_m est l'amplitude du régime forcé et φ le **déphasage** par rapport à l'excitation F

I - 2 - b - étude du régime permanent (détermination de x_m et φ)

Dans ce paragraphe on va utiliser deux approches pour déterminer l'amplitude du régime forcé x_m et le déphasage φ par rapport à l'excitation.

■ *méthode algébrique* :

Il s'agit de remplacer, dans l'équation différentielle de mouvement, $x(t)$ par $x(t) = x_m \cos(\Omega t + \varphi)$ et identifier les différents termes.

$$x(t) = x_m \cos(\Omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -x_m\,\Omega\,\sin(\Omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) = -x_m\,\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t) \quad \Leftrightarrow \quad x_m\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\cos(\Omega t + \varphi) - 2\lambda\Omega x_m \sin(\Omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

si $\Omega t = -\varphi$ alors $x_m\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) = \frac{F_0}{m}\cos(\varphi)$ équation (1)

si $\Omega t = -\varphi + \frac{\pi}{2}$ alors $-2\lambda\Omega x_m = \frac{F_0}{m}\sin(\varphi)$ équation (2)

la somme des carrées des deux équations précédentes donne :

$$x_m = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{4\lambda^2\Omega^2 + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2}} = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}$$

puis, $\frac{\text{équation (2)}}{\text{équation (1)}}$ $\Rightarrow$

$$tg(\varphi) = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = -\frac{\frac{\Omega}{Q\omega_0}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$$

■ *méthode des complexes :*

Pour cette méthode on associe à chaque grandeur algébrique y une fonction complexe $\overline{y}$ telle que $y = Re(\overline{y})$ c'est à dire dans notre problème, au déplacement sinusoïdal $x_m \cos(\Omega t + \varphi)$, on associe la fonction complexe

$\overline{x} = x_m e^{j(\Omega t+\varphi)}$ telle que $x = Re(\overline{x})$ puis à $F = F_0 \cos(\Omega t)$ on associe la fonction complexe $\overline{F} = F_0 e^{j\Omega t}$ telle que $F = Re(\overline{F})$ et à l'équation différentielle du mouvement $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2\, x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$ on associe l'équation différentielle complexe $\ddot{\overline{x}} + 2\lambda\dot{\overline{x}} + \omega_0^2\,\overline{x} = \frac{\overline{F}}{m}$

Le nombre j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$

$\overline{x} = x_m e^{j(\Omega t+\varphi)} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} = x_m e^{j\varphi} e^{j(\Omega t)} = \overline{x}_m e^{j(\Omega t)}$

avec $\overline{x}_m = x_m e^{j\varphi}$ qui est l'**amplitude complexe**.

Il est clair que : $x_m = |\overline{x}_m|$ et $\varphi = Arg(\overline{x}_m)$

maintenant si $\overline{x} = x_m e^{j(\Omega t+\varphi)}$ alors $\dot{\overline{x}} = j\Omega\overline{x}$ et $\ddot{\overline{x}} = -\Omega^2\overline{x}$

L'équation différentielle complexe du mouvement donne, après simplification par $e^{j(\Omega t)}$:

$$\overline{x}_m = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + j\, 2\lambda\Omega}$$

d'où :

$$x_m = |\overline{x}_m| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{4\lambda^2\Omega^2 + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2}} = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}$$

et

$$tg(\varphi) = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = -\frac{\frac{\Omega}{Q\omega_0}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$$

<u>I - 2 - c - réponse en amplitude</u>

On dit qu'il y a **résonance d'amplitude** si l'amplitude des oscillations forcées, x_m,prend une valeur maximale.

L'amplitude x_m prend une valeur maximale si le dénominateur de l'expression donnant x_m est minimal, c'est à dire si la fonction $y(\Omega) = \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2$ est minimale. Déterminons alors l'expression de $\Omega = \Omega_r$ pour laquelle $y(\Omega)$ est minimale (donc x_m est **maximal**).

$\frac{dy}{d\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega\left(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = 0$ ou $\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$

La deuxième solution ne donnera des valeurs réelles que si $\omega_0 > \sqrt{2}\,\lambda \quad \Leftrightarrow \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

- Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ on deux solutions possibles :

$\Omega = 0$ et $\Omega = \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \omega_0\sqrt{1 - 2\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

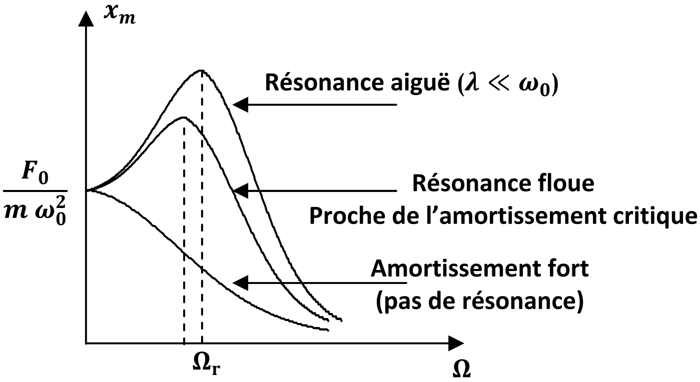
Les amplitudes sont :

$x_m(0) = \frac{F_0}{m\,\omega_0^2}$ pour $\Omega = 0$

et $\quad x_m(\Omega_r) = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} = \dfrac{\frac{F_0}{m}Q}{\omega_0^2\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ pour $\Omega = \Omega_r$ c'est la **résonance en amplitude**.

- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors il n'existe qu'une seule solution $\Omega = 0$ $\Rightarrow$ l'amplitude décroit avec la pulsation $\Rightarrow$ pas de résonance.

On remarque bien que l'amplitude tend vers zéro quand la pulsation de l'excitation devient trop grande. Pour un faible amortissement on observe une résonance d'amplitude qui se manifeste par un pic pour une valeur de Ω_r. Pour un amortissement très faible, la résonance d'amplitude a lieu en $\Omega_r \approx \omega_0$. Dans le cas général la résonance d'amplitude est obtenue pour $\Omega_r \neq \omega_0$. Pour les amortissements forts, cette résonance disparaît.
Le schéma ci-dessous donne la variation de x_m en fonction de la pulsation Ω de l'excitateur.



On définit la **bande passante** comme étant l'intervalle des fréquences pour lequel l'amplitude est égale à $\frac{x_m(\Omega_r)}{\sqrt{2}}$

$x_m(\Omega) = \frac{x_m(\Omega_r)}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{4\lambda^2\Omega^2+\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2}} = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{2\lambda\sqrt{2\left(\omega_0^2-\lambda^2\right)}}$

$\Rightarrow \quad \left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2 = 8\,\lambda^2\left(\omega_0^2-\lambda^2\right)$

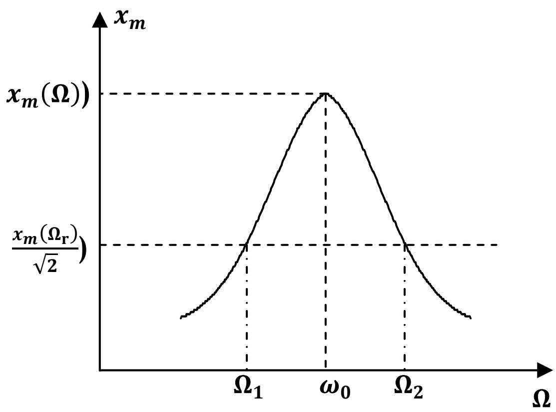
$\Rightarrow$

$\Omega_1 \approx \omega_0\left(1-\frac{1}{2Q}\right)$

et

$\Omega_2 \approx \omega_0\left(1+\frac{1}{2Q}\right)$

$\Rightarrow \quad \Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \approx \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda = \frac{\alpha}{m}$



<u>I - 2 - d - réponse en phase</u>

Rappelons que $\overline{x}_m = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)+j\,2\lambda\Omega}$

$sin\,\varphi = -\dfrac{2\lambda\Omega}{\sqrt{4\lambda^2\Omega^2+\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2}}$ et $cos\,\varphi = \dfrac{\omega_0^2-\Omega^2}{\sqrt{4\lambda^2\Omega^2+\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2}}$

$tg(\varphi) = -\dfrac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2} = -\dfrac{\frac{\Omega}{Q\omega_0}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$

On remarque que $\sin\varphi \le 0 \;\Rightarrow\; -\pi \le \varphi \le 0$, ceci signifie que la réponse x de l'oscillateur est en retard de phase par rapport au résonateur.

si $\Omega = \omega_0$ alors $\cos\varphi = 0$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$; si $\Omega \to 0$ alors $\varphi \to 0$ et si $\Omega \to +\infty$ alors $\varphi \to -\pi$

I - 2 - e - étude de la vitesse (résonance de vitesse)

$\bar{V} = \bar{\dot{x}} = j\Omega\bar{x} = \bar{V}_m e^{j\Omega t} = \frac{j\Omega\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j\,2\lambda\Omega}$ où $\bar{V}_m$ est l'amplitude complexe de la vitesse.

$$V_m = |\bar{V}| = \frac{\Omega\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

On dit qu'il y a **résonance de vitesse** si la vitesse prend une valeur maximale. Déterminons alors l'expression de Ω pour laquelle on a résonance de vitesse.

$\frac{dV}{d\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \Omega_r = \omega_0$

donc quel que soit l'amortissement, il y a résonance de vitesse pour :

$$\Omega = \Omega_r = \omega_0$$

et l'amplitude de la vitesse est $V_m = \frac{F_0\,Q}{m\omega_0}$

Maintenant le déphasage φ' entre la vitesse de l'oscillateur et la force excitatrice est donné par la relation :

$$\varphi' = Arg(\bar{V}) = Arg\left(j\Omega\frac{F_0}{m}\right) - Arg\left((\omega_0^2 - \Omega^2) + j\,2\lambda\Omega\right) \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

où φ est le déphasage entre l'amplitude de l'oscillateur et la force excitatrice

I - 2 - f - impédance mécanique

On appelle **impédance mécanique**, le rapport de l'amplitude complexe de la force excitatrice et de l'amplitude complexe de la vitesse :

$$\bar{Z} = \frac{\bar{F}}{\bar{V}_m} = \frac{F_0}{\bar{V}_m}$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{Z} = \frac{F_0}{j\Omega\frac{F_0}{m}}\left((\omega_0^2 - \Omega^2) + j\,2\lambda\Omega\right) = -j\frac{m}{\Omega}\left(\omega_0^2 - \Omega^2 + j\,2\lambda\Omega\right) = jm\left(\Omega - \frac{\omega_0^2}{\Omega}\right) + 2\lambda m$$

Posons $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ $\qquad \Rightarrow \qquad \bar{Z} = \alpha + j\Omega\left(m - \frac{k}{\Omega^2}\right)$

$$\Rightarrow \qquad Z = |\bar{Z}| = \sqrt{\alpha^2 + \Omega^2\left(m - \frac{k}{\Omega^2}\right)^2}$$

Remarque :

À la résonance $\Omega = \Omega_r = \omega_0$ et $Z = \alpha$

Pour le circuit électrique équivalent (circuit RLC) l'impédance électrique est $Z = |\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + \Omega^2\left(L - \frac{1}{C\Omega^2}\right)^2}$ et à la résonance $Z = R$.

Chapitre VI

LE MOMENT CINETIQUE

En mécanique classique, le théorème du moment cinétique est un résultat fondamental. Il se révèle très pratique dans l'étude des problèmes à deux corps et en mécanique du solide.

Le théorème du moment cinétique est notamment utilisé dans l'étude des mouvements dits à force centrale, car celles-ci ont une contribution nulle au moment cinétique pris en un point particulier, ce qui simplifie parfois grandement l'analyse. C'est ainsi qu'il est utilisé pour démontrer la seconde loi de Kepler décrivant les mouvements des planètes autour du Soleil.

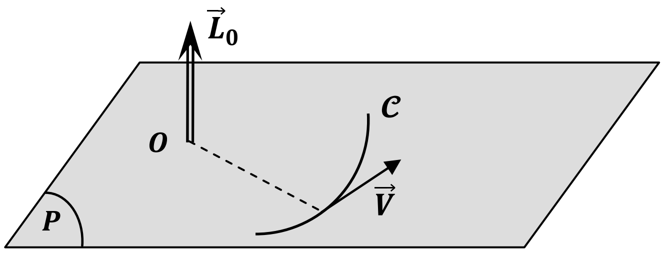
I - MOMENT CINÉTIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

I - 1 - moment cinétique par rapport à un point

Soit un point matériel $\boldsymbol{M}$, de masse $\boldsymbol{m}$, en mouvement avec une vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}$ dans un référentiel $\boldsymbol{R}$.
Soit $\boldsymbol{O}$ un point fixe de ce référentiel.
Le moment cinétique dans $\boldsymbol{R}$, $\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}}$ en $\boldsymbol{O}$, du point $\boldsymbol{M}$ est défini par le produit vectoriel de son vecteur position et sa quantité de mouvement :

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \vec{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}}$$

Dans le système international, le moment cinétique est exprimé en $\boldsymbol{kg.m^2s^{-1}}$.



Vecteur moment cinétique dans le cas d'une trajectoire plane

<u>Remarque</u> : moment cinétique en un point $\boldsymbol{O'}$ dans $\boldsymbol{R}$

Considérons un point $\boldsymbol{O'}$ dans $\boldsymbol{R}$. Le moment cinétique en ce point $\boldsymbol{O'}$ est :

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}} = \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} \wedge \vec{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{O'O}} \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}} = \overrightarrow{\boldsymbol{O'O}} \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}} + \vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}}$$

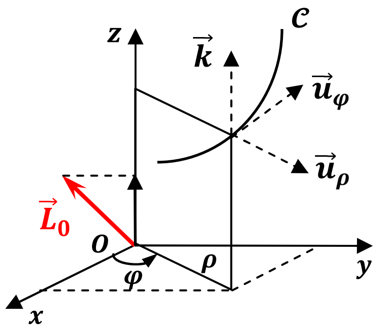
APPLICATION :

Considérons le référentiel fixe $R(O, xyz)$ muni de la BOND $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Exprimer le moment cinétique en O dans le système des coordonnées cylindriques du point M.
Étudier le cas particulier d'un mouvement qui s'effectue dans le plan xOy.

<u>Solution</u> :

$\vec{L}_O = m(\rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z) \wedge (\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{z}\vec{k}) = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k} + m(z\dot{\rho} - \rho\dot{z})\vec{u}_\varphi - m\rho z\dot{\varphi}\vec{u}_\rho$

Dans le cas d'un mouvement qui s'effectue dans le plan xOy, on a :
$z = 0$, *alors* $\vec{L}_O = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k}$ *et* $\|\vec{L}_O\| = m\rho^2\dot{\varphi}$



I - 2 - moment cinétique par rapport à un axe fixe Δ orienté

Considérons un axe Δ passant par le point $\boldsymbol{O}$ est orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ (vecteur directeur de l'axe Δ).
Par définition, le moment cinétique L_Δ par rapport à l'axe Δ, passant par le point $\boldsymbol{O}$ est le scalaire donné par :

$$L_\Delta = \vec{L}_O.\vec{u}_\Delta$$

<u>Remarque</u> :

Considérons un point O' dans R. Déterminons le moment cinétique L'_Δ par rapport à l'axe Δ en utilisant un autre point O' de l'axe Δ.

$$L'_\Delta = \vec{L}_{O'}.\vec{u}_\Delta = \left(\overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{V}\right).\vec{u}_\Delta + \vec{L}_O.\vec{u}_\Delta = \left(\overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{V}\right) + L_\Delta$$

or, le vecteur $\overrightarrow{O'O}$ est colinéaire à $\vec{u}_\Delta$ $\Rightarrow$ $\left(\overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{V}\right)$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}_\Delta$
$\Rightarrow$ $\left(\overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{V}\right).\vec{u}_\Delta = 0$ $\Rightarrow$ $L'_\Delta = L_\Delta$

II - THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

II - 1 - moment d'une force par rapport à un point

Lorsqu'on exerce une force sur un corps pouvant tourner (autour d'un axe ou d'un point), celui-ci a tendance à décrire une rotation. Pour mesurer la capacité qu'a la force d'imprimer un mouvement de rotation à un corps, on utilise une quantité appelée moment d'une force.

Par définition, le moment en un point $\boldsymbol{O}$ de la force $\vec{F}$ appliquée au point matériel $\boldsymbol{M}$ est :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$\vec{\mathcal{M}}_O$ s'exprime en $N.m$.

<u>Remarques</u> :

① *moment d'une force $\vec{F}$ en un point $O' \neq O$ de l'axe Δ :*

$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ $\Rightarrow$ $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$

② *Bras de levier*

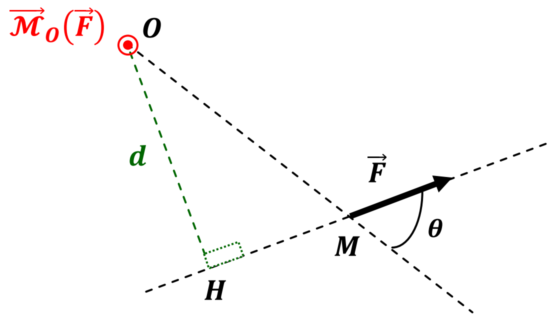
Le module du moment par rapport à par rapport à un point $\boldsymbol{O}$ d'une force $\vec{F}$ appliquée au point $\boldsymbol{M}$ est :

$$\left\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\right\| = \left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right\| = \left\|\vec{F}\right\| \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \sin\theta$$

$\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$

$d = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \sin\theta = OH$ est la distance du point O à la direction de la force. Cette distance est appelée **bras de levier.**

Si l'axe $(M, \vec{F})$ passe par O alors $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$



II - 2 - moment d'une force par rapport à un axe

Considérons un axe Δ orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ (vecteur directeur de l'axe Δ). Soit O un point de cet axe.

Par définition, le moment de la force $\vec{F}$ appliquée au point matériel M par rapport à l'axe Δ est le scalaire donné par :

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}).\vec{u}_\Delta$$

Cette définition est indépendante de O de l'axe Δ. En effet,

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}).\vec{u}_\Delta = \left(\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}\right).\vec{u}_\Delta = \left(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right).\vec{u}_\Delta = \underbrace{\left(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}\right)}_{\perp \text{ à } \vec{u}_\Delta}.\vec{u}_\Delta + \underbrace{\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right).\vec{u}_\Delta}_{\mathcal{M}_\Delta} = \mathcal{M}_\Delta$$

II - 3 - théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe O

Soit un point matériel M, de masse m, en mouvement avec une vitesse $\vec{V}$ dans un référentiel R. Soit O un point fixe de ce référentiel.
Ce point matériel M est soumis à la résultante des forces extérieures $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$

Dérivons le moment cinétique $\vec{L}_O$ par rapport au temps, relativement au référentiel R.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Puisque $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \wedge \vec{p} = \vec{V} \wedge m\vec{V} = \vec{0}$ et d'après la R.F.D $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ alors :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{a} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \vec{F}_{i,ext} = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{i,ext} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_{i,ext})$$

d'où le théorème du moment cinétique :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel, en un point fixe O, est égale à la somme des moments en O des forces qui s'exercent sur ce point : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_{i,ext})$

Remarques :

① *moment cinétique en un point O' mobile dans R :*

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge m\vec{V}\,(M)\right\}$$

$$= \frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt} \wedge m\,\vec{V}\,(M) + \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\,\vec{V}\,(M)}_{\vec{V}\,(M) \wedge m\,\vec{V}\,(M) = \vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge m\,\frac{d\vec{V}\,(M)}{dt} + \overrightarrow{O'O} \wedge m\,\frac{d\vec{V}\,(M)}{dt}}_{\overrightarrow{O'M} \wedge m\frac{d\vec{V}\,(M)}{dt}}$$

$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_{o'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt} \wedge m\vec{V}(M) + \overrightarrow{O'M} \wedge m\,\frac{d\vec{V}(M)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt} \wedge m\vec{V}(M) + \overrightarrow{O'M} \wedge m\,\vec{a}$

$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_{o'}}{dt} = -\vec{V}(O') \wedge m\vec{V}(M) + \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}_{i,ext})$

$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_{o'}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}_{i,ext}) + m\vec{V}(M) \wedge \vec{V}(O')$

② Si la résultante des forces $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$ passe constamment par le point fixe O (et on parle dans ce cas de ***force centrale***) $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ sont **colinéaires** et $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \quad \vec{L}_o = \overrightarrow{Cte}$

Donc pour un mouvement à force centrale, $\vec{L}_o$ est un vecteur constant. On parle dans ce cas de la **conservation du moment cinétique**.

③ *Cas particulier du mouvement de rotation :*

Considérons le cas où le point matériel M est animé, dans le référentiel $R(O, xyz)$, d'un mouvement circulaire de vitesse $\vec{V}$, de centre O et de rayon R. On a vu dans le chapitre I (§V - 4, remarque ④) que dans ce cas le vecteur vitesse peut s'écrire sous la forme $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ avec $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantané. Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur le point matériel M, est donc :

$\delta W = \vec{F}.\vec{V}dt = \vec{F}.\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)dt$ ce qui n'est autre que le produit mixte $\left(\vec{F}, \vec{\omega}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{\omega}, \overrightarrow{OM}, \vec{F}\right)$
$\Rightarrow \; \delta W = \vec{\omega}.\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right)dt = \vec{\omega}.\vec{\mathcal{M}}_o\left(\vec{F}\right)dt$

Donc le travail élémentaire δW est le produit scalaire du vecteur rotation instantané et le moment de la force $\vec{F}$ en O, multiplié par dt**.**

D'autre part : $\delta W = \vec{\omega}.\vec{\mathcal{M}}_o\left(\vec{F}\right)dt \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{P} = \vec{\omega}.\vec{\mathcal{M}}_o\left(\vec{F}\right)$

or d'après le théorème du moment cinétique $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_o\left(\vec{F}\right) \qquad \Rightarrow \; \mathcal{P} = \vec{\omega}.\frac{d\vec{L}_o}{dt}$

or pour un mouvement circulaire de rayon D, on a :

$\vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} = mD^2\vec{\omega}$ puisque $\overrightarrow{OM} = D\vec{u}_r$ et $\vec{V} = D\omega\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow \; \mathcal{P} = mD^2\vec{\omega}.\frac{d\vec{\omega}}{dt} = d\left(\frac{1}{2}mD^2\omega^2\right) = \frac{1}{2}mV^2$ on retrouve le théorème de l'énergie cinétique.

II - 4 - théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Considérons un axe Δ orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et soit O un point de cet axe.

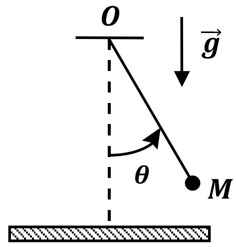
Le théorème du moment cinétique $\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_{i,ext})$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right).\vec{u}_\Delta = \left(\sum_i \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_{i,ext})\right).\vec{u}_\Delta = \sum_i\left[\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_{i,ext}).\vec{u}_\Delta\right] = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{i,ext})$

Étant donné que le vecteur $\vec{u}_\Delta$ est un vecteur constant $\Rightarrow \quad \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right).\vec{u}_\Delta = \frac{d\left(\vec{L}_O.\vec{u}_\Delta\right)}{dt} = \frac{dL_\Delta}{dt}$

D'où le théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe : $\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{i,ext})$

III - RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE DYNAMIQUE EN UTILISANT LE THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE (T.M.C).



Considérons un point matériel $\boldsymbol{M}$, de masse $\boldsymbol{m}$, relié au point fixe $\boldsymbol{O}$ par un fil inextensible de longueur $\boldsymbol{OM = \ell}$ et de masse négligeable.

À l'instant initial $\boldsymbol{t = 0}$, on abandonne l'ensemble sans vitesse initial, $\boldsymbol{OM}$ faisant l'angle $\boldsymbol{\theta_0}$ avec la verticale. On se propose de déterminer l'expression $\boldsymbol{\theta(t)}$ dans le cas des petites élongations angulaires.

Supposons que les forces de frottement sont négligeables.

définition du système :

le système est constitué du point matériel de masse m.

nature du référentiel R par rapport auquel on étudie le mouvement :

le référentiel d'analyse $\boldsymbol{R}$ est le référentiel terrestre, qui est considéré comme galiléen.

bilan des forces : le poids $\boldsymbol{m\vec{g} = mg\vec{k}}$ et la tension du fil $\boldsymbol{\vec{T} = -T\vec{N}}$

théorème du moment cinétique : $\boldsymbol{\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_o}$

$\boldsymbol{\vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}_\rho} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\vec{V} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\rho} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{L}_o = \ell\vec{u}_\rho \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{u}_\rho = m\ell^2\dot{\theta}\vec{k}}$

donc $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \boldsymbol{m\ell^2\ddot{\theta}\vec{k}}$

$\boldsymbol{\sum \vec{\mathcal{M}}_o = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g}}$ or $\boldsymbol{\vec{T}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{OM}}$ sont colinéaires et donc $\boldsymbol{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}}$

ce qui implique que $\boldsymbol{\sum \vec{\mathcal{M}}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = \ell\vec{u}_\rho \wedge \left(mg\cos\theta\,\vec{u}_\rho - mg\sin\theta\,\vec{u}_\theta\right) = -mgl\sin\theta\,\vec{k}}$

le T. M. C $\Rightarrow \boldsymbol{-m\ \ l\sin\theta = ml\ddot{\theta}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

Si $\boldsymbol{\theta_0}$ est assez petit, on peut confondre l'angle $\boldsymbol{\theta}$ avec son sinus. Il vient alors : $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega_0^2 = 0}$

avec $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{g}{l}}}$

intégration des équations différentielles :

La solution de l'équation différentielle $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega_0^2 = 0}$ est de la forme : $\boldsymbol{\theta = \theta_1\cos(\omega_0 t) + \theta_2\sin(\omega_0 t)}$

conditions initiales :

à $\boldsymbol{t} = 0$, on a : $\boldsymbol{\theta(t = 0) = \theta_1 = \theta_0}$ et $\boldsymbol{\dot{\theta}(t = 0) = \omega_0\theta_2 = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta_2 = 0}$ d'où la solution :

$$\boldsymbol{\theta = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)}$$

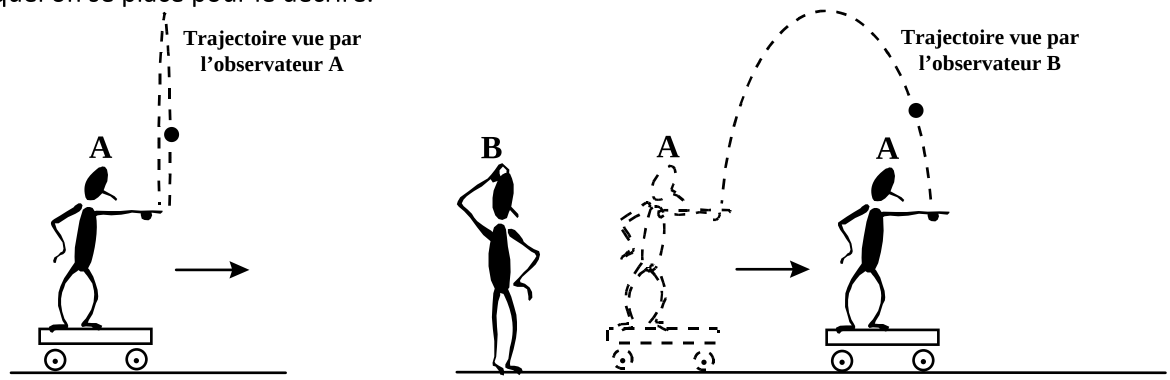
Le mouvement est donc périodique de période $\boldsymbol{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

Chapitre VII

LES CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

On a déjà vu au §I-6 du chapitre I, que la notion de mouvement ou celle de repos, est relative. Le mouvement est toujours étudié par rapport à un référentiel bien déterminé.

Dans ce chapitre, nous allons décrire en quoi les observations faites à partir de systèmes de référentiel différents, sont liés les unes aux autres. Nous verrons que deux observateurs qui se déplacent l'un par rapport à l'autre ne s'accordent généralement pas sur le résultat de leur mesure. Pour illustrer ça, prenons un exemple. Imaginons qu'une personne qui se déplace sur un chariot mobile (observateur A) lance une balle en l'air à la verticale selon son système de référence, comme l'indique la figure ci-dessous. Pour cet observateur, la balle aura une trajectoire verticale. Par contre pour l'observateur immobile au sol (observateur B), la trajectoire de cette balle sera parabolique. Ce mouvement du même point se manifeste donc de façon différente suivant le référentiel dans lequel on se place pour le décrire.



Le but de ce chapitre est de trouver comment se transforment les vecteurs vitesse et accélération lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre en mouvement par rapport au premier. Introduisons d'abord quelques notions utiles.

I - DÉFINITIONS GÉNÉRALES

I - 1 - référentiel absolu et référentiel relatif

Soit $\boldsymbol{R}$ un référentiel muni d'un repère d'espace $\boldsymbol{Oxyz}$ de base **BOND** $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Ce référentiel est considéré comme fixe. On dira que c'est un **référentiel absolu**.

Soit $\boldsymbol{R'}$ un deuxième référentiel muni d'un repère d'espace $\boldsymbol{O'x'y'z'}$ de **BOND** $\left(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'}\right)$ en mouvement par rapport à $\boldsymbol{R}$. Le référentiel $\boldsymbol{R'}$ est appelé **référentiel relatif**

I - 2 - mouvement absolu, mouvement relatif

Soit $\boldsymbol{M}$ un point matériel mobile par rapport au référentiel $\boldsymbol{R}$ (fixe) et par rapport au référentiel $\boldsymbol{R'}$ (mobile par rapport à $\boldsymbol{R}$). Le mouvement de $\boldsymbol{M}$ par rapport à $\boldsymbol{R}$ est dit **mouvement absolu** et le mouvement de $\boldsymbol{M}$ par rapport à $\boldsymbol{R'}$ est dit **mouvement relatif**.

I - 3 - vitesse et accélération absolues; vitesse et accélération relatives

La vitesse et l'accélération du mouvement de $\boldsymbol{M}$ par rapport à $\boldsymbol{R}$ (le référentiel fixe) sont dites **vitesse absolue** et **accélérations absolue** et sont notées, respectivement, $\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{a}}$ et $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{a}}$

Celles par rapport à $\boldsymbol{R'}$ (référentiel relatif) sont dites **vitesse relative** et **accélération relative** et sont notées respectivement $\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{r}}$ et $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}$

I - 4 - notion de point coïncidant

On appelle **point coïncidant** le point $\boldsymbol{P}$ du référentiel $\boldsymbol{R'}$ (mobile) qui, à l'instant $\boldsymbol{t}$, coïncide avec le point mobile $\boldsymbol{M}$. Notons bien que le point coïncidant est lié au référentiel mobile $\boldsymbol{R'}$, qui l'emporte avec lui dans son mouvement. Le point $\boldsymbol{P}$ occupe la même position géométrique que le point matériel $\boldsymbol{M}$ à un instant $\boldsymbol{t}$. Ces points ne coïncidant géométriquement qu'à cet instant : l'instant suivant, c'est un autre point de l'espace lié à $\boldsymbol{R'}$ qui coïncide avec $\boldsymbol{M}$.

I - 5 - mouvement d'entraînement de $\boldsymbol{R'}$ par rapport à $\boldsymbol{R}$

C'est le mouvement du point coïncidant (lié au référentiel relatif $\boldsymbol{R'}$) par rapport au référentiel absolu $\boldsymbol{R}$.

I - 6 - vecteur rotation instantané

On a déjà définit ce vecteur dans le paragraphe V-4 du chapitre I.

Supposons que le référentiel $\boldsymbol{R'}$ est animé d'un mouvement de rotation par rapport à l'un des axes du référentiel $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{Oz}$ par exemple). On appelle vecteur rotation instantané de $\boldsymbol{R'}$ par rapport à $\boldsymbol{R}$, le vecteur $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{R'/R}}$ (noté généralement $\vec{\boldsymbol{\omega}}$), porté par l'axe de rotation ($\boldsymbol{Oz}$ dans notre exemple) de norme égale à $\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{d\varphi}}{\boldsymbol{dt}}$ et de sens déterminé par la règle du tire-bouchons.

I - 7 - dérivation d'un vecteur par rapport au temps relativement à $\boldsymbol{R}$ et à $\boldsymbol{R'}$

Soit $\vec{\boldsymbol{A}}$ un vecteur quelconque de composantes cartésiennes $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ dans $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}, \boldsymbol{z'}$ dans $\boldsymbol{R'}$.
Par définition, la dérivée d'un vecteur par rapport au temps, relativement à une base, est le vecteur obtenu en dérivant ses composantes dans cette base et en considérant que les vecteurs de base sont fixes.

Donc , $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$ et $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} = \dot{x}'\,\vec{\imath'} + \dot{y}'\,\vec{\jmath'} + \dot{z}'\,\vec{k'}$

Comparons ces deux équations :

dans le référentiel $\boldsymbol{R}$: $\quad \vec{A} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \quad (1)$

dans le référentiel $\boldsymbol{R'}$: $\quad \vec{A} = x'\,\vec{\imath'} + y'\,\vec{\jmath'} + z'\,\vec{k'} \quad (2)$

à partir de l'expression (2), exprimons $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \dot{x}'\,\vec{\imath'} + x'\left(\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right)_R + \dot{y}'\,\vec{\jmath'} + y'\left(\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right)_R + \dot{z}'\,\vec{k'} + z'\left(\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)_R$$

or d'après les résultats du §V-4 du chapitre I, remarque ⑤, On a :

$$\left(\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{\imath'}\;; \qquad \left(\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{\jmath'} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{k'}$$

il vient : $$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{A}$$

<u>Remarques</u> :

① Dans le cas où le vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$ est fixe dans le référentiel $\boldsymbol{R'}$, la formule précédente se réduit à :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

② si $\boldsymbol{R'}$ est en mouvement de translation pure par rapport au référentiel $\boldsymbol{R}$, on a $\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'}$

II - Composition des vitesses

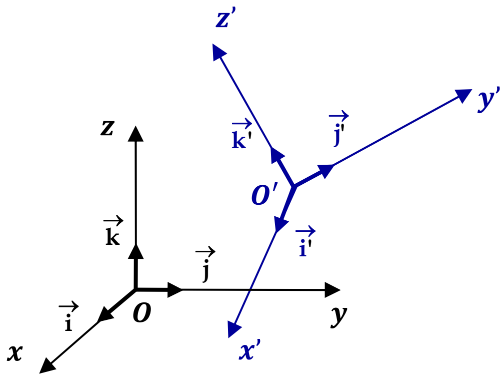
Soit $\boldsymbol{R}$ un **référentiel fixe** (absolu) d'origine $\boldsymbol{O}$ et de vecteur de base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, et soit $\boldsymbol{R'}$ un **référentiel mobile** (relatif) par rapport à R, d'origine **O'** et de vecteur de base $\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'}$.

Soit $\boldsymbol{M}$ un point matériel mobile par rapport à $\boldsymbol{R}$ et par rapport à $\boldsymbol{R'}$ et dont on veut étudier son mouvement dans les deux référentiels précédents.

Les coordonnées cartésiennes du point $\boldsymbol{M}$, sont, $\boldsymbol{M}(x, y, z)$ dans $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{M}(x', y', z')$ dans $\boldsymbol{R'}$.

D'après sa définition, la vitesse absolue $\vec{V}_a$ du point matériel $\boldsymbol{M}$ est sa vitesse dans le référentiel absolu $\boldsymbol{R}$, donc : $\vec{V}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$

Or $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$



donc $\quad \vec{V}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R$

On a montré dans le §I-7 que la dérivée temporelle, dans un référentiel $\boldsymbol{R}$, d'un vecteur $\vec{A}$ est :

$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{A}$; appliquons ce résultat au vecteur $\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R$:

$\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \qquad$ puisque $\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} = \vec{V}_r$

$$\Rightarrow \vec{V}_a = \vec{V}_r + \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

$$\Rightarrow \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

$\vec{V}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ c'est la **vitesse d'entraînement**.

Le premier terme de $\vec{V}_e$ traduit le mouvement de translation de $\boldsymbol{O'}$ par rapport à $\boldsymbol{O}$, et le deuxième terme traduit le mouvement de rotation de $\boldsymbol{R'}$ autour du support de $\vec{\omega}$

$\vec{V}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'}$ c'est la vitesse de $\boldsymbol{M}$ mesurée dans le référentiel $\boldsymbol{R'}$ (**mobile**) : **vitesse relative.**

$\vec{V}_a$ c'est la vitesse de $\boldsymbol{M}$ mesurée dans le référentiel $\boldsymbol{R}$ (**fixe**) : **vitesse absolue.**

D'où la formule fondamentale de la loi de composition des vitesses : $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$

La vitesse absolue d'un point matériel $\boldsymbol{M}$ (vitesse par rapport au référentiel absolu $\boldsymbol{R}$) est égale à la somme géométrique de la vitesse relative de ce point (vitesse par rapport au référentiel mobile $\boldsymbol{R'}$) et de la vitesse d'entraînement de $\boldsymbol{R'}$ par rapport à $\boldsymbol{R}$.

Remarque :

Par définition, le point coïncidant est fixe dans $\boldsymbol{R'}$ donc sa vitesse dans $\boldsymbol{R'}$ est nulle ($\dot{x}' = \dot{y}' = \dot{z}' = 0$). Ce qui implique que $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{P}) = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{P})$. Donc la vitesse d'entraînement est la vitesse du point coïncidant $\boldsymbol{P}$ (qui est fixe dans $\boldsymbol{R'}$).

APPLICATION :

Dans le plan xOy l'axe Ox' tourne à la vitesse angulaire constante ω. Un point matériel M se déplace, à vitesse constante V_0, sur l'axe $O'y'$ (du plan xOy) perpendiculaire à OO' (le point O' est fixe sur Ox' et tel que $OO' = D$). À l'instant $t = 0$ le point O' est sur l'axe Ox et le point M est confondu avec O'.

Soit R le référentiel d'origine O et de vecteurs de base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, et soit R' le référentiel d'origine O' et de vecteurs de base $\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'$.

1 - Déterminer les coordonnées du point M dans le référentiel R. En déduire dans ce même référentiel les composantes de la vitesse de M dans son mouvement dans xOy.

2 - Retrouver le résultat précédant en appliquant la formule de composition des vitesses.

Solution :

1 - Dans le référentiel $R'(O', x'y'z')$ le point M est animé d'un mouvement rectiligne tel que $\vec{V} = V_0\vec{\jmath}'$;

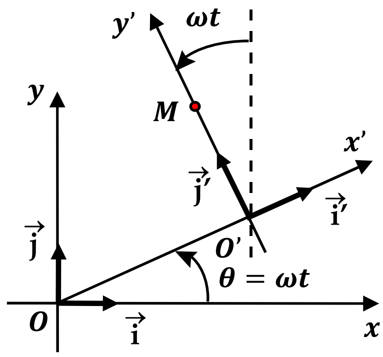
$\overrightarrow{O'M} = V_0\, t\, \vec{\jmath}'$ *et* $\overrightarrow{OO'} = D\, \vec{\imath}'$

D'où $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = D\,\vec{\imath}' + V_0\, t\, \vec{\jmath}'$

Cherchons $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}'$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

$\vec{\imath}' = \cos\omega t\, \vec{\imath} + \sin\omega t\, \vec{\jmath}$ *et* $\vec{\imath}' = -\sin\omega t\, \vec{\imath} + \cos\omega t\, \vec{\jmath}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{OM} = (D\cos\omega t - V_0\, t \sin\omega t)\vec{\imath} + (D\sin\omega t + V_0\, t\cos\omega t)\vec{\jmath}$



d'où : $\left| \begin{array}{l} x(t) = D\cos\omega t - V_0\, t\sin\omega t \\ \\ y(t) = D\sin\omega t + V_0\, t\cos\omega t \end{array} \right.$

La vitesse, dans $R(O, xyz)$, du point M, établie dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, s'obtient par simple dérivation des expressions précédentes :

$$\vec{V}(t) = \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -(D\omega + V_0)\sin\omega t - V_0\,\omega t\cos\omega t \\ \\ \dot{y}(t) = (D\omega + V_0)\cos\omega t - V_0\,\omega t\sin\omega t \end{array} \right.$$

2 - Appliquons la formule de composition des vitesses.

Dans le cas qui nous intéresse ici, R' a un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire constante autour de l'axe Oz.

On a : $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ *et* $\vec{V}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} = V_0\vec{\jmath}'$

La vitesse d'entraînement est donnée par : $\vec{V}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$

Il vient alors : $\vec{V}_e = \omega D\vec{\jmath}' + \omega\vec{k}\wedge V_0 t\,\vec{\jmath}'$ $\Rightarrow$ $\vec{V}_a = V_0\vec{\jmath}' + \omega D\vec{\jmath}' - \omega V_0 t\,\vec{\imath}'$

or $\vec{\imath}' = \cos\omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath}$ *et* $\vec{\imath}' = -\sin\omega t\,\vec{\imath} + \cos\omega t\,\vec{\jmath}$

$\Rightarrow$ *par projection sur les axes Ox et Oy, il vient :*

$$\vec{V}_a = \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -(D\omega + V_0)\sin\omega t - V_0\,\omega t\cos\omega t \\ \\ \dot{y}(t) = (D\omega + V_0)\cos\omega t - V_0\,\omega t\sin\omega t \end{array} \right.$$

cette expression est conforme à celle obtenue à la question N°1

III - Composition des accélérations

Par définition l'accélération du point M dans le **référentiel absolu** (accélération absolue) est égale à :

$$\vec{a}_a = \left(\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R$$

Utilisons le résultat déjà trouvé : $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{A}$

on a $\vec{a}_a = \left(\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}\left\{\vec{V}_r + \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \vec{\omega}\,\Lambda\,\overrightarrow{O'M}\right\}$

$$\vec{a}_a = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_R + \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\,\Lambda\,\overrightarrow{O'M}\right)_R$$

$$\left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{V}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{V}_r$$

le terme $\vec{a}_r = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R'}$ n'est autre que l'accélération du point M dans R'; c'est donc **l'accélération relative** du point M.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\,\Lambda\,\overrightarrow{O'M}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left\{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R\right\}$$
$$= \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

d'où : $\vec{a}_a = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{a}_r$

Le terme $\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$ est **l'accélération d'entraînement**. C'est l'accélération du point coïncidant P.

Le terme $\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ est un terme complémentaire appelé **accélération complémentaire** ou **de Coriolis**.

En conclusion :

La loi de composition des accélérations s'écrit : $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$

$\vec{a}_a$ c'est l'accélération du point M mesurée dans le référentiel R (**absolu**) : **accélération absolue**.

$\vec{a}_r = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R'}$ est l'accélération du point M mesurée dans le référentiel R' (**mobile**) : **accélération relative**.

$\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$ c'est **l'accélération d'entraînement**.

Le premier terme traduit l'accélération absolue de O'. Le deuxième terme traduit le mouvement de rotation de R' par rapport à R et le troisième terme n'intervient que si la rotation n'est pas uniforme.

$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ c'est l'accélération **complémentaire** ou **de Coriolis**.

Remarques :

① l'accélération de Coriolis disparaît dans deux cas particuliers :

- lorsque $\vec{\omega} = \vec{0}$, c'est à dire pour un mouvement de translation pure de R' par rapport à R.
- lorsque le point M est en équilibre dans le référentiel R', c'est à dire $\vec{V}_r = \vec{0}$

② si le mouvement de R' par rapport à R est un mouvement de translation uniforme, alors on a, $\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\vec{V}_e = \overrightarrow{Constant}$ ce qui implique $\vec{a}_e = \vec{0}$ et donc $\vec{a}_a = \vec{a}_r$. Par conséquent, si les référentiels R et R' sont animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement de translation rectiligne uniforme, l'accélération du mouvement d'un même point mobile par rapport à R ou à R' est la même.

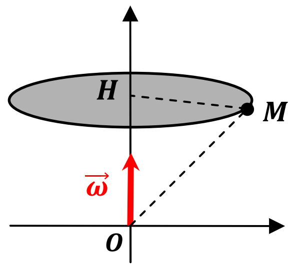
③ Si le référentiel relatif R' est en translation pure par rapport au référentiel absolu R, alors $\vec{\omega} = \vec{0}$ et on a $\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R = \left(\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right)_R$

④ Si maintenant, l'origine O' est confondue avec le point O, alors $\vec{V}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}_e = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_e$

Si en plus la rotation est uniforme alors $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$ et $\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_e$

⑤ intéressons-nous de nouveau à l'expression de l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$

$\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$. D'après l'égalité du double produit vectoriel $\left[\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \left(\vec{A}\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\vec{B}\right)\vec{C}\right]$, il vient, en considérant le cas où le point O est confondu avec le point O' : $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{\omega} \,.\, \overrightarrow{OM}\right)\vec{\omega} - \omega^2\overrightarrow{OM}$



Le point matériel M lié à R' tourne autour de l'axe de rotation. Le produit scalaire $\left(\vec{\omega} \,.\, \overrightarrow{OM}\right) = \omega\, \overline{OH}$ avec H la projection de M sur l'axe de rotation (voir figure).

il vient donc : $\left(\vec{\omega} \,.\, \overrightarrow{OM}\right)\vec{\omega} = \left(\omega\overline{OH}\right)\vec{\omega} = \omega^2\overrightarrow{OH}$

D'où : $\left(\vec{\omega} \,.\, \overrightarrow{OM}\right)\vec{\omega} - \omega^2\overrightarrow{OM} = \omega^2\left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OM}\right) = \omega^2\overrightarrow{MH}$

Nous distinguons deux termes :

$\vec{a}_N = \omega^2\overrightarrow{MH} = -\omega^2\overrightarrow{HM}$, elle correspond à une accélération centripète.

$\vec{a}_T = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{OM}$, elle correspond à une accélération tangentielle.

Si la rotation de R' par rapport à R est de surcroît uniforme, alors $\vec{a}_T = \vec{0}$ et $\vec{a}_e = \vec{a}_N = -\omega^2\overrightarrow{HM}$ qui correspond à une accélération centripète.

APPLICATION :

Retrouver ce dernier résultat (R' est en rotation uniforme par rapport à R, remarque ⑤), en étudiant tout simplement le mouvement du point coïncidant et en utilisant l'expression de l'accélération en coordonnées polaires.

Solution :

Le point coïncidant P (fixe dans R') est en mouvement de rotation uniforme. L'accélération en coordonnées cylindrique s'exprime par : $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\vec{u}_\varphi$

Or $\dot{\varphi} = \omega = Cte$ et $\rho = HM = Cte \quad \Rightarrow \vec{a} = -HM\omega^2\,\vec{u}_\rho = -\omega^2\overrightarrow{HM}$

⑥ Repère d'étude et repère de projection :

Un mouvement d'une particule $\boldsymbol{M}$ est étudié dans un référentiel $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{i}},\vec{\boldsymbol{j}},\vec{\boldsymbol{k}})$ veut dire que l'observateur placé en $\boldsymbol{O}$ (origine du référentiel $\boldsymbol{R}$) analyse le mouvement du point matériel $\boldsymbol{M}$. Donc, la vitesse et l'accélération de $\boldsymbol{M}$ sont analysées par rapport à l'observateur $\boldsymbol{O}$ (c'est à dire, le référentiel $\boldsymbol{R}$). Dans ce cas $\boldsymbol{R}$ est appelé **référentiel d'étude** (ou **repère d'étude**). Cependant, les composantes de cette vitesse et de cette accélération, définies dans le référentiel d'étude $\boldsymbol{R}$, peuvent être exprimées dans la base de n'importe quel autre repère $\boldsymbol{R}'$, appelé référentiel de projection (ou **repère de projection**). Dans de nombreux problèmes il est intéressant de choisir un repère de projection distinct du repère d'étude.

Chapitre VIII

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL
DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

Nous avons déjà signalé que le rôle de la mécanique était, à partir d'un catalogue d'actions dressé par les physiciens, d'étudier le mouvement des corps matériels soumis à ces actions. Pour cela un moyen : la relation fondamentale de la dynamique $\vec{F} = m\vec{a}$. Mais ce moyen est pour l'instant n'est pas toujours utilisable, car il fait recours à un référentiel galiléen comme référentiel de référence. Il est donc nécessaire de l'adapter à l'étude de mouvements par rapport à un référentiel quelconque.
Dans ce chapitre on va donc analyser comment un observateur, situé dans un référentiel non galiléen (*accéléré*) va pouvoir appliquer le principe fondamental de la dynamique.

I - LES FORCES D'INERTIE ET ADAPTATION DE LA R.F.D POUR UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

Soient un référentiel $\boldsymbol{R}$ fixe galiléen (absolu) muni d'un repère d'espace d'axes $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$, $\boldsymbol{Oz}$, et un référentiel $\boldsymbol{R'}$ non galiléen, en mouvement par rapport à $\boldsymbol{R}$, muni d'un repère d'espace d'axes $\boldsymbol{O'x'}$, $\boldsymbol{O'y'}$, $\boldsymbol{O'z'}$.

Soit aussi, un point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$, mobile dans $\boldsymbol{R}$ et dans $\boldsymbol{R'}$.
Supposons que l'observateur $\boldsymbol{O}$ (attaché au référentiel absolu) effectue des mesures dans $\boldsymbol{R}$. Pour décrire le mouvement de $\boldsymbol{M}$, il va donner à ce point une vitesse $\vec{V}_a$ (vitesse absolue) et une accélération $\vec{a}_a$

Si $\vec{F}$ est la résultante des forces qui s'exercent sur $\boldsymbol{M}$, et puisqu'il est attaché à un référentiel galiléen, alors il peut écrire, d'après le principe fondamental de la dynamique :
$\vec{F} = m\vec{a}$, c'est-à-dire $\vec{F} = m\vec{a}_a$ équation (1)
Or d'après la loi de composition de mouvement on a : $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ et l'équation (1) devient :
$\vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = m\vec{a}_r$ équation (2)

Maintenant si l'observateur $\boldsymbol{O'}$ veut analyser le mouvement du point $\boldsymbol{M}$. Il va donner à ce point une vitesse $\vec{V}_r$ (vitesse relative) et une accélération $\vec{a}_r$ (accélération relative) et s'il souhaite utiliser le principe fondamental de la dynamique, il serait faux de l'écrire sous la forme $\vec{F} = m\vec{a}_r$, car la relation $\vec{F} = m\vec{a}$ ne doit être écrite que dans un référentiel galiléen, ce qui n'est pas le cas pour l'observateur $\boldsymbol{O'}$ qui est attaché au référentiel $\boldsymbol{R'}$ mobile par rapport à $\boldsymbol{R}$. Par contre, si cet observateur fait intervenir, en plus de la résultante des forces extérieures $\vec{F}$, des forces fictives l'une égale à $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$ et l'autre $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$ et essaye d'appliquer le principe fondamental de la dynamique il va écrire $\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m\vec{a}_r$, c'est à dire, $\vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = m\vec{a}_r$, il retrouve l'équation (2)

Donc grâce à l'artifice de ces deux forces, **fictives**, la relation $\vec{F} = m\vec{a}$ reste valable pour définir le mouvement d'un point mobile par rapport à un référentiel quelconque à condition d'ajouter à la résultante des forces extérieures (forces réelles) $\vec{F}$ les forces fictives $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$.

Notons que les forces inventées par l'observateur $\boldsymbol{O'}$ (mobile) ne traduisent pas des actions véritables mais elles peuvent être responsables de certaines actions de contact, dont on sait qu'elles ne sont entièrement déterminées que quand le mouvement est complètement étudié. Pour les distinguer des forces traduisant directement des actions physiques et qui entrent dans la constitution de la résultante $\vec{F}$, on les appellera des forces fictives ou des forces d'inertie : $\vec{F}_e$ est appelée la **force d'inertie d'entraînement** (ou d'entraînement tout cours), et $\vec{F}_c$ est appelée la **force d'inertie de Coriolis** ou **complémentaire**.

Les forces fictives n'existent pas lorsqu'on observe le mouvement à partir d'un référentiel galiléen. Bien que les formules mathématiques du principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen et dans un référentiel non galiléen sont équivalentes, les deux observateurs situés dans des référentiels différents ne s'entendront pas sur les causes du mouvement.

Remarques :

① La force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis s'annulent dans le cas particulier où le référentiel $\boldsymbol{R'}$ est galiléen.

② la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_c$, s'annule si $\vec{V}_r = \vec{0}$, c'est à dire si le point matériel est en équilibre dans $\boldsymbol{R'}$ ou si la vitesse relative $\vec{V}_r$ est parallèle à l'axe de rotation.

③ si la rotation de $\boldsymbol{R'}$ autour de $\boldsymbol{R}$ est uniforme alors on a, $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ avec $\omega = constante$ donc $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$ et si en plus $\boldsymbol{O}$ est confondu avec $\boldsymbol{O'}$, la force d'entraînement $\vec{F}_e$ devient $\vec{F}_e = -m\vec{\omega} \wedge \vec{V}_e$.
Or dans ce cas particulier l'accélération d'entraînement est purement radiale, soit :

$$\vec{a}_e = -m\omega^2\overrightarrow{OH} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_e = -m\vec{a}_e = m\omega^2\overrightarrow{OH}$$

Donc la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_e$ est dirigée de $\boldsymbol{O}$ vers $\boldsymbol{H}$, d'où le nom de **force centrifuge**.

④ *Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen :*

Si $\boldsymbol{R}$ n'est pas galiléen, il faut ajouter au travail des forces appliquées celui de la force d'entraînement (Celui de la force de Coriolis étant nul). Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :
$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}(\vec{F}_e)$ où $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$ est la résultante des forces extérieures appliquées à la particule $\boldsymbol{M}$ et $\vec{F}_e$ la force d'inertie d'entraînement.

II - Cas Particuliers

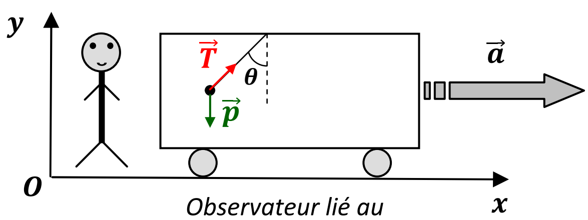
II - 1 - cas où le mouvement d'entraînement est une translation

Considérons un référentiel $\boldsymbol{R'}$ (référentiel mobile) animé d'un mouvement de translation uniformément accéléré par rapport à un référentiel fixe (absolu) $\boldsymbol{R}$. Désignons par $\vec{F}$ la résultante des forces appliquées sur un point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$ dans le référentiel $\boldsymbol{R}$.
Pour déterminer l'équation de mouvement de $\boldsymbol{M}$ dans $\boldsymbol{R'}$, il faut tenir compte des forces d'inertie, qui sont :

- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = \vec{0}$ car le référentiel $\boldsymbol{R'}$ est animé d'un mouvement de translation par rapport au référentiel $\boldsymbol{R}$ et donc $\vec{\omega} = \vec{0}$

Illustrons l'effet de la force d'entraînement $\vec{F}_e$ par un exemple simple (notons que cette force est opposée à l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$). Considérons une voiture entrain d'accélérer (ou de freiner). La force d'inertie d'entraînement à tendance à coller les passagers aux sièges si la voiture accélère, ou à les projeter en avant si elle freine.

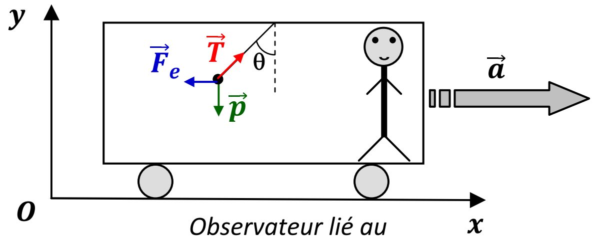
Prenons un autre exemple. Considérons un point matériel $\boldsymbol{m}$, suspendue au plafond d'un wagon de train animé d'une accélération horizontale $\vec{a}$. Le pendule est supposé immobile dans le train. On va essayer de déterminer l'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale.
Pour un observateur au repos dans le référentiel galiléen (absolu) (une personne immobile qui se trouve sur le quai), le point matériel subit deux forces:
son poids $\vec{p} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.
Cet observateur va appliquer la R. F. D et va écrire : $m\vec{a}_a = \vec{p} + \vec{T}$



Observateur lié au Référentiel Absolu

Or $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ avec $\vec{a}_r = \vec{a}_c = \vec{0}$ (car le pendule est supposé immobile dans le train, $\vec{V}_r = \vec{0}$ et il n'y a pas de mouvement de rotation $\vec{\omega} = \vec{0}$) et $\vec{a}_e = \vec{a}$

$\Rightarrow \; m\vec{a} = \vec{p} + \vec{T}$



Observateur lié au Référentiel Relatif

Projetons cette équation sur les axes Ox et Oy :

$ma = T\sin\theta$ et $0 = -mg + T\cos\theta$

$\Rightarrow \quad tg\theta = -\frac{a}{g}$

Par contre pour un observateur qui trouve dans le train (un voyageur assis dans le wagon), quand il applique la R. F. D dans le référentiel qui lui est lié (référentiel relatif), il va faire intervenir la force fictive d'entraînement $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}$

La force fictive de Coriolis étant nulle puisque le pendule est immobile dans le référentiel relatif.

Cet observateur va appliquer la R. F. D et va écrire :

$m\vec{a}_r = \vec{p} + \vec{T} + \vec{F}_e = \vec{p} + \vec{T} - m\vec{a}_e = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \vec{p} + \vec{T} = m\vec{a}_e = m\vec{a}$

Cette dernière expression est équivalente à l'équation obtenue par le premier observateur et conduit au même résultat.

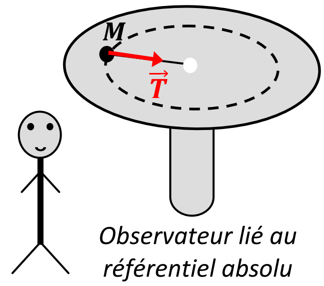
II - 2 - cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation

Soit R un référentiel absolu (fixe), muni d'un repère d'espace $Oxyz$.
Soit R' un référentiel mobile, muni d'un repère d'espace $O'x'y'z'$.

Considérons un point matériel M, de masse m, reposant sur un plateau de rayon D tournant uniformément autour de l'axe de la verticale ascendante Oz. Le point matériel M est relié, au centre du plateau, par un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L. Le mouvement de la particule sur le plateau s'effectue sans frottement.

Pour un observateur au repos dans le référentiel galiléen (absolu), le point matériel subit l'action :

- de son poids $\vec{p} = m\vec{g}$
- de la tension $\vec{T}$ du fil
- de la réaction du plateau $\vec{R}$ qui lui est perpendiculaire puisque le mouvement s'effectue sans frottements.



Observateur lié au référentiel absolu

Cet observateur va appliquer la R. F. D et va écrire : $m\vec{a}_a = \vec{p} + \vec{T} + \vec{R}$

Or à l'équilibre on a : $\vec{p} + \vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad m\vec{a}_a = \vec{T}$

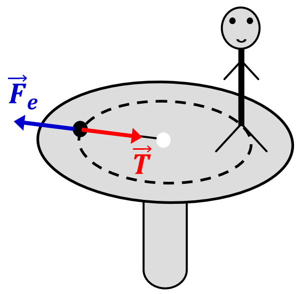
Or $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ avec $\vec{a}_r = \vec{a}_c = \vec{0}$

$\Rightarrow \; \vec{a}_a = \vec{a}_e \quad \Rightarrow \quad m\vec{a}_e = \vec{T} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} - m\vec{a}_e = \vec{0}$

Par contre pour un observateur qui trouve sur le plateau, quand il applique la R. F. D dans le référentiel qui lui est lié (référentiel relatif), il va faire intervenir la force fictive d'entraînement $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$. La force fictive de Coriolis étant nulle puisque le pendule est immobile dans le référentiel relatif.

Cet observateur va appliquer la R. F. D et va écrire :

$$m\vec{a}_r = \vec{p} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{F}_e = \vec{p} + \vec{T} + \vec{R} - m\vec{a}_e = \vec{0}$$



Observateur lié au référentiel relatif

or toujours on a la condition d'équilibre à l'équilibre on a :

$$\vec{p} + \vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} - m\vec{a}_e = \vec{0}$$

D'après cet observateur, la force d'inertie équilibre la tension du fil.
Cette dernière expression est équivalente à l'équation obtenue par le premier observateur et conduit au même résultat.

III - THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

Soient un référentiel $\boldsymbol{R}$ fixe galiléen muni d'un repère d'espace d'axes $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$, $\boldsymbol{Oz}$, et un référentiel $\boldsymbol{R'}$ en mouvement par rapport à $\boldsymbol{R}$, muni d'un repère d'espace d'axes $\boldsymbol{O'x'}$, $\boldsymbol{O'y'}$, $\boldsymbol{O'z'}$.

Soit un point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$, mobile dans $\boldsymbol{R}$ et dans $\boldsymbol{R'}$, et soit $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}$ la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur ce point matériel dans le référentiel galiléen $\boldsymbol{R}$.

Le moment cinétique en $\boldsymbol{O'}$, évalué dans le référentiel relatif $\boldsymbol{R'}$, s'écrit : $\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt}\right)_{R'} = \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} \wedge m\vec{V}_r}_{\vec{0}} + \overrightarrow{O'M} \wedge m\left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{O'M} \wedge m\left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{a}_r$$

or, d'après la relation fondamentale de la dynamique, appliquée au point matériel $\boldsymbol{M}$, dans le référentiel relatif $\boldsymbol{R'}$, on a : $\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{c}} + \sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}_e + \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}_c + \overrightarrow{O'M} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_{\boldsymbol{O'}}(\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}})$ c'est le moment en **O'** de la force d'entraînement.

$\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_{\boldsymbol{O'}}(\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{c}})$ c'est le moment en **O'** de la force de Coriolis.

$$\overrightarrow{O'M} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \overrightarrow{O'O} \wedge \sum \vec{F}_{ext} + \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{\mathcal{M}}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \overrightarrow{O'O} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

où $\vec{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_{\boldsymbol{O}}\left(\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}\right)$ est le moment en $\boldsymbol{O}$ de la résultante des forces extérieures

Donc :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt}\right)_{R'} = \vec{\mathcal{M}}_{O'}\left(\vec{F}_e\right) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}\left(\vec{F}_c\right) + \vec{\mathcal{M}}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \overrightarrow{O'O} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

<u>Remarque</u> :

Si le point $\boldsymbol{O'}$ est confondu avec le point $\boldsymbol{O}$, alors :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\vec{L}_{O}}{dt}\right)_{R'} = \vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_e\right) + \vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_c\right) + \vec{\mathcal{M}}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$$

c'est à dire que dans ce cas le théorème du moment cinétique reste valable dans le référentiel relatif $\boldsymbol{R'}$ à condition d'ajouter au moment de la résultante des forces extérieures les moments des forces d'inertie.

IV - ÉQUILIBRE RELATIF DANS UN RÉFÉRENTIEL EN MOUVEMENT

On a déjà vu que l'équilibre dans un référentiel galiléen, d'un point matériel se traduit par $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \vec{\boldsymbol{0}}$
$\Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{0}}$

L'équilibre d'un point matériel dans un référentiel mobile $\boldsymbol{R'}$ (**équilibre relatif**) se traduit par $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{0}}$
Appliquons maintenant la R. F. D dans le référentiel $\boldsymbol{R'}$:

$$m\vec{a}_r = \vec{0} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \quad \Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Donc on peut continuer à traduire l'équilibre dans un référentiel mobile par l'équation $\sum \vec{F} = \vec{0}$ à condition d'ajouter aux forces galiléennes (réelles) appliquées au point matériel les forces d'inertie de Coriolis et d'entraînement.

Exemple d'équilibre relatif : *équilibre relatif dans un référentiel en translation*

Considérons le cas d'une personne qui porte à la main une valise de masse $\boldsymbol{m}$ dans un ascenseur animé d'une accélération verticale constante $\boldsymbol{a}$ et déterminons le poids apparent de la valise et la tension $\vec{\boldsymbol{T}}$ exercée par la valise sur le bras.

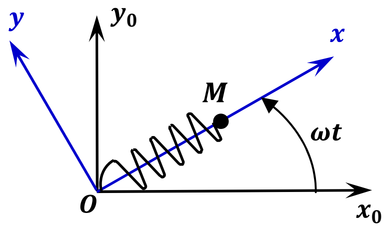
L'équilibre de la valise par rapport à un repère $\boldsymbol{R'}$ lié à l'ascenseur s'écrit :
$\boldsymbol{m\vec{g}} + \vec{\boldsymbol{T}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ où $\vec{\boldsymbol{T}}$ est la tension du bras, et $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} = -\boldsymbol{m\vec{a}_e}$ est la force d'entraînement. La force d'inertie de Coriolis étant nulle (mouvement de translation).
Notons $\boldsymbol{a_e}$ et $\boldsymbol{T}$ les valeurs algébriques de $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{e}}$ et $\vec{\boldsymbol{T}}$ et projetons la R.F.D sur l'axe vertical ascendant :

$$-\boldsymbol{mg} + \boldsymbol{T} - \boldsymbol{ma_e} = \boldsymbol{0} \qquad \Rightarrow \ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{a_e})$$

On voit que suivant le signe de $\boldsymbol{a_e}$, le poids apparent est supérieur au poids réel si l'ascenseur monte et il est inférieur si l'ascenseur descend. En particulier si l'ascenseur est en chute libre où $\vec{\boldsymbol{g}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{e}}$ le poids apparent est nul (cas dangereux, gravité zéro).

APPLICATION :

Soit le référentiel $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ considéré comme galiléen, Oz_0 étant dirigé vers la droite verticale ascendante. Soit $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre.
Un disque de centre O, de rayon D, tourne dans le plan horizontal ($x_0O\ y_0$), autour du point O, à la vitesse angulaire constante ω.
Ce disque est muni d'une rainure radiale et dans cette rainure coulisse sans frottement une masselotte M de masse m.
Soit $R(O, x, y, z_0)$ un référentiel lié au disque, Ox étant porté par la rainure.
On note $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, les vecteurs unitaires respectifs des axes Ox, Oy, Oz_0.
1 - La masselotte M est attachée à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur , de longueur à vide l_0 ; ce ressort est fixé en O à son autre extrémité.



a - Écrire la relation fondamentale de la dynamique, pour la masselotte M, dans le référentiel R lié au disque.
b - Montrer que M peut effectuer des oscillations harmoniques, dans R, autour d'une position d'équilibre $x = x_e$. (sous réserve que k obéisse à une condition que l'on précisera). Calculer x_e et la période des oscillations T.
2 - On supprime le ressort, la masselotte étant toujours astreinte à glisser sans frottement dans la rainure. À $t = 0$, M est lâchée sans vitesse initiale à une distance x_1 de O.
Calculer $x(t)$ ainsi que le module de la réaction $\vec{N}$ de la rainure sur M.

solution :

1 - a - Dans le référentiel relatif R (non galiléen), le point matériel est soumis à :

- *son poids* $\vec{p} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$
- *la tension du ressort* $\vec{T} = -k(x - l_0)\vec{\imath}$
- *la réaction de la rainure* $\vec{N} = N_1\vec{\jmath} + N_2\vec{k}$
- *la force d'entraînement* $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$

or $\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\omega^2\overrightarrow{OM} = -\omega^2 x\vec{\imath} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_e = m\omega^2 x\vec{\imath}$

- *la force de Coriolis* $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = -2m\omega\dot{x}\vec{\jmath}$

La R.F.D, appliquée au point matériel, dans le référentiel relatif R $\quad \Rightarrow \qquad \vec{T} + \vec{p} + \vec{N} + \vec{F}_c + \vec{F}_e = m\vec{a}_r$
Projetons cette équation sur $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ *et* $\vec{k}$ *:*

$m\ddot{x} = -k(x - l_0) + m\omega^2 x$ *équation (1)*
$0 = N_1 - 2m\omega\dot{x}$ *équation (2)*
$0 = N_2 - mg$ *équation (3)*

1 - b - L'équation (1) $\Rightarrow \quad \ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega^2)x = l_0\omega_0^2$ *avec* $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \Omega^2 x = l_0\omega_0^2$ *avec* $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$

l'équation caractéristique de cette équation différentielle sans second membre est : $\lambda^2 + \Omega^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 = -\Omega^2$

le point M effectue des oscillations harmoniques si $\Omega^2 > 0 \quad \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 > \quad \Rightarrow k > m\omega^2$

pour $k > m\omega^2$*, la solution générale de l'équation différentielle précédente sans second membre est la forme :* $S_G = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$

la solution particulière est : $S_p = \frac{l_0\omega_0^2}{\Omega^2}$ *d'où,* $x(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + \frac{l_0\omega_0^2}{\Omega^2}$

La position d'équilibre relatif correspond à : $\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = 0 \quad \Rightarrow x_e = \frac{l_0\omega_0^2}{\Omega^2} = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}$

La période est : $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}}$

notons que les oscillations auront effectivement lieu si la masselotte reste au contact de la rainure. Il faut donc aussi que la condition $0 \le x_0 - x_m < x_e - x_m \le D$ *soit réalisée.*

2 - Le ressort étant supprimé, l'équation (1) est remplacée par $m\ddot{x} = m\omega^2 x$

$\Rightarrow \ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

or à $t = 0$*,* $x = x_1 = A + B$ *et* $\dot{x} = \omega(A - B) = 0 \quad \Rightarrow A = B = \frac{x_1}{2}$ *d'où* $x(t) = \frac{x_1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

$N_1 = 2m\omega\dot{x} = m\omega^2 x_1(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$

$N_2 = mg$ *et* $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$

V - DYNAMIQUE TERRESTRE

V - 1 - L'interaction gravitationnelle

La loi d'interaction gravitationnelle entre deux corps $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, de masses gravitationnelles $\boldsymbol{m_{g_A}}$ et $\boldsymbol{m_{g_B}}$ s'exprime par : $\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_{g_A} m_{g_B}}}{\boldsymbol{AB^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{AB}}$

$\boldsymbol{G}$ est la constante gravitationnelle, sa valeur est déterminée expérimentalement et vaut $\boldsymbol{6,67259 \pm 0.00085 \times 10^{-11}}\ N.m^2.kg^{-2}$ ou $m^3kg^{-1}s^{-2}$

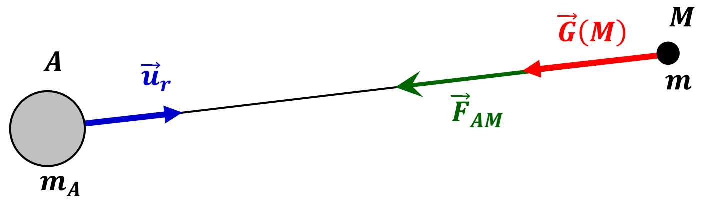
L'expérience montre l'identité entre ces masses gravitationnelles et les masses inertielles $\boldsymbol{m_i}$ des particules qui apparaissent dans la relation fondamentale de la dynamique : $\boldsymbol{m_i = m_g = m}$

V - 2 - champ gravitationnel d'une masse ponctuelle

Considérons un point matériel de masse $\boldsymbol{m_A}$, placé au point $\boldsymbol{A}$. La force gravitationnelle (due à la présence dans l'espace du point A) subie par une particule de masse $\boldsymbol{m}$ se trouvant au point $\boldsymbol{M}$ a pour expression :

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{AM}} = -\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_A m}}{\boldsymbol{AM^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}) \qquad \text{avec} \qquad \vec{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}) = -\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_A}}{\boldsymbol{AM^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} \qquad \text{et} \qquad \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}\|}$$

$\vec{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})$ est le champ gravitationnel crée en $\boldsymbol{M}$ par le point matériel placé en $\boldsymbol{A}$. Ce champ gravitationnel n'est pas modifié par la présence (ou l'absence) de la masse $\boldsymbol{m}$ placé en $\boldsymbol{M}$.



V - 3 - champ gravitationnel crée par uns distribution des masses ponctuelles

Considérons une distribution des masses $\boldsymbol{m_i}$ placées aux points $\boldsymbol{M_i}$.
La force subie par un point $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$, est égale à la somme de toutes les forces gravitationnelles exercées par les différents points $\boldsymbol{M_i}$: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i -G\frac{m_i m}{r_i^2}\vec{u}_{r_i} = m\vec{G}(M)$
avec $\vec{G}(M) = \sum_i \vec{G}(M_i)$ **et** $\vec{G}(M_i) = -G\frac{m_i}{r_i^2}\vec{u}_{r_i}$

$\vec{G}(M_i)$ est le champ gravitationnel crée, en $\boldsymbol{M}$, par le point $\boldsymbol{M_i}$

$\vec{G}(M)$ est le champ gravitationnel crée, en $\boldsymbol{M}$, par la distribution des masses $\boldsymbol{m_i}$

V - 4 - analogie avec l'interaction Coulombienne

La force gravitationnelle entre deux particules de masse m_1 et m_2 présente une analogie avec la force Coulombienne entre deux particules chargées de charges q_1 et q_2. On passe du champ électrostatique au champ gravitationnel en remplaçant $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $-G$ et q par m.

Plus généralement, le champ gravitationnel crée par une distribution quelconque de masses peut être calculé à partir du champ électrostatique crée par une distribution semblable de charges par la même correspondance.
Le théorème de Gauss établi en électrostatique peut ainsi s'utiliser en gravitation. En électrostatique, le théorème de Gauss s'énonce :
Le flux Ø sortant du champ électrique $\vec{E}$ (crée par une distribution de charges quelconque) à travers une surface fermée $\boldsymbol{S}$ est égal à la somme des charges intérieures à $\boldsymbol{S}$ divisée par ϵ_0 : $\emptyset = \oiint_S \vec{E}\,\vec{n}\,dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à $\boldsymbol{S}$.

Donc, le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel s'énonce : le flux sortant de $\vec{G}$ (crée par une distribution de masses quelconque) à travers une surface fermée $\boldsymbol{S}$ est égal à la somme des masses intérieures à $\boldsymbol{S}$ multipliée par $-4\pi G$: $\oiint_S \vec{G}\,\overrightarrow{dS} = -4\pi G m$
où $\boldsymbol{m}$ est la masse intérieure à la surface $\boldsymbol{S}$.

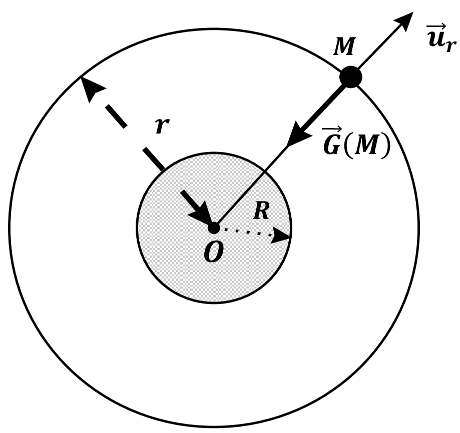
Ainsi, si μ est la masse volumique (pour une distribution volumique), alors :

$$\oiint_S m\vec{G}\,\overrightarrow{dS} = \Phi = -4\pi G \iiint_{\mathcal{v}} \mu d\mathcal{v}$$

où $\mathcal{v}$ est le volume intérieur à la surface $\boldsymbol{S}$.

V - 5 - corps à répartition de matière de symétrie sphérique

On s'intéresse ici au champ gravitationnel crée par certains corps célestes (astres) tels que la terre, la lune, le soleil. Pour de tels corps, nous admettons en première approximation, une répartition de matière de symétrie sphérique.



Soit un astre sphérique, de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon R_A, à répartition de masse dépendant donc que de la distance au centre $\boldsymbol{O}$.
Le théorème de Gauss affirme que, pour obtenir le champ radial $\vec{G}(M) = G(M)\,\vec{u}_r$, il suffit de considérer la sphère de **centre** $\boldsymbol{O}$ et de rayon $r = OM$

Le produit de $G(M)$ par la surface de cette sphère, qui vaut $4\pi r^2$ (c'est à dire, le flux du vecteur $\vec{G}$ à travers cette surface) est égal à la masse contenue dans cette sphère multipliée par un coefficient égal à $(-4\pi G)$

D'où : $4\pi r^2 G(r) = -4\pi G m_s$ avec m_s la masse de la sphère de rayon r

À l'extérieur de l'astre $(r > R_A)$ on a $m_S = M_A$ et le champ gravitationnel s'exprime par :

$$\vec{G}(M) = \vec{G}_{ext}(M) = -G\frac{M_A}{r^2}\vec{u}_r$$

où M_A est la masse de l'astre.

À l'extérieur, un corps à répartition sphérique de matière crée le même champ de gravitation qu'un point matériel de même masse totale M_A et placé en son centre O. Les astres étant supposés avoir une répartition de masse de symétrie sphérique, se comportent comme des points matériels confondus avec leurs centres.

À l'intérieur de l'astre, le résultat dépend de la loi de répartition de la matière. Pour une répartition volumique, si la masse volumique μ du corps sphérique est uniforme, $\mu = Cte = \frac{M_A}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, alors la masse de la sphère de rayon $r < R_A$ est égale à $m_S = \frac{M_A}{R^3}r^3$ et le champ gravitationnel s'exprime par :

$$\vec{G}(M) = \vec{G}_{int}(M) = -GM_A\frac{r}{R^3}\vec{u}_r$$

V - 6 - la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel géocentrique

Rappelons que le référentiel géocentrique est le référentiel dont le repère d'espace a son origine au centre d'inertie O de la terre, et ses axes Ox, Oy, Oz, sont respectivement parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

Considérons un point matériel M, de masse m, dont on étudie le mouvement dans le référentiel géocentrique R (en translation par rapport au référentiel de Copernic R_C).

Ce point matériel est soumis :

- aux forces gravitationnelles exercées par la terre, la lune et les autres planètes :

$$\vec{F} = m\vec{G}(M) \qquad \text{où} \qquad \vec{G}(M) = \vec{G}_T(M) + \vec{G}_L(M) + \vec{G}_S(M) + \vec{G}_A(M)$$

$\vec{G}_T(M)$ est le champ de gravitation de la terre crée au point M

$\vec{G}_S(M)$ est le champ de gravitation du soleil crée au point M

$\vec{G}_L(M)$ est le champ de gravitation de la lune crée au point M

$\vec{G}_A(M)$ est le champ de gravitation des autres astres (autre que la terre, la lune, ….) crée au point M

En raison de la décroissance en $\frac{1}{r^2}$ de l'interaction gravitationnelle, le terme $\vec{G}_T(M)$ est prépondérant (le point matériel est supposé situé au voisinage de la terre)

- à d'autres forces $\vec{F}_{ext}$ (force magnétique, force de frottement, …..)
- à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$ (la force d'inertie de Coriolis étant nulle puisque R est en translation par rapport au référentiel de Copernic).

or le référentiel géocentrique est en translation par rapport au référentiel de Copernic $R_C(C, xyz)$, d'où l'accélération d'entraînement de R par rapport à R_C est :

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\overrightarrow{CO}}{dt^2}\right)_{R_c} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{CO}}{dt^2}\right)_{R_c} = \left(\vec{a}(O)\right)_{R_c}$$

où $\left(\vec{a}(O)\right)_{R_c}$ est l'accélération du centre O de la terre par rapport à R_c donc $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = -m\left(\vec{a}(O)\right)_{R_c}$

La R. F. D dans le référentiel R s'écrit alors :

$$m\left(\vec{a}(M)\right)_R = \vec{F}_{ext} + m\{\vec{G}_T(M) + \vec{G}_L(M) + \vec{G}_S(M) + \vec{G}_A(M)\} - m\left(\vec{a}(O)\right)_{R_c}$$

Le centre d'inertie de la terre se comporte dans R_c comme un point matériel de masse M_T (masse de la terre) et subit l'interaction gravitationnelle des autres astres, ce qui conduit à :

$$M_T\left(\vec{a}(O)\right)_{R_c} = M_T\{\vec{G}_L(M) + \vec{G}_S(O) + \vec{G}_A(O)\} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\vec{a}(O)\right)_{R_c} = \vec{G}_L(M) + \vec{G}_S(O) + \vec{G}_A(O)$$

$$\Rightarrow m\left(\vec{a}(M)\right)_{R_c} = \vec{F}_A + m\vec{G}_T(M) + m\left\{\left(\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O)\right) + \left(\vec{G}_S(M) - \vec{G}_S(O)\right) + \left(\vec{G}_A(M) - \vec{G}_A(O)\right)\right\}$$

Le terme entre accolades est un terme qualifié de **différentiel**, appelé aussi **terme résiduel** ou encore **terme de marée**.

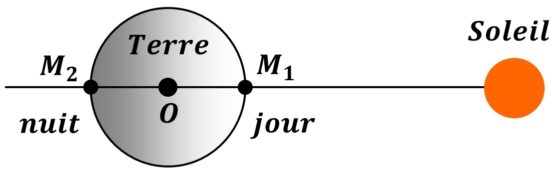
$\left(\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O)\right)$ est le terme **résiduel** ou **de marée** du à la lune

$\left(\vec{G}_S(M) - \vec{G}_S(O)\right)$ est le terme **résiduel** ou **de marée** du au soleil

$\left(\vec{G}_A(M) - \vec{G}_A(O)\right)$ est le terme **résiduel** ou **de marée** du aux autres astres

APPLICATION :

Évaluer la variation relative du poids d'un corps situé à l'équateur terrestre, dû au terme de marée solaire, les pesées ayant lieu en deux points diamétralement opposés (M_1 et M_2), alignés avec le centre de la terre et le soleil. On calculera le rapport $\frac{P(M_2)-P(M_1)}{P}$ et on procèdera à un développement limité à l'ordre deux. Les termes $P(M_1)$ et $P(M_2)$ sont les modules des poids aux points M_1 et M_2 et $P = mg$
Conclure concernant l'influence des termes différentiels sur le poids d'un corps.
On donne :
$d(terre - soleil) = 1,5 \times 10^{11}\ m$
$R_T = 6370\ km$
Masse du soleil : $M_S = 1,991 \times 10^{30}\ kg$
$G = 6,67x10^{-11}\ S.I$ **et** $g = 9,8\ m.s^{-2}$



Solution :

Le terme de marée en M_1 *est :* $\vec{G}_S(M_1) - \vec{G}_S(O) = -\left[\frac{GM_S}{(d-R_T)^2} - \frac{GM_S}{d^2}\right]\vec{u}_r$

$\vec{G}_S(M_1) - \vec{G}_S(O) = -GM_S\left[\frac{1}{(d-R_T)^2} - \frac{1}{d^2}\right]\vec{u}_r$

$\Rightarrow \vec{G}_S(M_1) - \vec{G}_S(O) = -\frac{GM_S}{d^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{R_T}{d}\right)^2} - 1\right]\vec{u}_r = -\frac{GM_S}{d^2}\left[\left(1-\frac{R_T}{d}\right)^{-2} - 1\right]\vec{u}_r$

effectuons un développement limité à l'ordre 2 de $\left(1-\frac{R_T}{d}\right)^{-2}$

$\left(1-\frac{R_T}{d}\right)^{-2} \approx 1 + 2\frac{R_T}{d} + 3\left(\frac{R_T}{d}\right)^2$

$\Rightarrow \vec{G}_S(M_1) - \vec{G}_S(O) = -\frac{GM_S}{d^2}\left[1 + 2\frac{R_T}{d} + 3\left(\frac{R_T}{d}\right)^2 - 1\right]\vec{u}_r = \frac{GM_S}{d^2}\left[-2\frac{R_T}{d} - 3\left(\frac{R_T}{d}\right)^2\right]\vec{u}_r$

Le terme de marée en M_2 est : $\vec{G}_S(M_2) - \vec{G}_S(O) = -\left[\frac{GM_S}{(d+R_T)^2} - \frac{GM_S}{d^2}\right]\vec{u}_r$

$\vec{G}_S(M_2) - \vec{G}_S(O) = -GM_S\left[\frac{1}{(d+R_T)^2} - \frac{1}{d^2}\right]\vec{u}_r$

$\Rightarrow\ \vec{G}_S(M_2) - \vec{G}_S(O) = -\frac{GM_S}{d^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{R_T}{d}\right)^2} - 1\right]\vec{u}_r = -\frac{GM_S}{d^2}\left[\left(1+\frac{R_T}{d}\right)^{-2} - 1\right]\vec{u}_r$

effectuons un développement limité à l'ordre 2 de $\left(1+\frac{R_T}{d}\right)^{-2}$

$\left(1-\frac{R_T}{d}\right)^{-2} \approx 1 - 2\frac{R_T}{d} + 3\left(\frac{R_T}{d}\right)^2$

$\Rightarrow\ \vec{G}_S(M_2) - \vec{G}_S(O) = -\frac{GM_S}{d^2}\left[1 - 2\frac{R_T}{d} + 3\left(\frac{R_T}{d}\right)^2 - 1\right]\vec{u}_r = \frac{GM_S}{d^2}\left[2\frac{R_T}{d} - 3\left(\frac{R_T}{d}\right)^2\right]\vec{u}_r$

$\vec{P}_2 = m\left(\vec{G}_S(M_2) - \vec{G}_S(O)\right)$ *et* $\vec{P}_1 = m\left(\vec{G}_S(M_1) - \vec{G}_S(O)\right)$

$P_1 = m\frac{GM_S}{d^2}\left[-2\frac{R_T}{d} - 3\left(\frac{R_T}{d}\right)^2\right]$ *et* $P_2 = m\frac{GM_S}{d^2}\left[-2\frac{R_T}{d} + 3\left(\frac{R_T}{d}\right)^2\right]$

$\Rightarrow\ P_2 - P_1 = m\frac{GM_S}{d^2}\left[-2\frac{R_T}{d} - 3\left(\frac{R_T}{d}\right)^2 + 2\frac{R_T}{d} + 3\left(\frac{R_T}{d}\right)^2\right]$ *et* $P = mg$ $\Rightarrow\ \frac{P_2-P_1}{P} = 6\frac{GM_S}{g}\frac{R_T^2}{d^4}$

V - 7 - analyse du terme différentiel

V - 7 - a – terme différentie produit par un astre en un point M de la terre

Étudions le terme différentiel produit par un astre $\boldsymbol{A}$, de masse $\boldsymbol{M_A}$, en un point $\boldsymbol{M}$ de la surface terrestre. On se place dans le cas où $\boldsymbol{OA}$ (O centre de la terre) est contenu dans le plan équatorial terrestre. On admet que l'astre et la terre ont une symétrie sphérique. D'après le § V - 5, à l'extérieure, l'astre crée le même champ de gravitation qu'un point matériel de même masse totale $\boldsymbol{M_A}$ et placé en son centre $\boldsymbol{A}$.

Le terme différentiel du à l'astre $\boldsymbol{A}$ est :

$$\vec{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) - \vec{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{O}) = \frac{\boldsymbol{GM_A}}{\boldsymbol{MA^2}}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}\|} - \frac{\boldsymbol{GM_A}}{\boldsymbol{OA^2}}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\|} = \boldsymbol{GM_A}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{MA^3}}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{OA^3}}\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\right)$$

Considérons le référentiel $\boldsymbol{R(O,xyz)}$ de **BOND** $(\vec{\boldsymbol{\imath}},\vec{\boldsymbol{\jmath}},\vec{\boldsymbol{k}})$, où l'axe $\boldsymbol{Ox}$ passe par le centre de l'astre $\boldsymbol{A}$ et l'axe $\boldsymbol{Oz}$ est l'axe de rotation de la terre.

Soient $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ les coordonnées du point $\boldsymbol{M}$ et rappelons que la distance qui sépare les points $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{O}$ est faible devant la distance qui sépare le centre de la terre et le centre de l'astre (distance $\boldsymbol{OA}$)

$\Rightarrow\ \boldsymbol{x \ll OA}$; $\boldsymbol{y \ll OA}$ et $\boldsymbol{z \ll OA}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{OA}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} = \overrightarrow{\boldsymbol{MO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{OA - x}\\ \boldsymbol{-y}\\ \boldsymbol{-z}\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{MA^3} = \left[(\boldsymbol{OA - x})^2 + \boldsymbol{y^2} + \boldsymbol{z^2}\right]^{\frac{3}{2}} = \left[\boldsymbol{OA^2}\left(\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{OA}}\right)^2 + \boldsymbol{OA^2}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{OA}}\right)^2 + \boldsymbol{OA^2}\left(\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{OA}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

$$\boldsymbol{MA^3} = \boldsymbol{OA^3}\left[\left(\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{OA}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{OA}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{OA}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

puisque $\boldsymbol{y \ll OA}$ et $\boldsymbol{z \ll OA}$, alors : $\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{OA}}\right)^2 \ll \boldsymbol{1}$ et $\left(\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{OA}}\right)^2 \ll \boldsymbol{1}$

$\Rightarrow \quad MA^3 \approx OA^3 \left[\left(1-\frac{x}{OA}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = OA^3\left(1-\frac{x}{OA}\right)^3$

appliquons maintenant le développement limité d'ordre un :

$$MA^3 \approx OA^3\left(1-\frac{x}{OA}\right)^3 \approx OA^3\left(1-3\frac{x}{OA}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{MA^3} \approx \frac{1}{OA^3}\left(1+3\frac{x}{OA}\right)$$

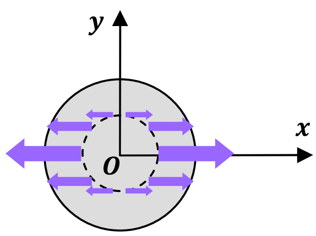
$$\Rightarrow \vec{G}_A(M)-\vec{G}_A(O) \approx \frac{GM_A}{OA^3}\left(\overrightarrow{MA}+3\frac{x}{OA}\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{OA}\right) = \frac{GM_A}{OA^3}\left(\overrightarrow{MO}+3x\frac{\overrightarrow{MA}}{OA}\right)$$

or $\frac{\overrightarrow{MA}}{OA} = \left|\begin{array}{l} 1-\frac{x}{OA} \approx 1 \\ -\frac{y}{OA} \approx 0 \\ -\frac{z}{OA} \approx 0 \end{array}\right.$

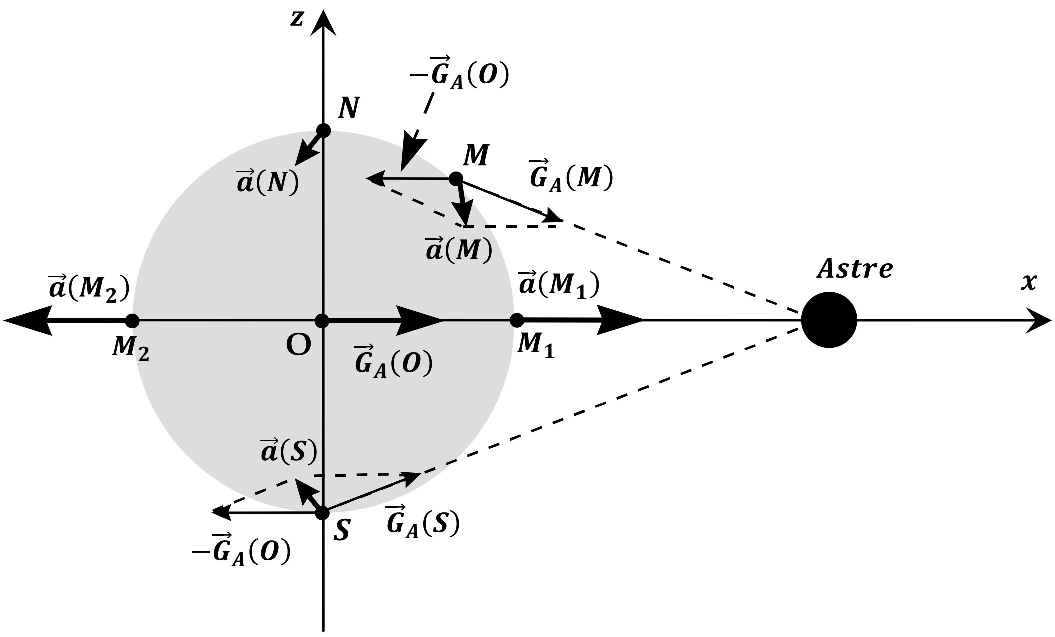
$$\Rightarrow \vec{G}_A(M)-\vec{G}_A(O) \approx \frac{GM_A}{OA^3}\left(\overrightarrow{MO}+3x\vec{\imath}\right) = \frac{GM_A}{OA^3}\overrightarrow{MO}+3x\frac{GM_A}{OA^3}\vec{\imath}$$

Le premier terme est porté par $\overrightarrow{MO}$, donc il s'ajoute à l'interaction gravitationnelle terrestre sans toutefois trop la modifier puisqu'il varie en $\frac{1}{OA^3}$

Le deuxième terme représente un champ parallèle à l'axe Ox reliant le centre O de la terre et le centre A de l'astre et il est dirigé de O vers A. Il est proportionnel à la distance qui sépare le point M au plan méridien normal à OA. Tout se passe comme si le point M est soumis de la part de ce plan méridien à un champ de répulsion proportionnel à la distance qui sépare le point M de ce plan.



On conçoit que la valeur de $\vec{a}(M) = \vec{G}_A(M)-\vec{G}_A(O)$ est maximale aux points M_1 et M_2 situés sur l'équateur ($x = OA - R_T$ et $x = OA + R_T$ où R_T est le rayon de la terre) et elle est minimale aux points N et S (le nord et le sud où $x = 0$).



V - 7 - b - phénomène des marées

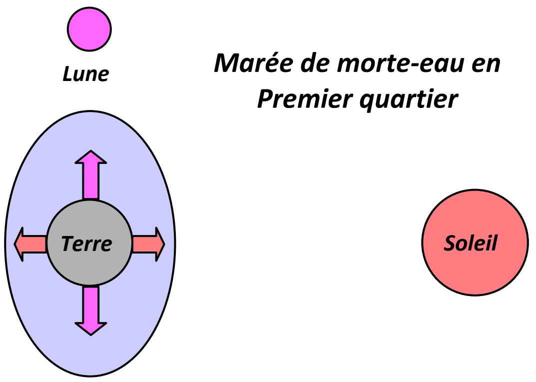
L'étude du paragraphe précédent permet d'expliquer la variation du niveau de la mer due à l'action gravitationnelle de la **lune** et du **soleil** appelé phénomène des **marées**. L'un des buts de l'étude des marées est la

recherche des relations existant entre le mouvement des astres et la réponse des océans à l'action de ces forces gravitationnelles.
L'effet de la lune se manifeste par une répulsion de la part du plan méridien perpendiculaire à la direction $\boldsymbol{OL}$ (L est le centre de la lune). Au cours d'une rotation de la terre autour de l'axe $\boldsymbol{Oz}$ (Nord-Sud), le point $\boldsymbol{M}$ est soumis deux fois à une telle force, d'où l'existence de deux marées quotidiennes que la lune produit sur la terre (bourrelets océaniques).
Les autres astres apportent une contribution, plus ou moins importante, au phénomène. Le tableau suivant donne les valeurs du rapport $\frac{M_A}{OA^3}$ pour certains astres :

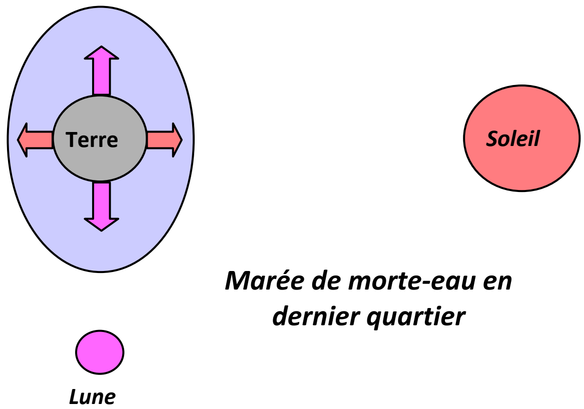
Astre	*Lune*	*Soleil*	*Vénus*	*Jupiter*
$\frac{M_A}{OA^3}$	$1{,}3 \times 10^{-3}$	$0{,}6 \times 10^{-3}$	7×10^{-8}	6×10^{-9}

On remarque bien que l'effet de la lune est le plus important, donc il faut tenir compte de l'effet du soleil qui dépendra de la position de la lune. Les schémas suivants résument les différentes situations :

♦ Les effets du soleil et de la lune peuvent s'annuler aux premier et dernier quartier. On parle dans ce cas de marées de **morte-eau**



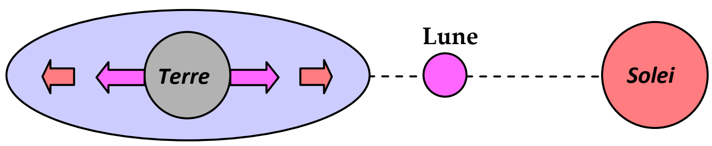
Marée de morte-eau en Premier quartier

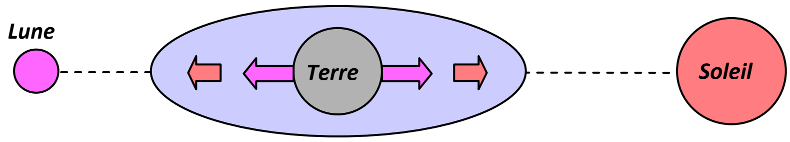


Marée de morte-eau en dernier quartier

♦ Les effets du soleil et de la lune peuvent s'ajouter lorsque le soleil, la lune et la terre sont alignés (pleine lune et nouvelle lune). On parle dans ce cas de marées de **vive-eau**.

Marée de vive-eau en nouvelle lune





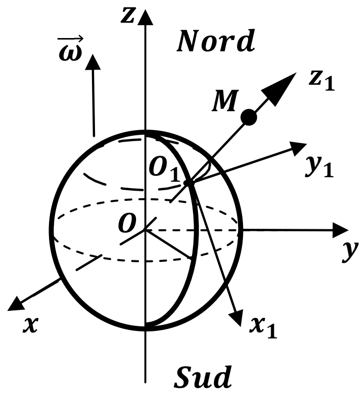
Marée de vive-eau en pleine lune

V - 8 - dynamique en référentiel terrestre

V - 8 - a - force d'entraînement et poids

Considérons le référentiel lié à la surface terrestre $\boldsymbol{R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)}$, tel que l'axe $\boldsymbol{O_1x_1}$ est dirigé vers le sud, l'axe $\boldsymbol{O_1\ y_1}$ vers l'est et l'axe $\boldsymbol{O_1z_1}$ choisi suivant la verticale ascendante.

Considérons l'équilibre d'un point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$, situé au sommet d'une tour de hauteur $\boldsymbol{h}$ et de latitude $\boldsymbol{\lambda}$.



En négligeant la rotation de la terre autour de l'axe nord-sud, le référentiel terrestre $\boldsymbol{R_1}$ peut être considéré comme galiléen.

Dans le référentiel $\boldsymbol{R_1}$, supposé galiléen, le point $\boldsymbol{M}$ est soumis à son poids $\vec{p} = m\vec{g}$ et à la réaction $\vec{N}$ de la tour. La condition d'équilibre dans $\boldsymbol{R_1}$ s'écrit :
$\vec{p} + \vec{N} = \vec{0}$ équation (1)

En réalité, le référentiel $\boldsymbol{R_1}$ n'est pas galiléen puisqu'il est en rotation à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ par rapport au référentiel géocentrique $R_{géo}(O, xyz)$ qui est le référentiel lié au centre $\boldsymbol{O}$ de la terre. Le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen. En outre, dans $R_{géo}$, l'action de la terre sur le point matériel $\boldsymbol{M}$ est représentée par la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}_g = m\vec{G}(M)$ où $\vec{G}(M)$ est le champ gravitationnel crée par la terre au point $\boldsymbol{M}$ et qui s'exprime par :

$$\vec{G}(M) = -G\frac{M_T}{r^2}\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$$

avec M_T la masse de la terre et $r = R_T + h$ où R_T est le rayon de la terre.

Dans le référentiel $\boldsymbol{R_1}$, qui maintenant n'est pas galiléen, le point $\boldsymbol{M}$ est soumis à la réaction de la tour, à la force gravitationnelle exercée par la terre et à la force d'entraînement $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$
La condition d'équilibre dans le référentiel $\boldsymbol{R_1}$ s'écrit maintenant :

$\vec{F}_g + \vec{N} + \vec{F}_e = \vec{0}$ équation (2)

$$équation\ (1) = équation\ (2) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_g + \vec{N} + \vec{F}_e = \vec{p} + \vec{N} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_e$$

Donc il est important de noter que **la force d'entraînement est incluse dans le poids d'un corps**.

L'équation précédente s'écrit aussi : $\vec{p} = m\vec{g} = m\vec{G}(M) + m\vec{a}_e \quad \Rightarrow \quad \vec{g} = \vec{G}(M) + \vec{a}_e$

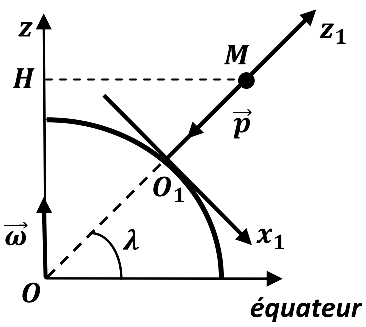
V - 8 - b - l'influence de la force d'inertie de Coriolis en référentiel terrestre

Reprenons l'exemple du point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$, situé au sommet d'une tour de hauteur $\boldsymbol{h}$ et de latitude $\boldsymbol{\lambda}$ (exemple du paragraphe précédent)

Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$, on lâche le point $\boldsymbol{M}$, sans vitesse initiale dans $\boldsymbol{R_1}$, depuis l'altitude $\boldsymbol{h}$. On néglige, la force de frottement de l'air ainsi que la variation de $\vec{g}$ avec l'altitude.

La R.F.D dans le référentiel $\boldsymbol{R_1}$ (non galiléen) s'écrit :

$$\vec{p} + \vec{F}_c = m\vec{a}_r$$



où $\vec{a}_r$ est l'accélération du point $\boldsymbol{M}$ dans le référentiel $\boldsymbol{R_1}$ (accélération relative) et $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$ la force d'inertie de Coriolis. D'après le paragraphe précédent, la force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids $\vec{p}$ de la particule.

L'expression vectorielle précédente de la R.F.D est équivalente à :

$\vec{g} - \vec{a}_c = \vec{a}_r$ or $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$

avec $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \omega\left(-\cos\lambda\,\vec{i}_1 + \sin\lambda\,\vec{k}_1\right)$

$\vec{V}_r = \dot{z}_1\vec{k}_1$

la vitesse relative est principalement verticale descendante (on néglige les autres composantes)
$\vec{g} = -g\vec{k}_1$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r = \begin{vmatrix} -2\omega\dot{y}_1\sin\lambda \\ -2\omega\dot{x}_1\sin\lambda\,2\omega\dot{z}_1\cos\lambda \\ -2\omega\dot{y}_1\cos\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2\omega\dot{z}_1\cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix}$$

La projection sur les axes Ox_1, Oy_1 et Oz_1, de l'expression vectorielle de la R.F.D, appliquée au point matériel dans le référentiel R_1**,** fournit les trois équations suivantes :

$\ddot{x}_1 = 0$ équation (1)
$\ddot{y}_1 = -2\omega\dot{z}_1\cos\lambda$ équation (2)
$\ddot{z}_1 = -g$ équation (3)

équation (1) $\Rightarrow$ $\dot{x}_1 = Cte = A$, or à l'instant initial $t = 0$, $\dot{x}_1 = 0 = A$

$\Rightarrow$ $x_1 = Cte = B$, or à l'instant initial $t = 0$, $x_1 = 0 = B$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$

équation (3) $\Rightarrow$ $\dot{z}_1 = -gt + Cte$, or à l'instant initial $t = 0$, $\dot{z}_1 = 0 = Cte$ $\Rightarrow$ $z_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + Cte$, or à l'instant initial $t = 0$, $z_1 = 0 = Cte$ $\Rightarrow$ $z_1 = -\frac{1}{2}gt^2$, on reconnaît l'équation du mouvement d'une particule en chute libre (suivant la verticale ascendante Oz) dans un référentiel galiléen

équation (2) $\Rightarrow$ $\dot{y}_1 = (\omega g\cos\lambda)t^2 + Cte$, or à l'instant initial $t = 0$, $\dot{y}_1 = 0 = Cte$
$\Rightarrow$ $y_1 = \frac{1}{3}(\omega g\cos\lambda)t^3 + Cte$, or à l'instant initial $t = 0$, $y_1 = 0 = Cte$
$\Rightarrow$ $y_1 = \frac{1}{3}(\omega g\cos\lambda)t^3 > 0$

On remarque donc, que l'effet de la force de Coriolis est de dévier vers l'est (axe O_1y_1) des corps tombant en chute libre. Cependant, cet effet est très faible et souvent il est négligé. Par exemple pour une hauteur $h = 100\ m$ et pour une latitude $\lambda = 45°$, la déviation y_1 est égale à $1,5\ cm$, ce qui est très faible et cette déviation vers l'est, due à la force de Coriolis n'intervient que dans les cas où une grande précision est exigée.

Chapitre IX

SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS EN INTERACTION

Dans ce chapitre, on va analyser le mouvement d'un système constitué de deux particules. On va introduire la notion de quantité de mouvement d'un système formé de deux points matériels et on démontrera que cette quantité se conserve lorsque le système est isolé. On verra que le mouvement global d'un système de deux particules, dans un référentiel bien déterminé, peut être représenté par le mouvement d'une seule particule dite fictive.

Considérons donc, dans un référentiel galiléen d'origine $\boldsymbol{O}$ et d'axes $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$ et $\boldsymbol{Oz}$, deux particules $\boldsymbol{M_1}$ et $\boldsymbol{M_2}$, de masses respectives $\boldsymbol{m_1}$ et $\boldsymbol{m_2}$.

On notera, avec $\boldsymbol{i = 1, 2}$:

$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_{\boldsymbol{i}}$ vecteur position dans le référentiel $\boldsymbol{R}$ de la particule $\boldsymbol{M_i}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{M_1M_2}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_{\boldsymbol{2}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_{\boldsymbol{1}}$, vecteur position relative, dans le référentiel $\boldsymbol{R}$**,** de $\boldsymbol{M_2}$ par rapport à $\boldsymbol{M_1}$

$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{i}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_i}{dt}\right)_{\boldsymbol{R}}$ vecteur vitesse dans le référentiel $\boldsymbol{R}$ de la particule $\boldsymbol{M_i}$

$\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{i}} = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{V}}_i}{dt}\right)_{\boldsymbol{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_i}{dt^2}\right)_{\boldsymbol{R}}$ vecteur accélération dans le référentiel $\boldsymbol{R}$ de la particule $\boldsymbol{M_i}$

$\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{m_i}\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{i}}$ vecteur quantité de mouvement dans le référentiel $\boldsymbol{R}$ de la particule $\boldsymbol{M_i}$

$\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} - \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{M_1M_2}}}{dt}\right)_{\boldsymbol{R}}$ la vitesse relative de $\boldsymbol{M_2}$ par rapport à $\boldsymbol{M_1}$

I - CENTRE DE MASSE (OU CENTRE D'INERTIE) ET RÉFÉRENTIEL DU CENTRE DE MASSE

I - 1 - définition du centre de masse (centre d'inertie, barycentre)

Par définition, on appelle, **centre de masse**, ou **centre d'inertie**, ou **barycentre**, du système, le point **G** tel que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \frac{\sum_i^N \boldsymbol{m_i}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_{\boldsymbol{i}}}{\sum_i^N \boldsymbol{m_i}}$$

Pour un système formé de deux particules : $\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \frac{\boldsymbol{m_1}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{m_2}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2}}$

Remarques :

① *une deuxième équation pour définir le point G :*

on a $\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \frac{\sum_i^N \boldsymbol{m_i}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_i}{\sum_i^N \boldsymbol{m_i}}$ $\Rightarrow$ $\left(\sum_i^N \boldsymbol{m_i}\right)\overrightarrow{OG} = \sum_i^N \boldsymbol{m_i}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} + \overrightarrow{\boldsymbol{GM}}_i\right) = \left(\sum_i^N \boldsymbol{m_i}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} + \sum_i^N \boldsymbol{m_i}\,\overrightarrow{\boldsymbol{GM}}_{\boldsymbol{i}}$

$\Rightarrow$ $\sum_i^N \boldsymbol{m_i}\,\overrightarrow{\boldsymbol{GM}}_{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ $\Rightarrow$ $\sum_i^N \boldsymbol{m_i}\,\overrightarrow{\boldsymbol{GM}}_{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{0}}$

Donc, le **centre de masse**, du système $\boldsymbol{S}$, est le point $\boldsymbol{G}$ tel que : $\sum_i^N m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$

Pour un système formé par deux points matériels on a : $m_1\overrightarrow{GM}_1 + m_2\overrightarrow{GM}_2 = \vec{0}$

② *vitesse et accélération du centre de masse*

à partir de l'expression du centre de masse, on a :

$\vec{V}_G = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i\vec{V}_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2}{m_1+m_2}$ $\vec{V}_G$est la vitesse du centre de masse

$\vec{a}_G = \left(\frac{d\vec{V}_G}{dt}\right)_R = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i\vec{a}_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2}{m_1+m_2}$ $\vec{a}_G$ est l'accélération du centre de masse

③ choisissons une deuxième origine $\boldsymbol{O}'$ et appelons $\boldsymbol{G}'$ le barycentre des deux particules, défini à partir de $\boldsymbol{O}'$. D'après la définition du centre de masse on :

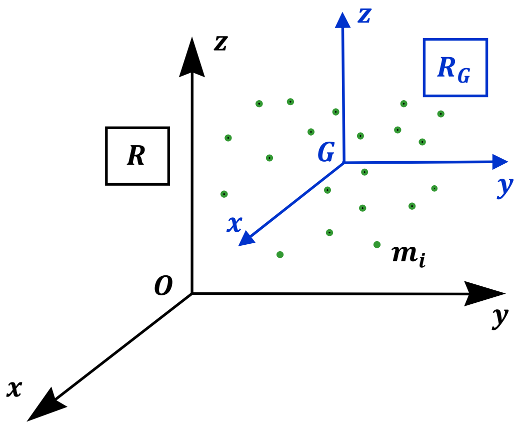
$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i\overrightarrow{O'M}_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OM}_i)}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \overrightarrow{O'O} + \frac{\sum_{i=1}^2 m_i\overrightarrow{OM}_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O'G}$$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{O'G} \quad \Rightarrow \quad G' \equiv G$

donc, la définition de $\boldsymbol{G}$ est indépendante de l'origine $\boldsymbol{O}$

I - 2 - définition du référentiel du centre de masse R_G (ou R^*) ou référentiel barycentrique

On appelle **référentiel du centre de masse** ou **référentiel barycentrique** $R_G(G, xyz)$, le référentiel d'origine $\boldsymbol{G}$ et d'axes $\boldsymbol{Gx}$, $\boldsymbol{Gy}$, $\boldsymbol{Gz}$, parallèles respectivement à $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$, $\boldsymbol{Oz}$.



Remarque :

D'après sa définition, le référentiel du centre de masse R_G (noté aussi R^*) est animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport au référentiel galiléen $\boldsymbol{R}$.

II - Expressions des Grandeurs Cinétiques et Énergétiques, dans le référentiel R, d'un système de deux points matériels

À partir de la définition du centre de masse, an a :

$\sum_{i=1}^2 m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$ c'est-à-dire $m_1\overrightarrow{GM}_1 + m_2\overrightarrow{GM}_2 = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad m_1\overrightarrow{GM}_1 + m_2\overrightarrow{GM}_1 + m_2\overrightarrow{M_1M}_2 = \vec{0}$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2}$

de même on montre qu $\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2}$

donc : $\left|\begin{array}{l} \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{\mu}{m_1}\overrightarrow{M_1M_2} \\ \\ \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{\mu}{m_2}\overrightarrow{M_1M_2} \end{array}\right.$

où μ est la **masse réduite** du système à deux particules : $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ ou encore $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

Remarque :

Si le point M_1 a une masse très grande devant celle du point M_2 ($m_1 \gg m_2$), alors la masse réduite est égale à celle du corps le moins massif ($\mu \approx m_2$) et le centre de masse G est confondu avec le centre du corps le plus massif et le référentiel barycentrique dans lequel se fait l'étude est alors lié au centre du corps le plus massif. En effet, si $m_1 \gg m_2$, alors $\frac{m_2}{m_1} \ll 1$ et on a :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \simeq \frac{1}{m_2} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \approx m_2$$

et

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1}+m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1+m_2} \simeq \frac{m_1}{m_1}\overrightarrow{OM_1} + \frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{OM_2} \simeq \overrightarrow{OM_1} \qquad \Rightarrow \qquad G \cong M_1$$

II - 1 – vitesses $\vec{V_i}$ dans R

La vitesse $\vec{V_i}$, dans le référentiel R de la particule M_i est :

$$\vec{V_i} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{GM_i}}{dt}\right)_R$$

Or les dérivées par rapport au temps dans R et dans R_G sont les mêmes, car le référentiel R_G est en mouvement de translation par rapport au référentiel R.

Ce qui donne :

$$\vec{V_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt}\right)_{R_G} = \vec{V_G} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right)_{R_G}$$

et

$$\vec{V_2} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt}\right)_{R_G} = \vec{V_G} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right)_{R_G}$$

c'est à dire :

$$\vec{V_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}\right)_R = \vec{V_G} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V} = \vec{V_G} - \frac{\mu}{m_1}\vec{V}$$

et

$$\vec{V_2} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}\right)_R = \vec{V_G} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V} = \vec{V_G} + \frac{\mu}{m_2}\vec{V}$$

rappelons que $\vec{V} = \left(\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right)_{R_G}$ est la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1

II - 2 - quantité de mouvement

La quantité de mouvement totale du système est par définition, la somme de toutes les quantités de mouvement des différentes particules qui constituent le système :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{2} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{2} m_i \vec{V}_i$$

Pour un système formé de deux particules :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}_G$$

$\vec{p}$ est également appelée résultante cinétique.

II - 3 - moment cinétique

Le moment cinétique en O du système, dans le référentiel R, est égal à la somme des moments cinétiques en O des différents points matériels qui le constituent, soit :

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i\vec{V}_i = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1\vec{V}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2\vec{V}_2$$

II - 4 - résultante des forces - moment des forces

II - 4 - a - résultante des forces

Soit $\vec{F}_i$ la résultante des forces appliquées au point M_i

$\vec{F}_i$ est la somme, de la résultante des forces extérieures au système S (telles que le poids, la force électrique, ……) notée $\vec{F}_{i,ext}$ et des forces exercées sur la particule M_i, par l'ensemble des autres points matériels appartenant au système S, dites des **forces intérieures** (forces d'interaction mutuelle), notée $\vec{F}_{i,int} = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{j,i}$ où $\vec{F}_{j,i}$ est la force qu'exerce la particule M_j sur la particule M_i

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int} = \vec{F}_i = \vec{F}_{i,ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j,i}$$

La R. F. D appliquée au point matériel M_i, dans le référentiel R, implique :

$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int} = \vec{F}_{i,ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j,i} = m_i\vec{a}_i$ avec $\vec{a}_i$ l'accélération, dans le référentiel R, de la particule M_i

Soit $\vec{F} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i$ la résultante des forces appliquées au système.

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{i,ext} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j,i}$ c'est-à-dire $\vec{F} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1}$

D'après le principe de l'action est de la réaction (§ II - 3 du chapitre III), si la particule M_j agit sur la particule M_i par la force $\vec{F}_{j,i}$, la particule M_i réagit sur la particule M_j par la force $\vec{F}_{i,j}$ telle que : $\vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$ ce qui implique que $\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} = \vec{0}$

Donc la résultante des forces intérieures (forces d'interaction entre les différents points matériels constituant le système) est nulle et la résultante des forces qui agissent sur le système se résume simplement à la résultante des forces extérieures.

Pour un système formé de deux particules : $\vec{F} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{i,ext}$

II - 4 - b- moment des forces

Le moment de la résultante des forces appliquées au système est la somme du moment de la résultante des forces intérieures et du moment de la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur le système :

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_{i,ext} + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_{i,int} = \vec{M}_o(\vec{F}_{i,ext}) + \vec{M}_o(\vec{F}_{i,int})$$

$\vec{M}_o(\vec{F}_{i,int})$ est la résultante des moments des forces intérieures

$\vec{M}_o(\vec{F}_{i,ext})$ est la résultante des moments des forces extérieures

$$\vec{M}_o(\vec{F}_{i,int}) = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2,1} + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1,2}$$

or $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_o(\vec{F}_{i,int}) = (\overrightarrow{M_1M_2}) \wedge \vec{F}_{1,2}$

or $\vec{F}_{1,2}$ est une force d'interaction entre les particules M_1 et M_2 et d'après le principe des actions réciproques cette force est portée par M_1M_2, donc $\vec{F}_{1,2}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires

$\Rightarrow \quad \vec{M}_o(\vec{F}_{i,int}) = \vec{0}$ c'est à dire que le moment des forces intérieures est nul

Donc, le moment de la résultante des forces appliquées au système est simplement égal au moment de la résultante des forces extérieures :

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_o(\vec{F}_{i,ext}) = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1\vec{a}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2\vec{a}_2$$

Remarques :

① *théorème de la quantité de mouvement*

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{i,ext} = \sum_{i=1}^{2} m_i\vec{a}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2} m_i\vec{V}_i\right) = \frac{d}{dt}\left\{\left(\sum_{i=1}^{2} m_i\right)\vec{V}_G\right\} = \frac{d\vec{P}}{dt} = (m_1 + m_2)\vec{a}_G$$

donc, " le mouvement du centre d'inertie d'un système de deux points matériels est celui d'un point qui aurait pour masse la masse totale du système et auquel serait appliquée la résultante des forces exercée sur le système".

② *cas d'un système isolé*

Dans le cas où le **système est isolé**, c'est à dire $\vec{F} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{i,ext} = \vec{0}$ (rappelons que $\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{i,int} = \vec{0}$ d'après le principe de l'action et de la réaction) on aura :

- d'une part :

$\vec{a}_G = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_G = \overrightarrow{Ct} \quad \Rightarrow \quad R_G$ est animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à R; donc le référentiel R_G est **galiléen**

- d'autre part :

$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{Constant}$

la **quantité de mouvement totale** se **conserve** pour un système **isolé**.

③ *théorème du moment cinétique*

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_o(\vec{F}_{i,ext}) + \vec{M}_o(\vec{F}_{i,int}) = \vec{M}_o(\vec{F}_{i,ext})$$

Pour un **système isolé** ($\vec{M}_o(\vec{F}_{i,ext}) = \vec{0}$), on a : $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{L}_o = \overrightarrow{Ct}$

Donc pour un système isolé le moment cinétique se conserve.

II - 5 - énergie cinétique

L'énergie cinétique du système dans le référentiel $\boldsymbol{R}$ est égale à la somme des énergies cinétiques dans $\boldsymbol{R}$, des différents points matériels qui le constituent.

$$E_c = \sum_i^2 \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}$$

Remarque :

① Soit $\vec{F}_i$ la résultante des forces appliquées au point M_i.
$\vec{F}_i$ est la somme des forces extérieures et des forces intérieures.
le travail élémentaire de la force $\vec{F}_i$ est :

$$\delta W = \vec{F}_i d\overrightarrow{OM}_i = (\vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int}) d\overrightarrow{OM}_i = \vec{F}_{i,ext} d\overrightarrow{OM}_i + \vec{F}_{i,int} d\overrightarrow{OM}_i$$

$$\delta W_i = \delta W_{i,int} + \delta W_{i,ext} = m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \vec{V}_i\, dt = d\left(\frac{1}{2} m_i V_i^2\right) = dE_{c,i}$$

où $\delta W_{i,int} = \vec{F}_{i,int} d\overrightarrow{OM}_i$ et $\delta W_{i,ext} = \vec{F}_{i,ext} d\overrightarrow{OM}_i$

$\Rightarrow$ $\delta W_{int} + \delta W_{ext} = dE_c$ et $E_c = \sum_i^2 \frac{1}{2} m_i V_i^2$

avec :

$\delta W_{ext} = \sum_i^2 \delta W_{i,ext}$ est le travail élémentaire des forces extérieures
et
$\delta W_{int} = \sum_i^2 \delta W_{i,int}$ est le travail élémentaire des forces intérieures

Entre deux instants $\mathbf{t_1}$ et $\mathbf{t_2}$, on a : $W_{int} + W_{ext} = \Delta E_c$

② ***cas d'un système isolé***

D'après le théorème de l'énergie cinétique, puisque $\delta W_{ext} = 0$, on a:

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = \delta W_{int} = dE_c$$

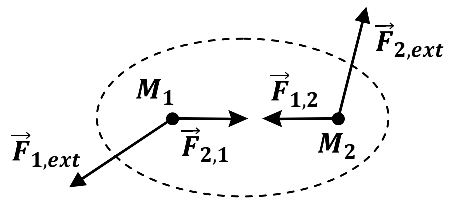
dE_c est généralement non nul, et par suite $\delta W_{int} = dE_c$ est généralement non nul. Donc bien que la résultante des forces intérieures et la somme des moments des forces intérieures soient nulles, les forces intérieures travaillent.

II - 6 - énergie mécanique

II - 6 - a - énergie potentielle d'interaction entre deux particules

Soient :

$\vec{F}_{1,2}$ la force qu'exerce la particule M_1 sur la particule M_2
$\vec{F}_{2,1}$ la force qu'exerce la particule M_2 sur la particule M_1



Système de deux points matériels

D'après le principe de l'action et de la réaction on a : $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$

Supposons que les forces d'interaction dérivent d'une énergie potentielle, ce qui est généralement le cas : $\vec{F}_{1,2} = -\overrightarrow{grad}E_p$

E_p est appelée **énergie potentielle d'interaction**.

Pour un **système isolé**, on a :

$$dE_p = -\delta W = -\left(\vec{F}_{2,1}d\overrightarrow{OM}_1 + \vec{F}_{1,2}d\overrightarrow{OM}_2\right) = -\vec{F}_{1,2}\left(d\overrightarrow{OM}_2 - d\overrightarrow{OM}_1\right) = \vec{F}_{1,2}d\overrightarrow{M_1M_2}$$

Or $\vec{F}_{1,2}$ (et $\vec{F}_{2,1}$) est une force d'interaction entre les particules M_1 et M_2 et d'après le principe des actions réciproques cette force ne dépend que de la distance qui sépare les deux particules M_1 et M_2, soit $M_1M_2 = r$. En outre, la norme de $\overrightarrow{M_1M_2}$ ne dépend que $M_1M_2 = r$ ce qui implique que l'énergie potentielle ne dépend que de la distance qui sépare les deux particules : $E_p = E_p(r)$

Étant donnée que la distance entre les particules ne varie pas quand on passe d'un référentiel à un autre, l'énergie potentielle d'interaction est invariante par changement de référentielle. Donc, dans le référentiel du centre de masse R_G, l'énergie potentielle d'interaction entre les deux particules (relative aux forces intérieures supposées conservatives) est aussi égale à $E_p(r)$

II - 6 - b - énergie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$E_m = E_c + E_p(totale)$$

$E_p(totale)$ est la somme de l'énergie potentielle d'interaction entre les deux particules (forces intérieures) et de l'énergie potentielle des forces extérieures conservatives

Dans le cas d'un **système isolé**, l'énergie potentielle totale est simplement égale à l'énergie potentielle d'interaction et on a : $E_m = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 + E_p(r)$

III - EXPRESSIONS DES GRANDEURS CINÉTIQUES ET ÉNERGÉTIQUES, DANS R_G, D'UN SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS

On notera par **astérisque** ($*$) toute grandeur relative à R_G.

III - 1 - vitesses $\overrightarrow{V_i^*}$ dans R_G

$$\overrightarrow{V_i^*} = \left(\frac{d\overrightarrow{GM_i}}{dt}\right)_{R_G} = \left(\frac{d\overrightarrow{GM_i}}{dt}\right)_R$$

or d'après le § II :

Or : $\begin{cases} \overrightarrow{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{\mu}{m_1}\overrightarrow{M_1M_2} \\ \overrightarrow{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{\mu}{m_2}\overrightarrow{M_1M_2} \end{cases}$ avec $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

d'où : $\overrightarrow{V_1^*} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V} = -\frac{\mu}{m_1}\vec{V}$ **et** $\overrightarrow{V_2^*} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V} = \frac{\mu}{m_2}\vec{V}$

rappelons que $\vec{V} = \left(\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right)_R$ la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1

III - 2 - quantité de mouvement

La quantité de mouvement du système dans le référentiel barycentrique $\boldsymbol{R_G}$ est la somme des quantités de mouvement, dans $\boldsymbol{R_G}$, des différentes particules : $\vec{p}^* = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^*$

Or, $\vec{p}_1^* = m_1\overrightarrow{V_1^*} = -\mu\vec{V}$ et $\vec{p}_2^* = m_2\overrightarrow{V_2^*} = \mu\vec{V}$

$\Rightarrow \quad \vec{p}^* = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = m\overrightarrow{V^*}(du\ point\ G) = \vec{0}$

Donc la quantité de mouvement d'un système de deux points matériels, dans $\boldsymbol{R_G}$, est **nulle**.

III - 3 - moment cinétique barycentrique

Le moment cinétique en $\boldsymbol{G}$, d'un système à deux particules, évalué dans le référentiel $\boldsymbol{R_G}$, est :

$$\vec{L}_G^* = \overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{p}_1^* + \overrightarrow{GM_2} \wedge \vec{p}_2^* = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{p}_2^* \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L}_G^* = \mu\,\overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{V}$$

Le moment cinétique $\vec{L}_G^*$ est le même que celui d'une **particule fictive** de masse $\boldsymbol{\mu}$, située en un point $\boldsymbol{M}$ défini par $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ et de vitesse $\vec{V} = \left(\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right)_R$

Remarques :

① *théorème de Kœnig relatif au moment cinétique*

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{2} \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i}\right) \wedge m_i\vec{V}_i = \overrightarrow{OG} \wedge \sum_{i=1}^{2} m_i\vec{V}_i + \sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i\vec{V}_i$$

$\vec{L}_o = \overrightarrow{OG} \wedge \left(\sum_{i=1}^{2} m_i\right)\vec{V}_G + \sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i\vec{V}_i$ or $\vec{V}_i = \vec{V}_G + \vec{V}_i^*$

$\Rightarrow \quad \vec{L}_o = \overrightarrow{OG} \wedge \left(\sum_{i=1}^{2} m_i\right)\vec{V}_G + \underbrace{\sum_{i=1}^{2} m_i\overrightarrow{GM_i}}_{\vec{0}} \wedge \vec{V}_G + \underbrace{\sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i\vec{V}_i^*}_{\vec{L}_G^*}$

$\Rightarrow \quad \vec{L}_o = \overrightarrow{OG} \wedge \left(\sum_{i=1}^{2} m_i\right)\vec{V}_G + \vec{L}_G^* = \overrightarrow{OG} \wedge (m_1 + m_2)\vec{V}_G + \vec{L}_G^*$

Le moment cinétique d'un système est égal à la somme du moment cinétique du centre de masse affecté de toute la masse du système et du moment cinétique du système en $\boldsymbol{G}$, évalué dans le référentiel barycentrique $\boldsymbol{R_G}$.

② *théorème du moment cinétique dans R_G*

D'après le théorème de Kœnig, on a : $\vec{L}_o = \overrightarrow{OG} \wedge (m_1 + m_2)\vec{V}_G + \vec{L}_G^*$, soit par dérivation par rapport au temps : $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d\vec{L}_G^*}{dt} + \overrightarrow{OG} \wedge (m_1 + m_2)\frac{d\vec{V}_G}{dt}$

or $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}_{ext})$ et $(m_1 + m_2)\frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{F}$

$\Rightarrow \quad \vec{M}_o(\vec{F}) = \frac{d\vec{L}_G^*}{dt} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F} = \frac{d\vec{L}_G^*}{dt} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{MG} \wedge \vec{F}$

$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_G^*}{dt} = \vec{M}_G(\vec{F}) = \vec{M}_G(\vec{F}_{ext})$

Donc, le théorème du moment cinétique (au point $\boldsymbol{G}$) est applicable dans $\boldsymbol{R_G}$, que celui-ci soit galiléen ou non, sans qu'il y ait à tenir compte des forces d'inertie.

- Dans le cas d'un système **isolé**, on a : $\frac{d\vec{L}_G^*}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_G^* = \overrightarrow{Cte}$

donc le cas où le système est **isolé** $\vec{L}_G^*$ **se conserve**.

III - 4 - énergie cinétique

L'énergie cinétique du système dans le référentiel barycentrique R_G est la somme des énergies cinétiques dans R_G des différents points qui le constituent :

$$E_c^* = \frac{1}{2}m_1{V_1^*}^2 + \frac{1}{2}m_2{V_2^*}^2 = \frac{{p_1^*}^2}{2} + \frac{{p_2^*}^2}{2} = \frac{1}{2}\mu V^2$$

Cette énergie cinétique est la même que celle de la particule fictive M, de masse μ, et de vitesse $\vec{V}$, définie dans le § III - 3

Remarques : *théorème de Kœnig relatif à l'énergie cinétique*

$$E_c = \sum_i^2 \frac{1}{2}m_i V_i^2 = \sum_i^2 \frac{1}{2}m_i\left(\vec{V}_G + \vec{V}_i^*\right)^2 = \sum_i^2 \frac{1}{2}m_i V_G^2 + \sum_i^2 \frac{1}{2}m_i {V_i^*}^2 + \vec{V}_G\left(\sum_i^2 \frac{1}{2}m_i \vec{V}_i^*\right)$$

or $\sum_i^2 \frac{1}{2}m_i \vec{V}_i^* = \frac{d}{dt}\left(\sum_i^2 m_i \overrightarrow{GM}_i\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}\left(\sum_i^2 m_i\right)V_G^2 + \sum_i^2 \frac{1}{2}m_i {V_i^*}^2$

$\Rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_G^2 + E_c^*$

L'énergie cinétique d'un système est égale à la somme de l'énergie cinétique du centre d'inertie affecté de toute la masse du système et de l'énergie cinétique du système correspondant à son mouvement dans le référentiel barycentrique R_G.

III - 5 - énergie mécanique

L'énergie mécanique du système évaluée dans le référentiel R_G, est égale à la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle évaluées dans R_G : $E_m^* = E_c^* + E_p^*(totale)$

$E_p^*(totale)$ est la somme de l'énergie potentielle d'interaction, dans R_G, entre les deux particules (forces intérieures) et de l'énergie potentielle des forces extérieures conservatives. Rappelons que l'énergie potentielle d'interaction ne dépend que de la distance qui sépare les deux particules et donc elle est indépendante du référentiel

Dans le cas d'un **système isolé**, l'énergie potentielle totale est simplement égale à l'énergie potentielle d'interaction et on a : $E_m^* = \frac{1}{2}m_1{V_1^*}^2 + \frac{1}{2}m_2{V_2^*}^2 + E_p(r) = \frac{{p_1^*}^2}{2} + \frac{{p_2^*}^2}{2} + E_p(r) = \frac{1}{2}\mu V^2 + E_p(r)$

Cette expression montre que l'énergie mécanique dans le référentiel barycentrique d'un système isolé de deux points matériels est celle du point mobile fictif M, ayant l'énergie potentielle $E_p(r)$ donc soumise à la force $\vec{F}_{1,2}$

Remarque :

D'après le théorème de Kœnig relatif à l'énergie cinétique on a: $E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_G^2 + E_c^*$

$\Rightarrow \quad E_m^* = E_c^* + E_p(r) = E_c - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_G^2 + E_p(r) = E_m - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_G^2$

$\Rightarrow \quad E_m = E_m^* + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_G^2$

IV - MOUVEMENT DU POINT FICTIF M DANS LE CAS D'UN SYSTÈME ISOLÉ

On vient de démontrer (§ III) que les grandeurs telles que $\vec{L}_G^*$, E_c^* et E_m^* sont les mêmes que celles de la particule fictive de masse μ située en un point M défini par $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ et de vitesse $\vec{V} = \left(\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right)_R$

Dans le cas où le système de deux points matériels est isolé, cette particule fictive est soumise à la force $\vec{F}_{1,2}$ donc ayant l'énergie potentielle $E_p(r)$

On ramène ainsi le problème de deux points matériels en interaction qui forment un système isolé, à celui de la particule fictive de masse et il suffit de connaître la trajectoire du point fictif M dans le référentiel R_G (c'est à dire connaître $\overrightarrow{GM}$), pour déterminer les trajectoires de M_1 et M_2 dans R_G en utilisant les deux équations déjà démontrées :

$$\left|\begin{array}{l} \overrightarrow{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{\mu}{m_1}\overrightarrow{GM} \\ \\ \overrightarrow{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{\mu}{m_2}\overrightarrow{GM} \end{array}\right.$$

Pour déterminer l'équation du mouvement, dans R_G du point fictif, il suffit d'appliquer la relation fondamentale de la dynamique à chacune des particules. En effet, si le système est isolé, le référentiel R_G est galiléen et la R.F.D appliquée à M_1 et à M_2 donne :

pour M_1, $\quad m_1\frac{d^2\overrightarrow{GM}_1}{dt^2} = \vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2} \qquad \text{équation}(1)$

pour M_2, $\quad m_2\frac{d^2\overrightarrow{GM}_2}{dt^2} = \vec{F}_{1,2} \qquad \text{équation}(2)$

$m_2 \times \text{équation}(1) - m_1 \times \text{équation}(2) \Rightarrow \mu\frac{d^2\overrightarrow{M_1M_2}}{dt^2} = \mu\frac{d^2\overrightarrow{GM}}{dt^2} = \vec{F}_{1,2} \qquad \text{équation}(3)$

L'équation (3) montre que le point fictif M subit une force égale à celle exercée par M_1 sur M_2. Si on résout $l'\text{équation}(3)$ on peut déterminer la trajectoire de M, et donc celles de M_1 et M_2 (dans R_G)

Donc l'étude d'un système isolé de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 peut être réduite, dans le référentiel barycentrique R_G, à l'étude d'un point matériel fictif M de masse μ (masse réduite) telle que :

Grandeur	*Système isolé de deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2*	*Point matériel M de masse μ*
Vecteur position	$\overrightarrow{GM}_1$ et $\overrightarrow{GM}_2$	$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GM}_2 - \overrightarrow{GM}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$
Vitesse	$\vec{V}_1^*$ et $\vec{V}_2^*$	$\vec{V}^* = \vec{V}_2^* - \vec{V}_1^*$
Quantité de mouvement	$\vec{p}_1^* = m_1\vec{V}_1^*$ et $\vec{p}_2^* = m_2\vec{V}_2^*$	$\vec{p}^* = \mu\vec{V}^*$
Moment cinétique	$\vec{L}_G^* = \overrightarrow{GM}_1 \wedge \vec{p}_1^* + \overrightarrow{GM}_2 \wedge \vec{p}_2^*$	$\vec{L}_G^* = \overrightarrow{GM} \wedge \mu\vec{V}^*$
Énergie cinétique	$E_c^* = \frac{1}{2}m_1{V_1^*}^2 + \frac{1}{2}m_2{V_2^*}^2$	$E_c^* = \frac{1}{2}\mu V^2$
Force	$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$ et $\vec{F}_{1,2} = -\overrightarrow{grad}E_p$	soumis à la force $\vec{F} = \vec{F}_{1,2}$
Énergie mécanique	$E_m^* = E_c^* + E_p(r)$	$E_m^* = E_c^* + E_p(r)$

En outre, le mouvement du mobile fictif M, qui s'effectue sous l'action de la force $\vec{F}_{1,2}$ est un mouvement à force centrale. Ce mouvement est donc plan et s'effectue suivant la loi des aires (voir chap II. § I-6). La conservation du moment cinétique dans R_G, $\vec{L}_G^*$, s'écrit, en coordonnées polaires :

$L_G^* = \mu r^2 \dot{\theta}$ où $r = GM$

Exprimons E_m^* en coordonnées polaires : $E_m^* = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2 + E_p(r)$

En utilisant le fait que le moment cinétique est invariant, substituons $\dot{\theta} = \frac{L_G^*}{\mu r^2}$

$$E_m^* = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{{L_G^*}^2}{2\mu r^2} + E_p(r)$$

Posons $E_{p,eff} = \frac{{L_G^*}^2}{2\mu r^2} + E_p(r)$, appelée **énergie potentielle effective**.

On a donc : $E_m^* = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + E_{p,eff}$

E_m^* a la même forme que celle de l'énergie mécanique d'un point matériel de masse μ animé d'un mouvement rectiligne et dont l'énergie potentielle serait $E_{p,eff}$

On ramène ainsi le problème de deux points matériels en interaction qui forment un système isolé, à celui de la particule fictive de masse μ placée dans le champ de force $dE_{p,eff}$, animée de la vitesse $\dot{r}$ (problème à une dimension).

L'équation précédente est équivalente à : $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\mu}\left(E_m^* - E_{p,eff}\right) \geq 0$

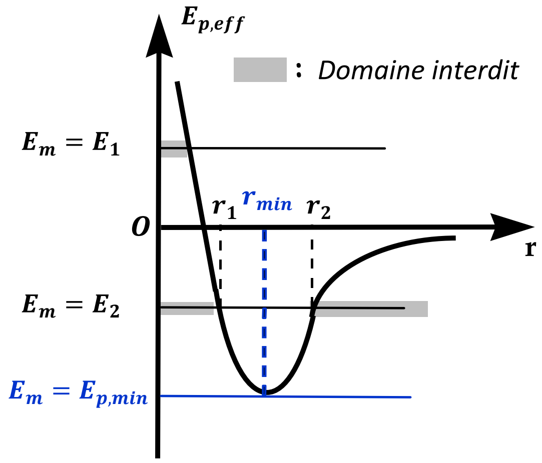
Les valeurs de r pour lesquelles l'inégalité précédente est vérifiée, déterminent les limites en mouvement radial de la particule réduite. Pour une loi de force donnée, on peut donc, étudier le domaine de variation de r.

Faisons une étude graphique d'un puits de potentiel (figure ci-dessous). On distingue trois cas :

① si $E_m^* \geq 0$, alors les seules valeurs possibles sont telles que $r \geq r_1$

② si $E_m^* < 0$ mais supérieure à $E_{p,min}$ (minimum de $E_{p,eff}$)
la valeur de r oscille entre deux valeurs extrêmes, r_1 et r_2 La particule M reste toujours à une distance finie de G

③ si $E_m^* = E_{p,min}$
r prend la valeur r_0. La trajectoire est un cercle de rayon r_0 si $L_G^* \neq 0$ car $r = r_0$ et $\dot{\theta} \neq 0$, ou à une position d'équilibre dans R_G si $L_G^* = 0$



Chapitre X

LES MOUVEMENTS À FORCE CENTRALE

L'intérêt de l'étude de ce mouvement repose sur la réduction d'un système isolé de deux particules à un problème à une particule fictive $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{\mu}$ (masse réduite du système à deux particules), soumis de la part du centre de masse $\boldsymbol{G}$ à la force d'interaction mutuelle entre $\boldsymbol{M_1}$ et $\boldsymbol{M_2}$ qui est portée par $\overrightarrow{\boldsymbol{GM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M_1M_2}}$. En effet, on a déjà mentionné que si un point matériel $\boldsymbol{M_1}$ a une masse très grande devant celle d'un point matériel $\boldsymbol{M_2}$ ($\boldsymbol{m_1} >> \boldsymbol{m_2}$), alors la masse réduite est égale à celle du corps le moins massif ($\boldsymbol{\mu} \approx \boldsymbol{m_2}$), le centre de masse $\boldsymbol{G}$ est confondu avec le centre du corps le plus massif et le référentiel barycentrique dans lequel se fait l'étude est alors lié au centre du corps le plus massif. Le mouvement de la particule fictive dans $\boldsymbol{R_G}$ (donc dans le référentiel lié au centre du corps le plus massif) décrit le mouvement du corps léger par rapport au corps le plus massif. C'est par exemple le cas du mouvement d'une planète par rapport au soleil ou le mouvement d'un satellite par rapport à la terre.

I - DÉFINITION

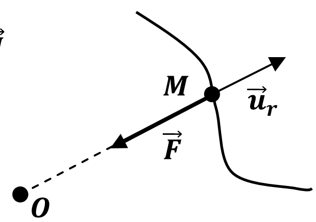
On appelle **force centrale**, une force dont la direction passe constamment par un point fixe donné de l'espace, appelé **centre de force**, et telle que son intensité ne dépend que de la distance entre ce centre et son point d'application.

Soit, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{xyz})$ un référentiel galiléen et choisissons le point $\boldsymbol{O}$ comme centre de la force centrale $\vec{\boldsymbol{F}}$ qui s'exerce sur un point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$.

Puisque $\vec{\boldsymbol{F}}$ est une force centrale, alors elle est colinéaire au vecteur position $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$

Si $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\|}$ et $\boldsymbol{r} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\|$ alors : $\quad \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$

Le mouvement du point matériel $\boldsymbol{M}$ est dit, **mouvement à force centrale**.



Exemple de force centrale

II - PROPRIÉTÉS DES MOUVEMENTS À FORCE CENTRALE

II - 1 - conservation du moment cinétique

Considérons dans le référentiel galiléen $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{xyz})$, un point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse $\boldsymbol{m}$, soumis à la force centrale $\vec{\boldsymbol{F}}$

Le moment cinétique en $\boldsymbol{O}$, est : $\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \vec{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}}$

D'après le théorème du moment cinétique (voir Chapitre IV - § IV - 2 - b), on a : $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$

or $\vec{\boldsymbol{F}}$ est une force centrale, donc elle est par définition colinéaire à $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ et son moment est donc nul

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_R = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L}_o = \overrightarrow{Cte} = \overrightarrow{OM}(t=0) \wedge m\vec{V}(t=0)$$

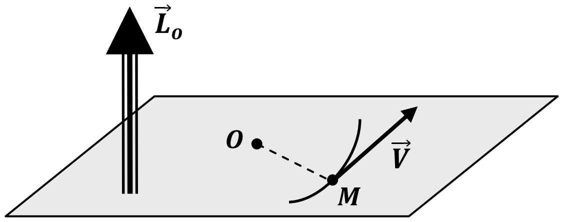
Le moment cinétique, calculé au centre de force, est donc un vecteur constant au cours du mouvement, il ne dépend donc que des conditions initiales ($\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{o}}$ se conserve)

II - 2 - nature de la trajectoire

Le moment cinétique d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale se conserve. Donc quel que soit l'instant considéré, on a : $\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{o}} = \overrightarrow{\boldsymbol{Cte}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}) \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0})$

C'est à dire que $\overrightarrow{OM}$ est toujours perpendiculaire au vecteur constant $\vec{L}_o$

Puisque le point O est fixe dans le référentiel R, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est à tout instant situé dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}_o$ et contenant le point O
Le mouvement du point M est donc un **mouvement plan** (trajectoire plane)



APPLICATION :

Quelle est la trajectoire d'une particule qui subit l'action d'une force centrale si le moment cinétique en O est nul.

Solution :

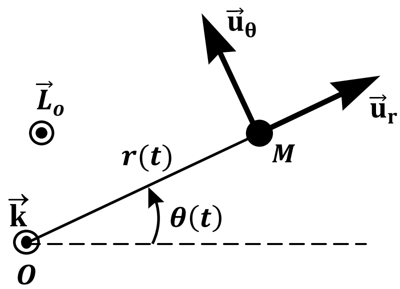
Si le moment cinétique est nul $\vec{L}_o = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires et la trajectoire est une droite passant par le centre de force O.

II - 3 - la loi des aires

Puisque le mouvement est plan, il est donc plus convenable de caractériser la position du point matériel M par ses coordonnées polaires (r, θ)
Dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, on a:

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

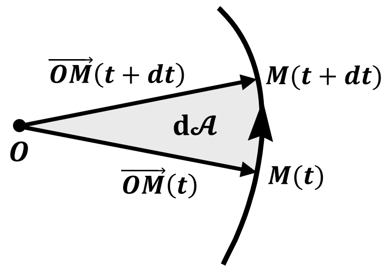
$$\Rightarrow \quad \vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$$
$$\vec{L}_o = \overrightarrow{Cte} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{L}_o\| = mr^2\dot{\theta} = Constante = mC$$



avec $\quad C = r^2\dot{\theta} = \frac{L_o}{m} = Cte$
C est appelée la **constante des aires**

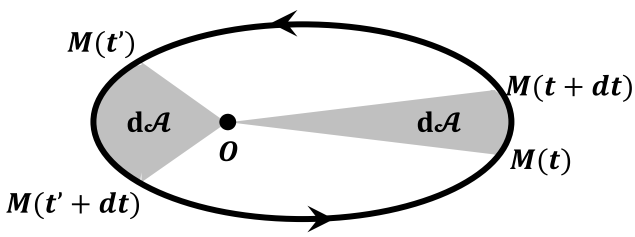
On peut donner à la constante C une interprétation géométrique simple. En effet, considérons l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant un temps infiniment petit dt, notée $d\mathcal{A}(t)$ (surface grisée sur la figure). Cette surface vaut : $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}r(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$

donc la constante C est égale au double de l'aire élémentaire balayée par le vecteur position pendant un temps dt.



$\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ est appelée la **vitesse aréolaire**, qui est constante au cours du temps.

Donc, dans un mouvement à force centrale, le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux : c'est **la loi des aires**.



les surfaces balayées par le vecteur position pendant un temps dt (surfaces grisées) sont égales

Une des conséquences de la **loi des aires** est que pour une trajectoire non circulaire, la vitesse angulaire du point matériel est d'autant plus grande que le mobile est situé près du centre de force.

APPLICATION :

On considère, dans un référentiel galiléen R, un point matériel soumis à une force centrale et animé d'un mouvement circulaire de rayon r_0.
Montrer que le mouvement de ce point est uniforme

Solution :

La constante des aires est : $r^2\dot{\theta} = cte$
si le mouvement est circulaire alors $r = r_0 = Cte \quad \Rightarrow \dot{\theta} = cte$ *d'où le mouvement est circulaire uniforme*

II - 4 - les formules de binet

Si le point matériel est soumis à l'action d'une force centrale $\vec{F}$, alors, d'après la relation fondamentale de la dynamique, l'accélération de ce point M est une accélération centrale. Donc, la vitesse et l'accélération de la particule M, vérifient, respectivement, la première et la deuxième formule de Binet démontrées dans le § V - 6 - a, du chapitre I, à savoir :

$$\mathbf{V^2 = C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right)} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathbf{a}} = -\mathbf{C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\vec{u}_r} \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{u = \frac{1}{r}}$$

II - 5 - conservation de l'énergie mécanique

Le travail élémentaire de la force centrale $\vec{F}$ est :

$$\boldsymbol{\delta W = \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = F(r)\vec{u}_r(dr\,\vec{u}_r + r d\theta\,\vec{u}_\theta) = F(r)dr}$$

Soient $\boldsymbol{M_1(r_1, \theta_1)}$ la position du point matériel $\boldsymbol{M}$ sur sa trajectoire à l'instant $\boldsymbol{t_1}$ et $\boldsymbol{M_2(r_2, \theta_2)}$ sa position à l'instant $\boldsymbol{t_2}$.

Le travail $\boldsymbol{W_{M_1M_2}}$ effectué par la force $\vec{F}$ pour aller du point $\boldsymbol{M_1}$ au point $\boldsymbol{M_2}$ est :

$$\boldsymbol{W_{M_1M_2} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr}$$

Ce travail ne dépend que de l'emplacement de ces deux points et non du trajet suivi. Donc la force centrale dérive d'une énergie potentielle $\boldsymbol{E_p}$ telle que :
$\boldsymbol{E_p = -\delta W = -F(r)dr} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E_p = -\int F(r)dr = E_p(r)}$ l'énergie potentielle ne dépend que de la distance $\boldsymbol{r}$

Dans le référentiel $\boldsymbol{R}$, on a : $\boldsymbol{E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2}mV^2 + E_p(r)}$
or $\vec{V} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r)}$

$$\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_o^2}{2mr^2} + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)}$$

Cette dernière équation est généralement écrite sous la forme :
$\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}}$ avec $\boldsymbol{E_{p,eff} = \frac{L_o^2}{2mr^2} + E_p(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)}$

$\boldsymbol{E_{p,eff}}$ est appelée **énergie potentielle effective**.

APPLICATION :

Un point matériel M de masse m est soumis à la force centrale $\vec{F} = \frac{am}{r^3}\vec{u}_r$ où a est une constante positive et $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$. A l'instant initial $t = 0$, le point M se trouve en A de coordonnées $r_0 = Cte$ et $\theta_0 = 0$

1 - En appliquant le R.F.D et en utilisant la loi des aires, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.
2 - Déterminer l'énergie mécanique E_m en fonction de r et de $\dot{r}$
3 - Quelle valeur C_0 faut-il donner à la constante des aires C pour que la trajectoire soit un cercle de centre O? Quel doit être le signe de a?

Solution :

1 - La R.F.D $\Rightarrow \vec{F} = m\,\vec{\gamma}$ *avec* $\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{r}_r$

$\Rightarrow\ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \dfrac{F}{m} = \dfrac{a}{r^3}$ *or la loi des aires s'écrit* $C = r^2\dot{\theta}$

$$\Rightarrow\ \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{a}{r^3} \Rightarrow \ddot{r} - \frac{C^2 + a}{r^3} = 0$$

2 - L'énergie mécanique s'écrit : $E_m = E_c + E_p$

$E_p = \dfrac{am}{2r^2} + Cte$ *et* $E_c = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow\ E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{am}{2r^2} + Cte = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \frac{C^2 + a}{r^2}\right] + Cte$$

3 - La trajectoire est circulaire $\Rightarrow r = Cte \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

or $\ddot{r} - \dfrac{C^2 + a}{r^3} = 0 \Rightarrow a + C^2 = 0 \Rightarrow a = -C^2$ *donc a < 0*

III - MOUVEMENT DANS UN CHAMP NEWTONIEN

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser au cas où la force centrale qui s'exerce sur le point matériel est **Newtonienne**, c'est à dire elle s'écrit sous la forme $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r$ où K est une constante qui est positive si la force est répulsive et négative si la force est attractive.

À cette force correspond l'énergie potentielle de la forme $E_p = \frac{K}{r}$. En effet, la force centrale $\vec{F}$ dérive de l'énergie potentielle E_p, donc :

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p \quad\Rightarrow\quad \dfrac{K}{r^2} = -\dfrac{dE_p}{dr} \quad\Rightarrow\quad E_p = \dfrac{K}{r} + Cte$

Si on adopte comme origine de l'énergie potentielle celle pour r infini $\left(E_p = 0\ pour\ r \to \infty\right)$, alors $E_p = \frac{K}{r}$

C'est l'exemple :

- du champ gravitationnel crée par un point A de masse m_A, qui exerce, sur le point matériel M de masse m, la force d'attraction universelle $\vec{F} = -G\frac{m_A\,m}{r^2}\vec{u}_r$ $\quad(K = -G\,m_A m < 0)$

Ce qui correspond au potentiel : $E_p = -G\frac{m_A\,m}{r}$

G est la constante de gravitation qui vaut $6,672 \times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$

- du champ Coulombien crée par une particule A de charge q_A, qui exerce, sur le point matériel M de charge q, la force électrostatique $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_A q}{r^2}\vec{u}_r$ $\quad(K = \frac{q_A q}{4\pi\varepsilon_o})$

Ce qui correspond au potentiel : $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_A q}{r}$

ε_o est une constante appelée permittivité du vide et vaut $8,854 \times 10^{12}\ F.m^{-1}$

III - 1 - discussion qualitative du mouvement : état lié et état de diffusion

Nous avons montré, dans le paragraphe II - 5, que l'énergie mécanique d'un point matériel qui subit l'action d'une force centrale s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff} \qquad \text{avec} \qquad E_{p,eff} = \frac{L_o^2}{2mr^2} + E_p(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{p,eff} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E_m \geq E_{p,eff}$$

donc les seuls mouvements possibles sont ceux qui vérifient $E_m \geq E_{p,eff}$

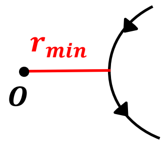
L'énergie potentielle effective s'écrit aussi sous la forme : $E_{p,eff} = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r}$

Étudions l'allure de $E_{p,eff}$ dans le cas répulsif ($K > 0$) et dans le cas attractif ($K < 0$), sachant que quel que soit le signe de K le terme $\frac{mC^2}{2r^2}$ est toujours positif

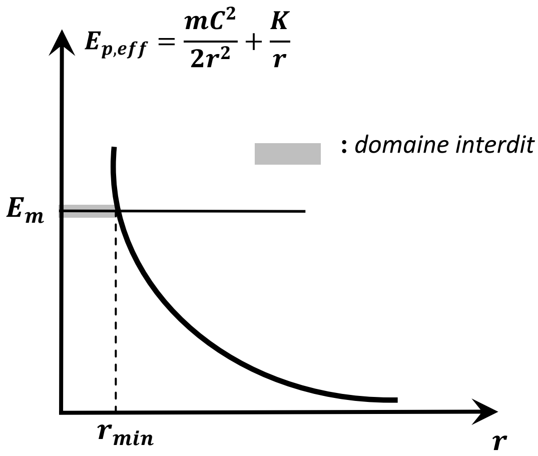
III - 1 - a - premiers cas : interaction répulsive (K >0)

Dans ce cas le terme $\frac{K}{r}$ est positif et l'énergie potentielle effective est toujours positive. Les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels $E_m \geq E_{p,eff}$

La particule arrive de l'infini, s'approche jusqu'à la distance minimale r_{min} tel que $E_m = E_{p,eff}(r_{min})$ puis repart vers l'infini.



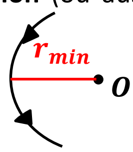
Donc, les seuls états possibles sont des états **libres** (ou états de **diffusion**) de la particule.



III - 1 - b - deuxième cas : interaction attractive (K <0)

Dans ce cas le terme $\frac{K}{r}$ est négatif alors que $\frac{mC^2}{2r^2}$ est toujours positif

Si l'énergie mécanique est positive ($E_m = E_1 > 0$), il s'agit toujours d'un **état de diffusion** (ou aussi **état libre**). La trajectoire possède des branches infinies et elle est caractérisée par une distance minimale d'approche r_{min} tel que $E_m = E_{p,eff}(r_{min})$



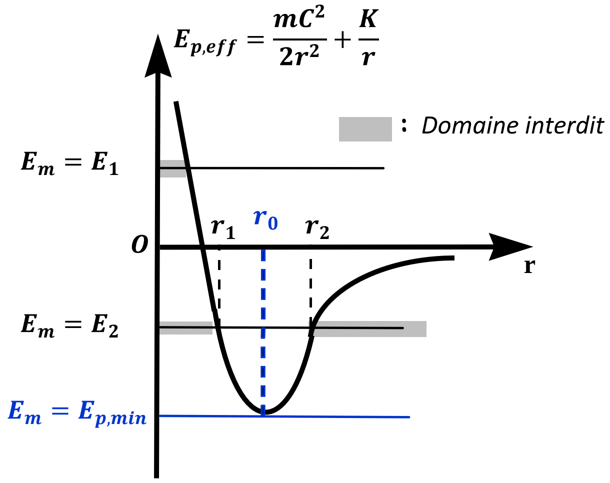
Si l'énergie mécanique est négative et supérieure à $E_{p,eff}$ $\left(E_{p,eff,minimale} < E_m = E_2 < 0\right)$, la particule est piégée dans une zone d'espace limitée au voisinage du centre de force O, $r \in [r_1, r_2]$. **L'état est dit lié**.

Si l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective minimale $\left(E_m = E_{p,eff,minimale}\right)$, alors $r = r_o$ et on distingue deux cas :

• si $L_o = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2\dot{\theta} = mr_o^2\dot{\theta} = 0$

or $m \neq 0$ et $r_o \neq 0 \quad \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = Cte = \theta_o \Rightarrow$ on a une **position d'équilibre stable** (r_o, θ_o)

si $L_o \neq 0 \quad \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = mr_o^2\dot{\theta} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = Cte \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta(t) + \theta_0$, rappelons que $r = r_o = Cte$ alors on a une trajectoire circulaire de rayon r_o



III - 2 - équation différentielle de la trajectoire

III - 2 - a - première méthode

Dans cette première méthode on va utiliser la notion de conservation de l'énergie mécanique et la première formule de Binet (formule de Binet relative à la vitesse).

L'énergie mécanique s'écrit : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV^2 + E_p$

d'après la première formule de Binet on a : $V^2 = C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right)$ avec $u = \frac{1}{r}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2} m\, C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right) + K\,u}$

comme l'énergie mécanique se conserve, quel que soit l'instant $\boldsymbol{t}$, on a : $\boldsymbol{\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_m}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = 0}$

or, pour $\boldsymbol{t}$ quelconque $\dot{\theta} \neq 0$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{dE_m}{d\theta} = m\, C^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) + K = 0}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{K}{mC^2}}$

III - 2 - b - deuxième méthode

Dans cette deuxième méthode on va utiliser la relation fondamentale de la dynamique et la deuxième formule de Binet (formule de Binet relative à l'accélération).

La R.F.D appliquée, dans le référentiel $\boldsymbol{R}$, au point matériel $\boldsymbol{M}$, donne : $\boldsymbol{\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r = m\vec{a}}$

or d'après la deuxième formule de Binet, l'accélération d'une particule qui est soumise à une force centrale s'exprime par :

$\vec{a} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\vec{u}_r$ $\Rightarrow$ $-mC^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = K\,u^2$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{K}{mC^2}}$

III - 3 - nature de la trajectoire

La solution de l'équation différentielle précédente est la somme de la solution générale, soit $\boldsymbol{S_G}$, de l'équation différentielle sans second membre et d'une solution particulière, soit $\boldsymbol{S_p}$, de l'équation $\boldsymbol{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{K}{mC^2}}$

$\boldsymbol{S_p = -\frac{K}{mC^2}}$ et $\boldsymbol{S_G = A\cos(\theta - \theta_o)}$

d'où la solution complète s'écrit :

$$\boldsymbol{u = -\frac{K}{mC^2} + A\,cos(\theta - \theta_o)}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{r = \frac{1}{-\frac{K}{mC^2} + A\,cos(\theta - \theta_o)}}$

posons $\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{mC^2}}{|\boldsymbol{K}|} > 0$ et $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{AP} > 0$

sachant que $|\boldsymbol{K}| = \boldsymbol{K}$ si $\boldsymbol{K} > 0$ et $|\boldsymbol{K}| = -\boldsymbol{K}$ si $\boldsymbol{K} < 0$

on a alors :

$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{1+e\,cos(\theta-\theta_0)}}$ si $\boldsymbol{K} < 0$ (force attractive)

et

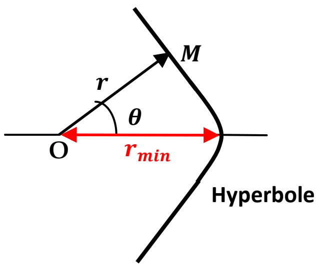
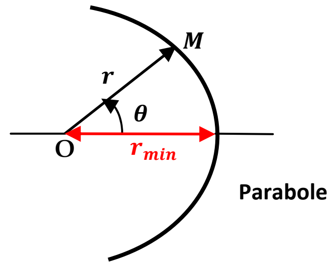
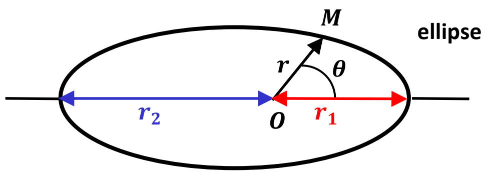
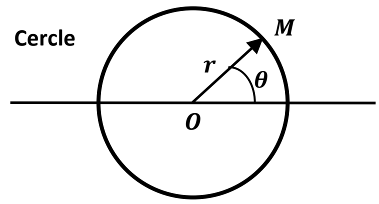
$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{-1+e\,cos(\theta-\theta_0)}}$ si $\boldsymbol{K} > 0$ (force répulsive)

c'est l'équation d'une conique (**hyperbole**, **parabole**, **ellipse**, **cercle**) de **foyer $\boldsymbol{O}$** et d'axe focal $\boldsymbol{\theta = \theta_0}$

$\boldsymbol{P}$ est appelé le **paramètre** de la conique (homogène à une longueur)

$\boldsymbol{e}$ est appelé l'**excentricité** de la conique

On distingue quatre cas :

1er cas : si $\boldsymbol{e} > 1$, la trajectoire est une **hyperbole** de foyer le point $\boldsymbol{O}$  **trajectoire hyperbolique** **de foyer O (cas où $\theta_0 = 0$)**	*2ème cas :* si $\boldsymbol{e = 1}$, la trajectoire est une **parabole** de foyer le point $\boldsymbol{O}$  **trajectoire parabolique** **de foyer O (cas où $\theta_0 = 0$)**
3ème cas : si $\boldsymbol{0} < e < 1$, la trajectoire est une **ellipse** dont l'un des foyers est le point $\boldsymbol{O}$  **trajectoire elliptique** **de foyer O (cas où $\theta_0 = 0$)**	*4ème cas :* si $\boldsymbol{e = 0}$, la trajectoire est un **cercle** de centre le point $\boldsymbol{O}$ et de rayon $\boldsymbol{r = P}$  **Trajectoire circulaire de centre O**

APPLICATION :

On considère un point matériel de masse m soumis à une force newtonienne $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r$ où k est une constante positive.

1 - Démontrer que le vecteur $\vec{H} = \frac{mC}{k}\vec{V} - \vec{u}_\theta$ avec C la constante des aires et $\vec{V}$ la vitesse du point M qui est un vecteur constant.

2 - Démontrer que $\|\vec{H}\| = e$ où e est l'excentricité.

solution :

1 - La R.F.D appliquée au point matériel donne : $m\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} = -\dfrac{k}{r^2}\vec{u}_r$

multiplions les deux membres de l'équation précédente par la constante des aires $C = r^2\dot{\theta} \Rightarrow$

$$mC\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{k}{r^2}r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r = -k\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{mC}{k}\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mC}{k}\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{u}_\theta\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{mC}{k}\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{u}_\theta = \vec{Cte} = \vec{H}$$

2 - on a : $\vec{H}.\vec{u}_\theta = \dfrac{mC}{k}\vec{V}.\vec{u}_\theta - 1 = H\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{mC}{k}r\dot{\theta} - 1 = H\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{mC^2}{kr} = H\cos\theta + 1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mC^2}{k(1+H\cos\theta)} = \frac{\frac{mC^2}{k}}{1+H\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad H = e$$

III - 4 - énergie mécanique et trajectoire : relation entre l'excentricité et l'énergie mécanique

Cherchons la relation entre l'excentricité **e** et l'énergie mécanique $\boldsymbol{E_m}$. Pour cela, il suffit de remplacer dans l'expression de l'énergie mécanique, $\boldsymbol{u}$ par $-\frac{K}{mC^2} + A\cos(\theta - \theta_o)$ et $\frac{du}{d\theta}$ par $-A\sin(\theta - \theta_o)$

$$E_m = \frac{1}{2}m\,C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right) + K\,u$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\,C^2\left\{\left(-\frac{K}{mC^2} + A\cos(\theta-\theta_o)\right)^2 + (-A\sin(\theta-\theta_0))\right\} + K\left(-\frac{K}{mC^2} + A\cos(\theta-\theta_o)\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\,C^2A^2 - \frac{K^2}{2mC^2} \qquad \Rightarrow \qquad E_m = \frac{K^2}{2mC^2}\left(e^2-1\right) = \frac{|K|}{2P}\left(e^2-1\right)$$

Donc la nature de la trajectoire ne dépend que du signe de l'énergie mécanique, donc des conditions initiales puisque cette dernière se conserve.

Discutons alors les différents cas possibles selon que la force est répulsive ($K > 0$) ou attractive ($K < 0$). Notons toutefois que le paramètre $\boldsymbol{P}$ et l'excentricité $\boldsymbol{e}$ sont des grandeurs positives.

III - 4 - a - cas d'une force répulsive

Si la force est répulsive ($K > 0$), alors on a : $r = \frac{P}{-1+e\cos(\theta-\theta_o)}$ qui doit être positif, alors il faut que $e\cos(\theta-\theta_o) - 1 > 0$. Cette inéquation ne peut avoir des solutions que si $e > 1$ (car $|\cos(\theta-\theta_o)| \le 1$) ce qui correspond à une trajectoire hyperbolique (état libre). Donc si la force est **répulsive**, la trajectoire est une **hyperbole** et l'état est un **état libre** (état de **diffusion**)

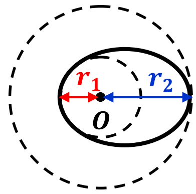
III - 4 - b - cas d'une force attractive

Si la force est répulsive ($K > 0$), alors on : $r = \frac{P}{1+e\cos(\theta-\theta_o)}$ et l'inéquation $1 + e\cos(\theta-\theta_o) > 0$ admet toujours des solutions quelle que soit la valeur de **e**.

• Si $E_m > 0$, alors $e > 1$: la trajectoire est une **hyperbole** de foyer $\boldsymbol{O}$. La variable **r** peut prendre des valeurs infinies (la trajectoire présente des branches infinies, c'est à dire que le point matériel peut s'éloigner du centre de force $\boldsymbol{O}$ et s'échappe de l'influence de la force centrale $\vec{F}$), c'est un état de **diffusion** (état **libre**)

• Si $E_m = 0$, nous avons affaire à un cas limite où l'excentricité $e = 1$: la trajectoire est une **parabole** de foyer O. Ici aussi, la variable r peut prendre des valeurs infinies (la trajectoire présente des branches infinies, c'est à dire que le point matériel peut s'éloigner du centre de force **O** et s'échappe de l'influence de la force centrale $\vec{F}$), c'est donc un état de **diffusion** (état **libre**)

• Si $E_m < 0$, alors $e < 1$: la trajectoire est une **ellipse** de foyer O. C'est un état **lié** qui confirme le mouvement de la particule à l'intérieur de deux cercles de rayon r_1 et r_2 qui représentent respectivement les distances du centre de force O au point le plus proche (***péricentre***) et le plus éloigné (***apocentre***) de lui. L'état est dit **lié**.



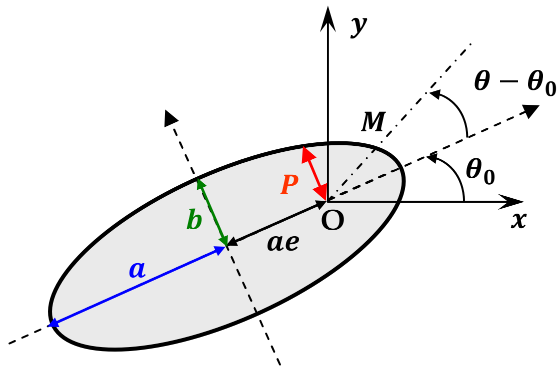
Ce point de vue englobe le cas particulier où $e = 0$; il s'agit alors d'une trajectoire **circulaire** dont le rayon ne peut être que r_0 ($r_1 = r_2 = r_0$). Dans ce cas particulier, l'énergie mécanique vaut : $E_m = -\frac{K^2}{2mC^2} = -\frac{|K|}{2P} = -\frac{mK}{2L_0^2}$

III - 5 - étude de l'état lié (le cas des trajectoires elliptiques)

Parmi les différentes trajectoires possibles discutées dans le paragraphe précédent, seule l'ellipse (et le cas particulier d'un cercle) est une courbe fermée. Dans les cas des trajectoires hyperbolique et parabolique, la coordonnée polaire r peut prendre des valeurs infinies, c'est à dire que le point matériel peut s'éloigner du centre de force O et s'échappe de l'influence de la force centrale $\vec{F}$

D'après les paragraphes précédents, les conditions d'un mouvement elliptique sont :

- la force doit être attractive ($K < 0$)
- l'énergie mécanique doit être négative ($E_m < 0 \Rightarrow e < 1$)



L'équation de la trajectoire est : $r = \frac{P}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$

$a = \frac{P}{1-e^2}$ est appelé le demi-grand axe

$b = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{aP}$ est le demi-petit axe.

III - 5 - a - période de révolution

La loi des aires nous indique que la vitesse aréolaire est constante. La durée mise par le point matériel M pour parcourir l'ellipse est donc une constante, c'est la période de révolution T, d'où :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = cte = \frac{C}{2} = \frac{\pi ab}{T}$$

or $P = \frac{b^2}{a} = \frac{mC^2}{|K|} \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{mC^2}{|K|}a \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2\frac{m}{|K|}$

Donc la période est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse.

III - 5 - b - expression de l'énergie

Nous avons démontré que la distance de la particule au centre de force **O** est limitée par r_1 et r_2, qui sont solution de l'équation : $E_m = E_{p,eff}$; c'est à dire $E_m = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r}$

$$\Rightarrow E_m r^2 - Kr - \frac{mC^2}{2} = 0$$

l'équation précédente est un polynôme de deuxième degré dont les solutions (r_1 et r_2) vérifient :

$$r_1 + r_1 = 2a = \frac{K}{E_m} \quad \Rightarrow \quad E_m = \frac{K}{2a}$$

Remarques :

① toutes les ellipses de même demi-grand axe $\boldsymbol{a}$ mais de demi-petit axe $\boldsymbol{b}$ différent sont parcourues avec la même énergie mécanique.

② cas particulier où $\boldsymbol{e}=\mathbf{0}$
si $\boldsymbol{e}=\mathbf{0}$, l'ellipse se réduit à un cercle de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon $\boldsymbol{r_0}$ correspondant au minimum de l'énergie potentielle effective et $\boldsymbol{E_m}=\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{2r_0}}$
or dans ce cas $\boldsymbol{E_p}=\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{r_0}}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{E_m}=-\boldsymbol{E_c}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E_p}=\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{2r_0}}$

IV - Application au mouvement des Planètes et des Satellites

IV - 1 - la loi de gravitation

Le mouvement des planètes autour du soleil ainsi que le mouvement des satellites autour de la terre correspond au cas attractif entre deux masses $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{m}$ avec $\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{Mm}<0$. La force d'interaction est donnée par la loi de gravitation : $\vec{\boldsymbol{F}}=-\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{M\,m}}{\boldsymbol{r^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$ où $\boldsymbol{r}$ est la distance entre $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{m}$, $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$ un vecteur unitaire dans la direction reliant $\boldsymbol{M}$ et **m** et $\boldsymbol{G}=\mathbf{6,672}\times\mathbf{10^{11}}\ S.I.$

IV - 2 - mouvement des planètes

La trajectoire d'une planète est une **ellipse** dont le soleil est un des foyers. La forme de cette ellipse est définie par son excentricité $\boldsymbol{e}$ (par exemple e vaut 0,007 pour Vénus et 0,017 pour la terre) Pour une orbite parfaitement circulaire, l'excentricité est nulle

IV - 2 - a - hypothèses

➢ on suppose que les interactions gravitationnelles ont seulement lieu entre une planète donnée d'une part et le soleil d'autre part. Ce qui revient à négliger l'effet dû aux autres planètes (un effet considéré comme étant une perturbation). C'est à dire que le système Soleil-Planète est un système isolé.

➢ on considère que le soleil et les planètes ont la symétrie sphérique. L'interaction Soleil-Planète est analogue à celle exercée entre deux points matériels ayant pour masse la masse totale du corps concerné située en leurs centres.

➢ on considère le soleil comme fixe dans le référentiel galiléen choisi.

La masse $\boldsymbol{M_p}$ d'une planète donnée étant négligeable devant la masse $\boldsymbol{M_s}$ du soleil. Le centre de masse du système Soleil-Planète est pratiquement confondu avec le centre du soleil et le référentiel barycentrique est pratiquement confondu avec le référentiel lié au soleil. Le mouvement de la particule fictive, décrit donc le mouvement de la planète par rapport au soleil. D'après ce qui précède une planète donnée est soumise à la force centrale newtonienne $\vec{\boldsymbol{F}}=-\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{M_pM_s}}{\boldsymbol{r^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$ où $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{SP}$ distance Soleil-Planète et $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}=\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{SP}}}{\boldsymbol{SP}}$

IV - 2 - b - les lois de Képler

➢ *1ère loi :* les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil est l'un des foyers.
➢ *2ème loi ::* le rayon vecteur du soleil à la planète balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux (loi des aires)
➢ *3ème loi :* Le carré de la période de révolution d'une planète de masse $\boldsymbol{M_p}$, autour du soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe de son orbite : $\frac{\boldsymbol{T^2}}{\boldsymbol{a^3}}=\boldsymbol{cte}=\boldsymbol{4\pi^2}\frac{\boldsymbol{M_p}}{|\boldsymbol{K}|}=\frac{\boldsymbol{4\pi^2}}{\boldsymbol{GM_s}}$
Ces lois ont été démontrées dans le § III - 5 du présent chapitre.

Remarque : *généralisation de la troisième loi de Kepler*

Si M_p n'est pas très petit devant M_S, il faut remplacer M_p par $\frac{M_p M_S}{M_p+M_S}$ et r par $r = GP$ $\Rightarrow$

$$\frac{a^3}{T^2} = G\frac{M_p + M_S}{4\pi^2}$$

APPLICATION :

La comète de Halley a un mouvement de période $T = 76,03\ années$. Son *périhélie* (point le plus proche du soleil) est à $0,59\ UA$ du soleil. Calculer en UA, le demi-grand axe de la trajectoire de la comète, son excentricité et la distance de son *aphélie* (point de la trajectoire le plus loin du soleil).
UA : unité astronomique qui correspond au demi-grand axe de l'orbite terrestre.

Solution :

D'après la 3ème loi de Kepler, le demi-grand axe a et la période T vérifient : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$

or pour la terre on a : $\frac{T_o^2}{a_o^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{a_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{2}{3}} = 17{,}947$

$\Rightarrow\ a = 17{,}947\ a_o = 17{,}947\ UA$ *puisque* $a_o = 1\,UA$ *et* $T_o = 1\ an$

Notons c la demi-distance entre les foyers de la trajectoire elliptique. La distance du périhélie est : $a - c = 0{,}59\ UA \quad \Rightarrow\ c = 17{,}357\ UA$

L'excentricité de l'ellipse est : $e = \frac{c}{a} = 0{,}967$

La distance de l'aphélie est : $a + c = 35{,}304\ UA$

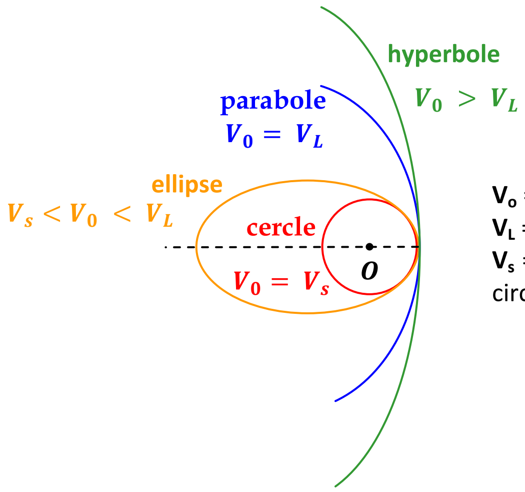
IV - 3 - satellisation

Le mouvement des satellites correspond au cas attractif entre deux masses M_A (masse de l'astre) et m (masse du satellite) avec $K = -G\,mM_A < 0$

Ici encore on va poser des hypothèses similaires à celles du paragraphe précédent :

- on considère que la seule interaction subie par le satellite est celle due à l'attraction gravitationnelle de la terre, supposée sphérique et homogène de masse M_T se trouvant en son centre.
- on considère la terre comme immobile dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

La masse du satellite étant négligeable devant la masse de la terre. Le centre de masse du système Terre-Satellite est pratiquement confondu avec le centre de la terre et le référentiel barycentrique est pratiquement confondu avec le référentiel géocentrique. Le mouvement de la particule fictive, décrit donc le mouvement du satellite par rapport à la terre.
Dans ces conditions, les orbites des satellites sont donc des coniques dont la nature dépend du signe de leur énergie mécanique (de son excentricité e) La figure ci-contre présente les différentes trajectoires suivies pour des valeurs croissantes de l'énergie (de la vitesse de lancement V_0), à partir du même point de lancement. Une étude fine des satellites exigerait la prise en compte de nombreux paramètres susceptibles d'induire des effets non négligeables (attraction solaire et lunaire, frottement atmosphérique, etc.....). Nous nous limiterons ici à une approche théorique simplifiée.



V_o = vitesse de lancement
V_L = vitesse de libération
V_s = vitesse de satellisation sur une orbite circulaire

Remarque *:*

Le point le plus proche du foyer O de l'ellipse est appelé le **péricentre**. Dans le cas du mouvement de gravitation d'une planète autour du soleil, on parle de **périhélie** et pour un satellite de la terre, on parle de **périgée**.

Le point le plus éloigné est appelé **apocentre**. Dans le cas du mouvement de gravitation d'une planète autour du soleil, on parle d'**aphélie** et pour un satellite de la terre, on parle d'**apogée**.

IV - 3 - a - satellite sur une orbite circulaire : première vitesse cosmique ou vitesse de satellisation

La **première vitesse cosmique** V_s est la vitesse que doit posséder un satellite pour tourner autour d'un astre à basse altitude.

La vitesse nécessaire pour satelliser un corps de masse **m** sur une orbite circulaire de rayon **r**, est telle que (d'après le § IV - 5 - b) : $E_m = \frac{K}{2r} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{K}{r}$ avec $K = -GM_A m < 0$ où M_A est la masse de l'astre $\Rightarrow V^2 = -\frac{K}{m\,r} = \frac{GM_A}{r} \qquad \Rightarrow \qquad V = V_s = \sqrt{\frac{GM_A}{r}}$

Ce mouvement circulaire est périodique de période $T = \frac{2\pi r}{V} \Rightarrow \qquad T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_A}}$

En confondant le poids et la force gravitationnelle, on a, à la surface de l'astre, $g_o = \frac{GM_A}{R_A^2}$ où R_A est le rayon de l'astre supposé sphérique $\Rightarrow V_s = \sqrt{\frac{g_o R_A^2}{r}}$ et $\qquad T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{g_o R_A^2}}$

Dans le cas d'un satellite en basse altitude $r \approx R_A \quad \Rightarrow V_s = \sqrt{g_o R_A} \qquad$ et $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R_A}{g_o}}$

Dans le cas de la terre et pour $r \approx R_T$, on a : $g_o = \frac{GM_T}{R_T^2}$, $V_s = \sqrt{g_o R_T} \qquad$ et $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{g_o}}$

sachant que $R_T \approx 6400\ km$ et $g_0 \approx 9{,}8\ m.s^{-2}$, alors :
$V_s = 7{,}92\ km.s^{-1} \qquad$ et $\qquad T = 5{,}08 \times 10^3 s \approx 1\ H\ 24\ mn$

IV - 3 - b - aspects énergétiques d'un satellite en mouvement circulaire

Dans le cas d'une orbite circulaire on a : $\qquad e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_m = -E_c = \frac{1}{2}E_p = -\frac{GM_T m}{2r}$
où M_T est la masse de la terre et m la masse du satellite

Par suite des frottements avec l'atmosphère le satellite est freiné. En effet cette force de freinage est opposée à la vitesse, donc sa puissance $\mathcal{P}_f$, est négative. Il en résulte que l'énergie mécanique du satellite diminue : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_f < 0$

Comme le mouvement est circulaire et peu modifié, les relations établies ci-dessus entre les différentes énergies sont toujours valables : $\boldsymbol{E_m = -E_c = \frac{1}{2}E_p}$

Remarque *:*

$\boldsymbol{E_m}$ décroît $\Rightarrow$ $\boldsymbol{E_c}$ croît. Ce résultat paradoxal provient du fait que l'augmentation de l'énergie cinétique sert à compenser la trop forte diminution de l'énergie potentielle.

IV - 3 - c - trajectoire parabolique : vitesse de libération ou seconde vitesse cosmique

On appelle **vitesse de libération** $\boldsymbol{V_L}$, la vitesse minimale pour laquelle l'état est libre (le corps se libère du champ de gravitation). L'orbite est donc parabolique et l'énergie mécanique est nulle (le point arrive à l'infini avec une vitesse nulle). Calculons la vitesse $\boldsymbol{V_L}$ à laquelle il faudrait lancer un point soumis à la seule gravitation à partir de la surface terrestre pour que ce point puisse aller à l'infini. On a :

$$\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}mV_L^2 - \frac{GM_Tm}{r} = 0} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{V_L = \sqrt{2\frac{GM_T}{r}} \approx \sqrt{2\frac{GM_T}{R}}}$$

$$\boldsymbol{V_L = \sqrt{2g_0R_T}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{V_L = \sqrt{2}V_s}$$

la vitesse $\boldsymbol{V_L}$ est aussi appelée **vitesse parabolique**, ou encore **seconde vitesse cosmique**

application numérique : pour $R_T \approx 6400\ km$ et $g_0 \approx 9{,}8\ m.s^{-2},\ V_L \approx 11{,}2\ km.s^{-1}$

Remarques :

① notons que la vitesse de libération $\boldsymbol{V_L}$ est indépendante de la masse projetée à partie de la terre. Par exemple, une fusée a la même vitesse de libération qu'une molécule.

② l'équation $\boldsymbol{V_L = \sqrt{2\frac{GM_T}{R}}}$ peut s'appliquer au lancement d'objets à partir de n'importe quelle planète. La vitesse de libération pour n'importe quelle planète de masse $\boldsymbol{M_p}$ de rayon $\boldsymbol{R_p}$ est donc $\boldsymbol{V_L = \sqrt{2\frac{GM_p}{R_p}}}$. Le tableau ci-dessous donne la liste des vitesses de libération des planètes et de la lune.

Astre	Masse (kg)	Rayon moyen (m)	V_L (km/s)
Mercure	3,28x10^{23}	2,44 x10^{6}	4,25
Vénus	4,88x10^{24}	6,05 x10^{6}	10,36
Terre	5,98x10^{24}	6,37 x10^{6}	11,20
Mars	6,42x10^{23}	3,39 x10^{6}	5,03
Jupiter	1,90x10^{27}	7,14 x10^{7}	60,20
Saturne	5,68x10^{26}	6,02 x10^{7}	36,09
Uranus	8,68x10^{25}	2,55 x10^{7}	21,38
Neptune	1,03x10^{26}	2,21 x10^{7}	23,56
Pluton	1,31x10^{22}	1,15 x10^{6}	1,23
Lune	7,36x10^{30}	1,74 x10^{6}	2,30

On remarque que les valeurs qui y figurent vont de 2,3 $km.s^{-1}$ dans le cas de la lune à 60 $km.s^{-1}$ pour Jupiter. Ces résultats, ainsi que certaines notions de la théorie cinétique des gaz (voir cours thermodynamique) expliquent que certaines planètes ont une atmosphère alors que d'autres en sont dépourvues.

Les atomes légers, tels que l'hydrogène et l'hélium, ont des vitesses moyennes plus élevées que les atomes lourds. Ainsi ces atomes légers, ayant une vitesse moyenne plus élevées que la vitesse de libération pourront

s'échapper de l'atmosphère de la planète. C'est d'ailleurs ce qui explique que l'atmosphère terrestre ne puisse pas retenir les molécules d'hydrogène et d'hélium, alors que les molécules les plus lourds, comme celles d'oxygène et d'azote, ne peuvent s'en libérer.
Sur Jupiter, la vitesse de libération est très grande ($60\ km.s^{-1}$). Ce qui explique que son atmosphère soit principalement composé d'hydrogène.

APPLICATIONS :

❶ Un satellite terrestre a un mouvement de période $T = 5843\ s$. Son périgée est à $350km$ d'altitude.
1 - Calculer le demi grand-axe de sa trajectoire
2 - Calculer l'excentricité de la trajectoire et l'altitude de son apogée.
On donne : le rayon de la terre $R_T = 6400\ km$.

Solution :

1 - La 3ème loi de Kepler $\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}$ $\Rightarrow$ $g_o = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}8\ m.s^{-2}$

$\Rightarrow$ $a = \left(\frac{T^2 g_o R_T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 730\ km$

2 - L'équation de la trajectoire est $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$

le périgée correspond à $\theta = 0$ $\Rightarrow$ $r_p = \frac{p}{1+e} = 6750\ km$

l'apogée correspond $\theta = \pi$ $\Rightarrow$ $r_A = \frac{p}{1-e}$

Le demi grand-axe correspond à : $a = \frac{1}{2}(r_A + r_p) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{r_p}{1-e}$ $\Rightarrow$ $e = 1 - \frac{r_p}{a} = 0{,}04$

l'apogée est à : $r_A = \frac{p}{1-e} = a(1+e) = 7310\ km$ *ce qui correspond à une altitude* $h = r_A - R_T = 910\ km$

❷ Un satellite de masse m décrit une orbite circulaire à basse altitude dans le plan de l'équateur. Ce satellite a été lancé d'un point situé sur l'équateur.
Calculer l'énergie qu'il a fallu fournir à ce satellite pour le mettre sur orbite, en distinguant les deux sens possibles de rotation sur la trajectoire.
Calculer l'écart relatif $\frac{\Delta E}{E}$
On donne : le rayon de la terre $R_T = 6400\ km$ et la masse du satellite $m = 80kg$.

Solution :

L'énergie potentielle de pesanteur est $E_p = \frac{K}{r} = \frac{K}{h+R_T} \approx \frac{K}{R_T}$ *la même qu'à la surface de la terre*

$\Rightarrow$ *l'énergie à fournir correspond à la variation de l'énergie cinétique*

Initialement, immobile au sol, le satellite a une vitesse $V = R\omega = 465\ m.s^{-1}$ *par rapport au référentiel géocentrique.*
Pour être en orbite circulaire, il doit avoir une vitesse $V_s = \sqrt{g_0 R_T} = 7920\ m.s^{-1}$

- Pour mettre le satellite en orbite circulaire dans le sens de rotation de la terre, il suffit de faire passer son énergie cinétique de $E_c = \frac{1}{2}mV^2$ *à* $E'_c = \frac{1}{2}mV_s^2$ *d'où une énergie fournie :* $E_1 = E'_c - E_c = 2{,}5 \times 10^9\ J$
- Pour mettre le satellite en orbite circulaire dans le sens contraire de la rotation de la terre, il faut compenser son mouvement initial pour le faire tourner dans l'autre sens. Il faut donc fournir une énergie $E_2 = E'_c - E_c = 2{,}52 \times 10^9\ J$

$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{2E_C}{E'_C} = \frac{2V^2}{V_S^2} = 7 \times 10^{-3}$

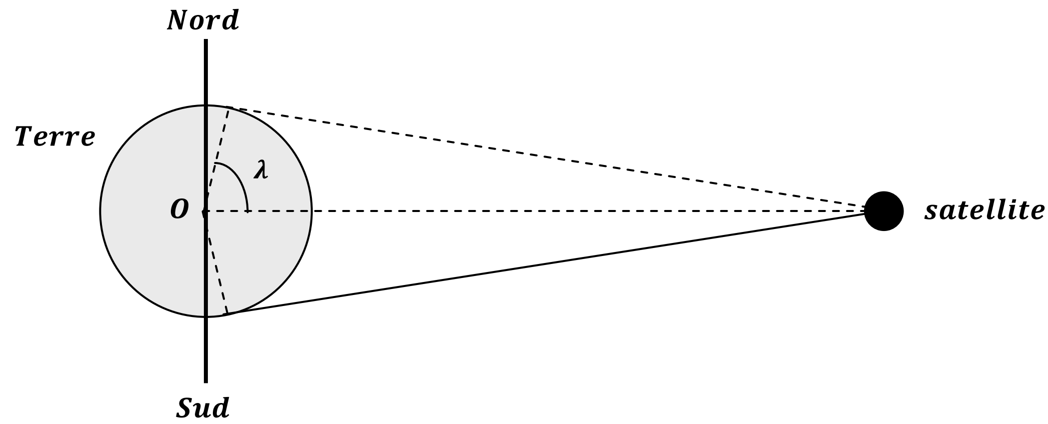
IV - 3 - d - satellite géostationnaire

Les satellites géostationnaires évoluent dans le plan équatorial et ils apparaissent immobiles à un observateur terrestre (d'où le terme géostationnaire). Donc, un satellite géostationnaire est animé d'un mouvement circulaire qui, dans le référentiel géocentrique, présente une vitesse angulaire égale à celle de la terre (orbite géosynchrone). La période de rotation de la terre est égale à $\boldsymbol{T_0} = \mathbf{86164}\ s$ (jour sidéral), le rayon $\boldsymbol{R_0}$ de l'orbite géosynchrone est déduit de la 3ème loi de Kepler :

$$\boldsymbol{R} = \left(\frac{\boldsymbol{GM_T T^2}}{\boldsymbol{4\pi^2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\boldsymbol{g_0 R_T^2 T^2}}{\boldsymbol{4\pi^2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

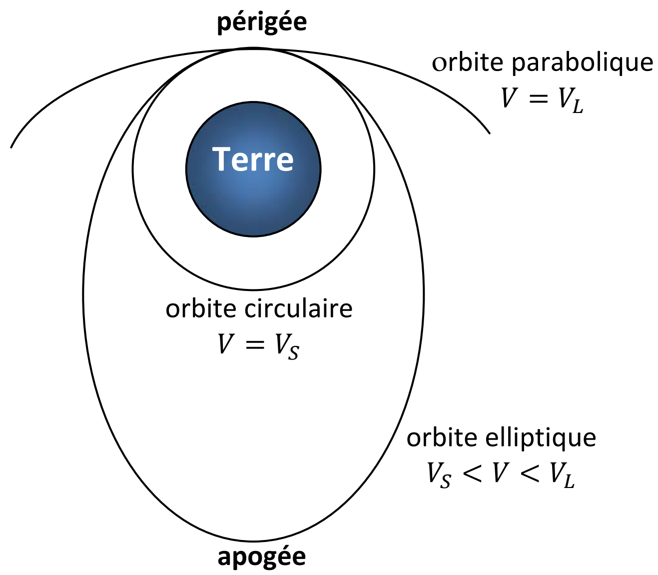
Le rayon de la terre est $\boldsymbol{R_T} = \mathbf{6378}\ \boldsymbol{km}$, l'altitude d'un satellite géostationnaire est de $\mathbf{35784}\ km$.

Un satellite géostationnaire ne permet pas d'observer les régions polaires (voir figure ci-dessous). Les limites en latitude Nord et Sud sont définies par $\frac{\boldsymbol{R_T}}{\boldsymbol{R_0}} = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\lambda}$ où $\boldsymbol{\lambda}$ est la latitude. Donc toute partie du globe située au nord ou au sud des parallèles $\mathbf{81,3}$ ne peut être visible des satellites géostationnaires.



IV - 3 - e - mise sur orbite d'un satellite géostationnaire

La mise sur orbite d'un satellite représente une phase très délicate de la mission en raison des conditions extrêmes supportées par le véhicule et son lanceur ainsi que du grand nombre de paramètres à maîtriser en quelques instants. En fonction des caractéristiques orbitales souhaitées, la vitesse communiquée par le lanceur au satellite lors de sa mise sur orbite est définie par la valeur de l'énergie mécanique. On a vu que plusieurs cas sont à envisager:



- la plus petite vitesse initiale permettant à un satellite d'avoir une trajectoire circulaire est la vitesse de satellisation $\boldsymbol{V_s}$ ou première vitesse cosmique (c'est aussi la plus petite vitesse initiale permettant à un satellite de ne pas retomber sur le sol). Pour un satellite évoluant à basse altitude, la valeur de cette vitesse est de l'ordre de 7,92 $km.s^{-1}$

- si la vitesse initiale du satellite est égale à légèrement supérieure à $\boldsymbol{V_s}$, $\left(\boldsymbol{V_s} < V < \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{V_s}\right)$, la trajectoire devient une ellipse dont le périgée est le point de mise sur orbite (voir figure ci-dessous).

- lorsque la vitesse atteint la vitesse de libération $\boldsymbol{V_L} = \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{V_s}$, ou la seconde vitesse cosmique, le satellite s'éloigne indéfiniment de la Terre. La vitesse de libération est telle que l'énergie mécanique totale c'est-à-dire cinétique et potentielle du véhicule soit nulle. Dans ces conditions la vitesse de libération est égale à $V_L = 11{,}2\ km.s^{-1}$. Au-delà de cette valeur de la vitesse au point d'éjection, la trajectoire devient une parabole ou même une hyperbole pour des vitesses très supérieures à V_L. La mise sur orbite d'une sonde spatiale exige donc ces conditions de lancement.

Dans le cas d'un satellite géostationnaire, la mise à poste d'un satellite sur orbite équatoriale circulaire de rayon R_0 ne s'effectue pas directement par le lanceur. Le procédé usuel consiste à effectuer cette manœuvre en trois étapes successives, par le biais d'une méthode dite méthode de **transfert d'Hohmann**, qui permet le transfert entre une orbite initiale à basse altitude et l'orbite géosynchrone. Le principe repose sur la communication d'impulsion au véhicule en des lieux bien précis.

- la première étape consiste à placer le satellite sur une orbite basse circulaire à environ $200\ km$ d'altitude, c'est à dire à la vitesse $V_1 = 7{,}92\ km.s^{-1}$.

- une première impulsion, caractérisée par un accroissement de vitesse ($\Delta V_1 = 2465\ m.s^{-1}$ si l'orbite est équatoriale), transforme l'orbite précédente en orbite elliptique de périgée $200\ km$ et d'apogée $35800\ km$. Sur une telle trajectoire, la vitesse au périgée est de $10250\ m.s^{-1}$ et à l'apogée $1590\ m.s^{-1}$.

- lors du passage du satellite à l'apogée, une deuxième impulsion (caractérisée par un accroissement de vitesse $\Delta V_2 = 1480\ m.s^{-1}$) met le satellite sur une orbite circulaire.