Faculté des Sciences exactes
Département de M/MI
Année d'étude : 1ère année MI

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Interrogation № 1 d'analyse
2019/2020

Nom :... Prénom :... Groupe :..........

Exercice : (06 points) Pour chacun des ensembles suivants, déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le minimum, le maximum, s'ils existent (en justifiant, si nécessaire, vos réponses en utilisant la caractérisation de la borne supérieure ou inférieure).

$$A_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{3}[\ , \qquad A_2 = \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Réponse :

1) $A_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{3}[= \{x \in \mathbb{R} ;\ \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}\}$. *On a* $\sqrt{2} \in A_1 \Longrightarrow A_1 \neq \emptyset$. *On a aussi* $\forall x \in A_1 : \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$ *et donc* A_1 *est majorée et minorée* $\Longrightarrow \inf A_1$ *et* $\sup A_1$ *existent*

- $\left.\begin{array}{r} \sqrt{2}\ \textit{est un minorant de}\ A_1 \\ \textit{et}\ \sqrt{2} \in A_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \min A_1 = \sqrt{2}$. **01 pt**
- $\min A_1 = \sqrt{2} \Longrightarrow \inf A_1 = \sqrt{2}$. **0,5 pt**
- Montrons que $\sup A_1 = \sqrt{3}$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.

$$\sup A_1 = \sqrt{3} \iff \begin{cases} i)\ \forall x \in A_1 : x \leq \sqrt{3}\ \text{(vérifiée par définition de } A_1), \\ ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A_1 : x_0 > \sqrt{3} - \varepsilon. \end{cases}$$ **0,5 pt**

Soit $\varepsilon > 0$.

- <u>1er cas : $\sqrt{2} \leq \sqrt{3} - \varepsilon < \sqrt{3}$.</u>

On pose $x_0 = \frac{(\sqrt{3}-\varepsilon)+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \frac{\varepsilon}{2}$.

On a : $x_0 \in A_1$, *car* $(\sqrt{2} \leq \sqrt{3} - \varepsilon < x_0 < \sqrt{3} \Longrightarrow \sqrt{2} < x_0 < \sqrt{3})$,

et puisque $x_0 > \sqrt{3} - \varepsilon$, alors $\exists x_0 \in A_1 : x_0 > \sqrt{3} - \varepsilon$. Et ii) est vérifiée. **01 pt**

- <u>2ème cas : $\sqrt{3} - \varepsilon < \sqrt{2}$.</u>

Dans ce cas on a : $\forall x \in A_1, x > \sqrt{3} - \varepsilon$. Et ii) est vérifiée. **0,5 pt**

- $\sup A_1 = \sqrt{3} \notin A_1 \Longrightarrow \max A_1$ *n'existe pas*. **0,5 pt**

2) $A_2 = \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

On a : si $n = 1$, $E\left(\frac{1}{n}\right) = E(1) = 1$,

Si $n > 1$, alors $0 < \frac{1}{n} < 1$ *et* $E\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

$A_2 = \{0,1\}$. **01 pt**

A_2 est un ensemble fini contenant deux éléments.

Par conséquent,

$\max A_2 = \sup A_2 = 1$, et $\min A_2 = \inf A_2 = 0$. **01 pt**

Enseignant : Mr. Boukhelifa.