Faculté des Sciences exactes
Département de M/MI
Année d'étude : 1ère année MI

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Interrogation № 1 d'analyse 1
2019/2020

Nom :............ Prénom :............. Groupe :............

<u>Exercice :</u> (06 points) Pour chacun des ensembles suivants, déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le minimum, le maximum, s'ils existent (en justifiant, si nécessaire, vos réponses en utilisant la caractérisation de la borne supérieure ou inférieure).

$$A_1 = \{2 + \frac{1}{2n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}\,, \qquad A_2 = \{(-1)^n + 1\ ;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

<u>Réponse :</u>

1) $A_1 = \left\{2 + \frac{1}{2n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$ *Pour* $n = 1$, *on a* $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \in A_1 \Longrightarrow A_1 \neq \emptyset.$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Longrightarrow\ 0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}\ \Longrightarrow 2 < 2 + \frac{1}{2n} \leq \frac{5}{2}$. Alors $\forall x \in A_1 :\ 2 < x \leq \frac{5}{2}$, **0,5 pt**

d'où A_1 est majorée et minorée $\Longrightarrow \inf A_1$ *et* $\sup A_1$ *existent*.

- $\left.\begin{array}{c} \frac{5}{2}\ \textit{est un majorant de } A_1 \\ \textit{et}\ \frac{5}{2} \in A_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \max A_1 = \frac{5}{2}.$ **01 pt**

- $\max A_1 = \frac{5}{2} \Longrightarrow \sup A_1 = \frac{5}{2}.$ **0,5 pt**

- Montrons que $\inf A_1 = 2$ en utilisant la caractérisation de la borne inférieure.

  $\inf A_1 = 2\ \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall x \in A_1 : x \geq 2 \text{ (vérifiée par définition de } A_1), \\ (ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A_1 : x_0 < 2 + \varepsilon. \end{cases}$ **0,5 pt**

ii) soit $\varepsilon > 0$.

Chercher l'existence d'un $x_0 \in A_1$ revient à chercher un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 + \frac{1}{2n_0} < 2 + \varepsilon$.

$$2 + \frac{1}{2n_0} < 2 + \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{2n_0} < \varepsilon \Longrightarrow n_0 > \frac{1}{2\varepsilon}$$

01 pt

Il suffit de prendre $n_0 = E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) + 1$. (où $E(.)$ *partie entière*)

Alors $\exists x_0 = 2 + \frac{1}{2n_0} \in A_1$(avec $n_0 = E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) + 1$) : $x_0 < 2 + \varepsilon$. Et *ii)* est donc vérifiée.

- $\inf A_1 = 2\ \notin A_1 \Longrightarrow \min A_1$ *n'existe pas*. **0,5 pt**

2) $A_2 = \{(-1)^n + 1\ ;\ n \in \mathbb{N}\}.$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Si n est pair, $(-1)^n + 1 = 1 + 1 = 2$

Si n est impair, $(-1)^n + 1 = -1 + 1 = 0$. D'où

$$A_2 = \{0,2\}.$$ **01 pt**

A_2 est un ensemble fini contenant deux éléments.

Par conséquent,

$\max A_2 = \sup A_2 = 2$, et $\min A_2 = \inf A_2 = 0.$ **01 pt**

Enseignant : Mr. Boukhelifa.