

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



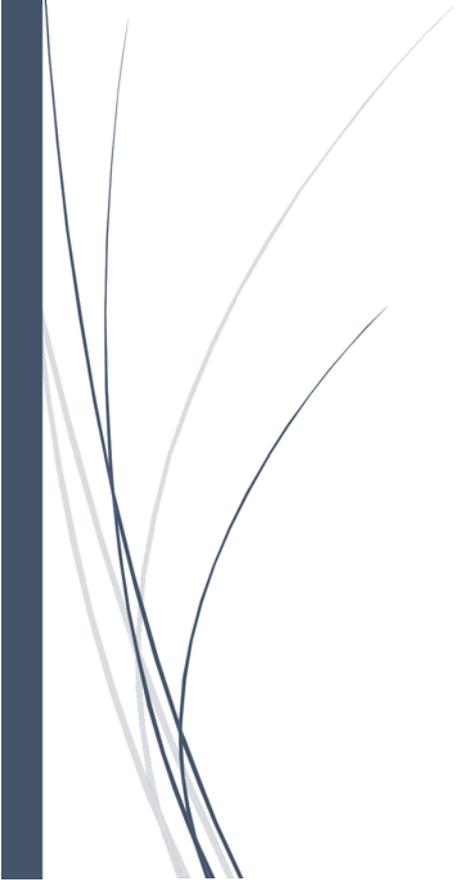
Initiation aux transferts thermiques

Cours

Préparé et rédigé par : Dr ALI AGHA Hamza

3^{ème} Licence : Energétique et Construction Mécanique

Année Universitaire : 2018/2019



Sommaire

	Page
Sommaire	
Nomenclature	
Chapitre I : Notions fondamentales	1
I.1. Introduction.....	2
I.2. Définitions.....	2
I.2.1. Energie.....	2
I.2.2. Notion de température.....	2
I.2.3. Notion de chaleur.....	3
I.3. Modes de transfert de chaleur.....	4
I.3.1. Conduction thermique.....	4
I.3.2. Rayonnement.....	4
I.3.3. Convection.....	5
I.4. Exemples concrets de problèmes thermiques.....	5
Chapitre II : Transfert de chaleur par conduction	
II.1. Introduction.....	9
II.2. Loi de Fourier.....	9
II.3. Conductivité thermique.....	10
II.4. Équation générale de la conduction.....	11
II.4.2. Expression des flux d'énergie	11
II.4.3. Équation de la conduction monodimensionnelle	11
II.5. Conditions aux limites.....	15
II.6. Conduction en régime permanent.....	16
II.6.1. Résistance thermique conductive pour une géométrie plane.....	16
II.6.2. Résistance thermique (géométrie cylindrique et sphérique).....	18
II.6.3. Rayon critique pour l'isolation.....	19
II.7. Ailettes.....	20
II.7.1. Définition.....	20
II.7.2. l'équation de l'ailette.....	20
II.7.3. Efficacité d'une ailette.....	22
II.7.4. Rendement d'une ailette.....	23
Chapitre III : Transfert thermique par convection	
III.1. Introduction.....	25
III.2. Modélisation du transfert de chaleur par convection.....	26
III.3. Classification des écoulements de fluide.....	28
III.4. Couches limites (dynamique et thermique).....	29
III.5. Nombres sans dimensions (analyse dimensionnelle).....	31
III.6. Quelques formules empiriques pour le calcul de h.....	35
III.6.1. Convection forcée externe.....	35
III.6.2. Convection forcée interne.....	41
III.6.3. Convection naturelle.....	45
Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement	
IV.1. Introduction.....	49
IV.2. Définitions et lois fondamentales.....	49
IV.2.1. Rayonnement électromagnétique.....	49
IV.2.2. Structure du rayonnement.....	50

IV.2.3. Loi de Planck	50
IV.2.4. Principe du chauffage par rayonnement.....	51
IV.2.5. Classification des corps soumis à un rayonnement.....	51
IV.2.6. Loi de conservation de l'énergie.....	51
IV.3. Grandeurs énergétiques.....	52
IV.4. Définitions générales du rayonnement.....	53
IV.5. Lois du rayonnement thermique.....	56
IV.6. Emission des corps réels.....	58
IV.7. Echanges radiatifs.....	60
Références bibliographiques.....	69

Objectifs poursuivis :

Les transferts de chaleur sont des sciences fondamentales qui traitent le taux de transfert de l'énergie thermique. Ils ont un large domaine d'application allant des systèmes biologiques aux appareils électroménagers, aux bâtiments résidentiels et commerciaux, aux procédés industriels, aux appareils électroniques et au traitement des aliments.

Ce cours est destiné aux étudiants en génie mécanique dans leur troisième année licence, option : Energétique et Construction Mécanique.

Au minimum, l'étudiant doit donc :

- En connaître les principes fondamentaux,
- Etre capable d'évaluer leur importance dans un problème particulier,
- Dégager les ordres de grandeur par une modélisation simple.

Cette présentation résulte de la lecture de nombreux ouvrages et documents. En particulier, je me suis largement inspiré du livre du professeur CENGEL, Yunus (référence [1]), ainsi que des nombreux documents accessibles en ligne.

Nomenclature :

A	Surface d'échange	(m ²)
A_c	Surface	(m ²)
c_p	Chaleur spécifique	(J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)
D	Diamètre	(m)
E	Eclairement	(W.m ⁻²)
F_{12}	Facteur de forme	(-)
Gr	Nombre de Grashof	(-)
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection	(W.m ⁻² .K ⁻¹)
h_0	constante de Planck	(J.s)
I	Intensité	W/sr
J_λ	Radiosité spectrale	(W/m ² .µm)
L	Epaisseur	(m)
L_c	Longueur caractéristique	(m)
L_{Ox}	Luminance	(W/m ² sr)
M_λ	Emittance monochromatique	(W/m ³)
\dot{m}	Débit massique	(kg.s ⁻¹)
Nu	Nombre de Nusselt	(-)
p	Périmètre	(m)
Pe	Nombre de Péclet	(-)
Pr	Nombre de Prandtl	(-)
Q	Chaleur	(J)
q	Densité volumique d'énergie générée	(W m ⁻³)
r	Rayon	(m)
Ra	Nombre de Rayleigh	(-)
Re	Nombre de Reynolds	(-)
R_{th}	Résistance thermique conductive	K.W ⁻¹
S	Aire de surface	(m ²)
T	Température	(K)
t	Temps	(s)
V	Volume	(m ³)
x, y	Coordonnées cartésiennes	(m)

Symboles grecques

α	Diffusivité thermique	(m ² .s ⁻¹)
α_0	Facteur d'absorption	
β	coefficient de dilatation thermique	(K ⁻¹)
δ	Epaisseur de couche limite	(m)
$\varepsilon_{\text{aillette}}$	Efficacité d'une ailette	(-)
ε_p	Facteur d'émission de la surface	
ϕ	Flux thermique	(W)
η	Rendement d'une ailette	(-)
φ	Densité du flux thermique	(W.m ⁻²)
λ	Conductivité thermique	W.m ⁻¹ .K ⁻¹
μ	viscosité dynamique	(kg/m.s)
θ	Température	(K)
ρ	masse volumique	(kg.m ⁻³)
ρ_0	Facteur de réflexion	(-)
σ	Constante de Stefan 5,67.10 ⁻⁸	(W m ⁻² K ⁻⁴)

Chapitre I :

Notions fondamentales

Plan du chapitre :

- I.1. Introduction**
 - I.2. Définitions**
 - I.2.1. Energie**
 - I.2.2. Notion de température**
 - I.2.3. Notion de chaleur**
 - I.3. Modes de transfert de chaleur**
 - I.3.1. Conduction thermique**
 - I.3.2. Rayonnement**
-

Objectifs

- Comprendre la différence entre la thermodynamique et le transfert thermique ;
- Avoir quelques notions fondamentales pour construire une analyse énergétique ;
- Connaitre les différents mécanismes de transfert thermique : conduction, convection, rayonnement.

I.1. Introduction

La thermodynamique classique ne s'intéresse généralement qu'aux états d'équilibre et aux variations entre ces états, grâce à l'utilisation de fonctions d'état, qui sur un plan mathématique sont des différentielles totales exactes. On pourrait d'ailleurs plus logiquement appeler cette discipline la thermostatique.

Le transfert thermique se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

I.2. Définitions

I.2.1. Energie

L'énergie correspond à un transfert ou échange par interaction d'un système avec son environnement. Ce système subit alors une transformation. On distingue habituellement 2 types d'énergie : i) le travail noté W qui peut prendre diverses formes selon l'origine physique du transfert en jeu (électrique, magnétique, mécanique.....), et ii) la **chaleur** notée Q .

I.2.2. Notion de température

C'est une **variable d'état** qui, du point de vue de la structure de la matière, caractérise le degré d'agitation de ses particules. Elle résulte donc de la détermination d'une moyenne et, de ce fait, il est impossible en toute rigueur de définir la température en un point géométrique. Les moyens d'observation explorent un domaine fini (de l'ordre du mm³ ou même moins). Ce domaine très restreint contient encore un nombre de particules suffisant pour que les considérations statistiques aient un sens. C'est donc toujours la température d'une boule au voisinage d'un point que l'on mesure, et que l'on désigne par "température en ce point".

On dit qu'à l'instant t la température d'un corps est uniforme si, en cet instant, tous les appareils de mesure indiquent la même valeur T quelle que soit leur position. Nous dirons en outre qu'elle est constante si T est indépendante de l'instant d'observation. Si ces deux conditions ne sont pas réalisées, nous dirons que la température est une fonction $T(x,y,z,t)$ des coordonnées du repère d'espace-temps. A l'intérieur d'un corps homogène, on peut donc définir à chaque instant t des surfaces isothermes caractérisées par $T(x,y,z,t) = \text{cste}$. L'unité de température est "Le Kelvin (K)". On utilise fréquemment la température Celsius définie

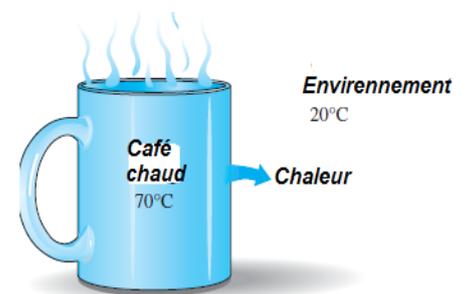


Fig.I.1. Ecoulements thermiques dans les directions de températures décroissantes.

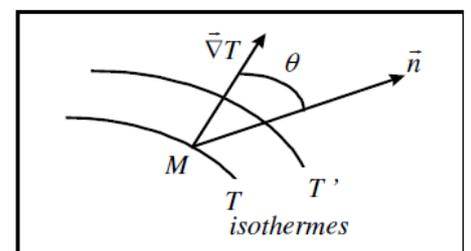


Fig. I.2. Surfaces isothermes et gradient de température.

par la différence $T-T_0$ entre deux températures thermodynamiques T et T_0 avec $T_0 = 273,15$ K. Une différence de température peut s'exprimer soit en Kelvins, soit en degrés Celsius.

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite **surface isotherme**. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le **gradient de température** :

$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n}$, en coordonnées cartésiennes, le gradient est écrit

comme suit : $\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$

I.2.3. Notion de chaleur

C'est une forme d'énergie au même titre que le travail d'un système de forces au cours d'un déplacement. On ne peut donc pas parler de la "chaleur d'un corps", ni même de la "chaleur contenue dans un corps", car la prise en compte d'une quantité de chaleur Q implique une situation évolutive. Il s'agit forcément d'un échange d'énergie entre plusieurs corps (ou entre plusieurs domaines d'un même corps) au cours d'un laps de temps déterminé. L'unité est le Joule (**J**). Sa valeur est petite, ce qui fait qu'on a communément recours au kilo Joule (**kJ**). Si, entre deux instants t et t' , l'interaction étudiée s'accompagne d'un échange de chaleur δQ , on appelle flux thermique moyen la quantité $\delta Q/(t-t')$ et, par un passage à la limite, on peut définir :

- **Un flux thermique** (ϕ) (c'est une puissance – heat transfer rate) instantanée en **Watts (W)**,
- Ramenée à l'unité de surface on parle de **densité de flux**

$$\text{thermique } (\varphi) \text{ (W/m}^2) \varphi = \frac{\phi}{S} .$$

Lorsque le flux transfère de chaleur (ϕ) est disponible, la quantité totale de chaleur transférée Q pendant un intervalle de temps Δt peut être déterminée à partir de : $Q = \int_0^{\Delta t} \phi . dt$

Pour un système fermé, la chaleur transférée entre deux états d'équilibre, peut s'exprimer comme suit d'après première loi de la thermodynamique : $\delta Q = mc_p dT$ avec m représente la masse (kg) et c_p est la chaleur massique ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$).

I.3. Modes de transfert de chaleur

Un transfert de chaleur ou transfert thermique entre 2 corps est une interaction énergétique qui résulte d'une différence de température entre les 2 corps. On distingue habituellement 3 modes de transfert de chaleur :

1. La conduction thermique ou diffusion thermique
2. Le rayonnement thermique
3. La convection

Ces trois modes sont régis par des lois spécifiques et feront ainsi l'objet de chapitres différents, cependant strictement parlant, seuls la conduction et le rayonnement sont des modes fondamentaux de transmission de la chaleur ; la convection, tout en étant très importante, ne fait que combiner la conduction avec un déplacement de fluide. En outre il est rare qu'une situation particulière ne concerne qu'un seul mode : le plus souvent 2 sinon 3 modes entrent en jeu. Il sera donc nécessaire de poser correctement les problèmes pour prendre en compte ces différents mécanismes. N'oublions pas qu'un autre mode de transfert, qui ne fera pas l'objet ici d'étude, existe : il s'agit des changements d'état.

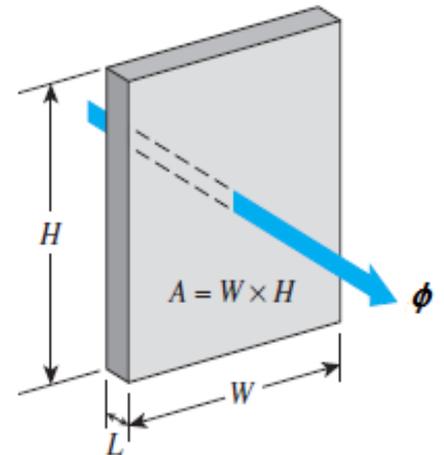


Fig. I.3. Exemple de conduction thermique.

I.3.1. Conduction thermique

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres. La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier.

I.3.2. Rayonnement

C'est **une transmission d'énergie à distance**, entre deux corps séparés ou non par un milieu matériel (transformation d'énergie thermique d'un émetteur en énergie électromagnétique, propagation, transformation partielle en énergie thermique sur un corps récepteur). C'est le cas de l'énergie qui nous vient du soleil. L'interprétation physique est la suivante : tout corps émet des particules désignées par "photons" ; ceux-ci se déplacent à la vitesse de la lumière et transportent une énergie fonction de leur "longueur d'onde". Un corps (C) émettant des photons dans toutes les directions possibles, certains d'entre eux sont reçus par l'autre corps (C') et éventuellement absorbés, en tout ou partie. Bien entendu, le corps (C') émet aussi des photons dont certains seront

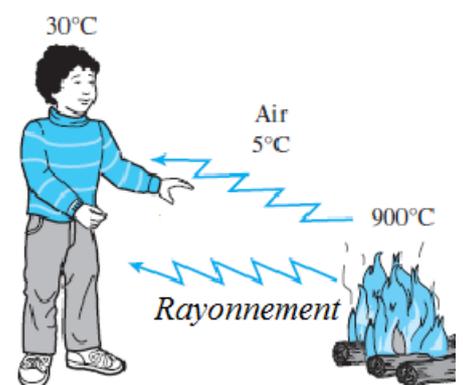


Fig. I.4. Exemple de rayonnement.

reçus et absorbés par (C). Le bilan net se traduit par un échange d'énergie entre (C) et (C').

I.3.3. Convection

C'est le phénomène observé entre un fluide en mouvement et une paroi, phénomène principal dans la plupart des échangeurs de chaleur. La cause profonde est encore une **agitation des particules fluides**, mais à une échelle beaucoup moins microscopique. Les parcelles de matière au contact de la paroi (chaude par exemple) s'échauffent par conduction ; le mouvement du fluide reporte ces parcelles dans la masse où elles cèdent par mélange une partie de la chaleur reçue ; d'autres les remplacent à la paroi et ainsi de suite. Quant au mouvement du fluide, il peut avoir deux causes. Ou bien il est imposé de l'extérieur par une machine (pompe, ventilateur, compresseur) ; c'est la **convection forcée**. Ou bien le contact du fluide avec la paroi plus chaude ou plus froide crée des différences de masse volumique, génératrices de mouvement au sein du fluide ; c'est la **convection naturelle**. Rigoureusement, même en convection forcée, les différences de densité créent un écoulement parasite, en général insignifiant par rapport à l'écoulement principal. On parle de **convection mixte** quand les 2 phénomènes ont de l'importance.

I.4. Exemples concrets de problèmes thermiques

Les transferts thermiques ont des applications dans tout le champ des activités industrielles, dès que de l'énergie est mise en jeu, sous quelque forme que ce soit : thermique bien sûr, mais aussi mécanique, électromagnétique ou radiative, nucléaire, électronique ou chimique ... L'objet de la discipline est l'étude et la maîtrise des transferts de toutes ces formes d'énergie, qui se dégradent en grande partie en énergie thermique. Il est fréquent que les transferts thermiques ne soient pas l'objectif de la conception d'un appareillage mais qu'ils interviennent comme contrainte à respecter : éviter des points chauds ou froids, limiter des dilatations, contrôler des transformations...

Citons quelques domaines :

✓ **Transports terrestres et aéronautiques :**

- *Véhicule thermique* - refroidissement des principaux organes du moteur, contrôle thermique de la catalyse (un pot catalytique n'est efficace qu'à partir de 350°C environ), refroidissement des freins, contrôle de température du carburant.
- *Freinage* : le problème consiste à s'assurer que les organes de freinage conservent des températures modérées, faute de quoi les surfaces frottantes perdraient leurs qualités, et les pièces

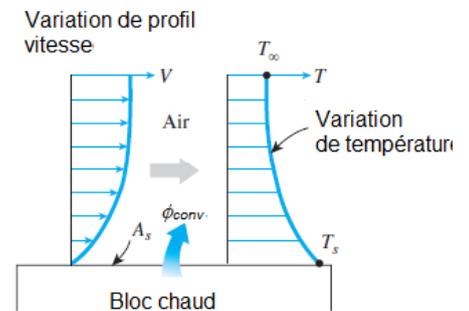


Fig. I.5. transfert thermique par convection.

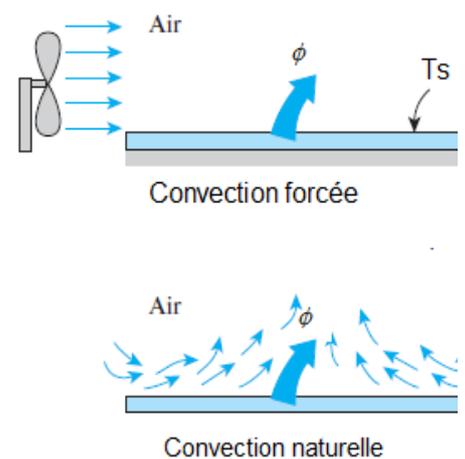


Fig. I.6. Convection forcée et naturelle.

magnétiques, dépassant le "point de Curie", perdraient leurs propriétés d'aimantation.

- *Véhicule électrique* - contrôle thermique du moteur, de l'électronique, de la batterie, intégration des boucles fluides (le chauffage de l'habitacle d'une voiture électrique pose un problème particulier).
- *Thermique de l'habitacle automobile* : vitrages performants (limitant les surchauffes d'été), propriétés radiatives des revêtements de siège, climatisation et confort thermique.
- *Turbo – réacteur* : Les moteurs d'avion ont un rendement d'autant plus élevé que les gaz de combustion entrent chauds dans le corps de la turbine. On pourrait donc imaginer augmenter encore leur température. La limitation provient des contraintes acceptables par les matériaux constituant les aubes. Ceci impose un refroidissement local des aubes réalisé en soufflant un film d'air froid sur leur surface. Le collage de matériaux composites impose des vitesses de montée en température bien contrôlée.

✓ Industries électroniques

La miniaturisation des composants se traduit par un accroissement de la densité de *puissance dissipée dans les puces électroniques*. Il faut donc reconsidérer les technologies de refroidissement à utiliser. Le recours à des matériaux et **dispositifs propres à évacuer la chaleur** (ailettes en particulier) génèrent d'autres problèmes thermiques : conduction thermique lors du *brasage des composants sur les supports*, la température ne devant pas dépasser 320°C.

✓ Chimie et agroalimentaire - maintien en température des réacteurs *Réaction chimique*

Si la réaction est **endothermique** (fours à chaux, fours à ciment), il faut **fournir de la chaleur** aux minerais entrant en réaction. Si N est le nombre de moles transformées par unité de temps, et L la chaleur molaire de réaction, le flux thermique minimal pour maintenir la température constante vaut $N.L$. Si la réaction est **exothermique** (synthèse de l'ammoniac) ou si la température doit être contrôlée (gazéification du charbon), il s'agit au contraire d'**évacuer la chaleur** produite, de telle sorte que la température ne s'élève pas à l'intérieur du réacteur.

✓ Energie

Production d'énergie thermique (brûleurs, foyers, chaudières...). La thermique influence non seulement le rendement de ces appareils mais aussi les *émissions de polluants* (exemple température de flamme et production de NOx). Dans une chaudière, on veut vaporiser un certain débit massique m d'eau à une température donnée T . La puissance à fournir au liquide est par conséquent $F = m \cdot L$. L désignant la chaleur latente (J/kg) de vaporisation à la température T . La conception du générateur de vapeur consiste à produire le débit de vapeur imposé avec l'installation la plus économique possible, en prenant garde toutefois de **limiter en tout point la température à un niveau admissible** par le métal.

La production décentralisée d'énergie électrique par des petites unités conduit à rechercher des **échangeurs de chaleur compacts**. D'autre part, le rendement des turbines à combustion s'améliorant en aspirant de l'air le plus froid possible, on a recours dans les pays chauds à des **stockages de "froid"**. Les quelques exemples précédents illustrent que l'ingénieur doit **concevoir** des surfaces d'échange, **arbitrer** entre consommations d'énergie et coûts d'investissement, prendre en compte les **contraintes thermiques**, **contrôler** des températures et des puissances échangées.

Chapitre II :

TRANSFERT DE CHALEUR PAR **CONDUCTION**

Plan du chapitre :

- II.1. Introduction**
 - II.2. Loi de Fourier**
 - II.3. Conductivité thermique**
 - II.4 Équation générale de la conduction**
 - II.4.2. Expression des flux d'énergie**
 - II.4.3. Équation de la conduction monodimensionnelle**
 - II.5 Conditions aux limites**
 - II.6. Conduction en régime permanent**
 - II.7. Ailettes**
-

Objectifs

- Définir le flux de chaleur par conduction dans les solides ;
- Préciser les propriétés macroscopiques caractéristiques de la conduction ;
- Établir l'équation de diffusion de la chaleur ;
- Définir les conditions aux limites ;
- Modéliser le transfert de chaleur aux interfaces solides ;
- Utiliser la méthode d'analogie électrique pour résoudre des problèmes 1D.

II.1. Introduction

La conduction est une transmission de chaleur **dans la masse d'un milieu matériel**, les zones chaudes cédant de la chaleur à celles qui le sont moins. C'est le cas lorsqu'on chauffe l'extrémité d'une barre.

Au plan corpusculaire, l'interprétation est la suivante : une zone chaude est occupée par des particules à vitesse élevée, par définition même de la température. Le mouvement brownien fait constamment passer des particules d'une zone à l'autre ; mais entre zones à températures inégales, les particules ont des énergies cinétiques différentes ; le brassage a pour effet de transférer de l'énergie cinétique d'agitation, des zones chaudes vers celles qui le sont moins. La manifestation macroscopique en est un transfert de chaleur. C'est donc un **mécanisme de chocs** qui intervient.

II.2. Loi de FOURIER

Considérons un transfert de chaleur élémentaire δQ entre deux plans indéfinis portés aux températures T et $T+dT$. Ces deux plans délimitent une portion de solide et sont supposés perpendiculaires à un axe Ox . La loi de Fourier exprime naturellement que la chaleur échangée est proportionnelle à : la surface d'échange, la différence de température entre les 2 parois, le temps écoulé et inversement proportionnel à la distance entre plans.

Soit :
$$dQ = -\lambda A \frac{dT}{dx} dt \quad \dots \quad \text{(II.1)} \quad \text{loi de}$$

Fourier.

- A est la surface d'échange (perpendiculaire à l'axe Ox)
- dT est l'écart de température entre les 2 plans séparés de dx
- dt désigne le temps que dure l'expérience.
- λ est le coefficient de proportionnalité appelé **conductivité thermique** ou conductance spécifique.

Le signe (-) correspond à une convention qui impose une quantité de chaleur échangée positive ($dQ > 0$) dans le sens des températures décroissantes et des x croissants. Il est à noter que cette convention est en fait opposée à celle choisie généralement en thermodynamique classique où l'on impose toujours que toute énergie perdue par le système est comptée négativement.

Il est en fait plus commode d'utiliser le **flux thermique** que l'on peut définir : $\phi = \frac{dQ}{dt}$, ϕ est homogène à une puissance et s'exprime en Watts (**W**).

On a donc :

$$\phi = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad \dots \quad \text{(II.2)}$$

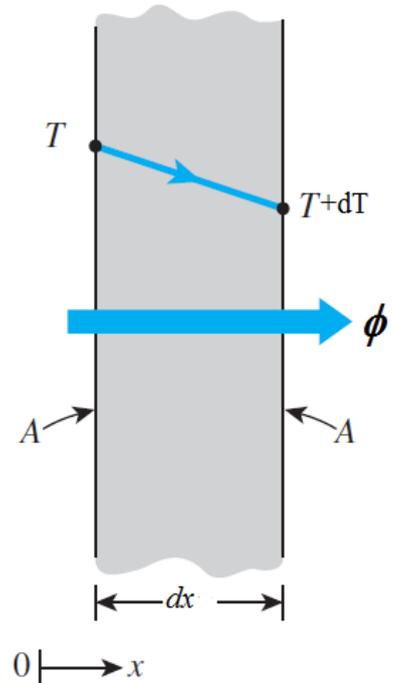


Fig.II.1. Conduction à travers un mur simple

On utilise aussi couramment **la densité de flux** qui correspond au flux échangé rapporté à l'unité de surface. Soit : $\varphi = \frac{\phi}{S}$; φ s'exprime en (**W/m²**), et ainsi, dans un problème unidimensionnel,

Dans le problème simplifié ci-dessus on a implicitement considéré un mécanisme de conduction unidimensionnel perpendiculaire à l'axe des x . Dans un cas général de mécanisme tridimensionnel on exprimera une densité de flux de chaleur selon chacune des directions principales d'un repère orthonormé ($O x,y,z$).

Soit suivant Ox : $\varphi_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y,z}$

Suivant Oy : $\varphi_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{x,z}$

Suivant Oz : $\varphi_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{y,x}$

Ou encore : $\vec{\varphi} = -\lambda \vec{grad}(T) \dots (II.4)$

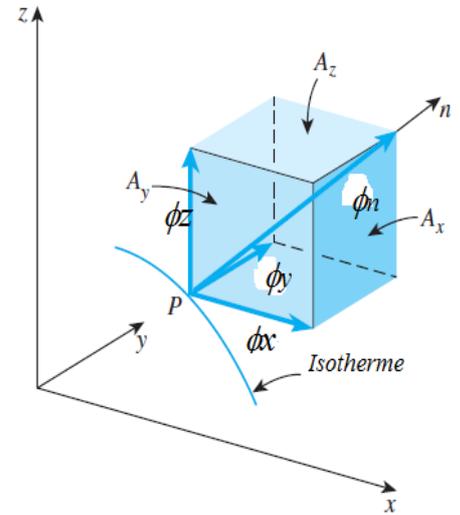


Fig. II.2. Isotherme et gradient thermique.

II.3. Conductivité thermique

La conductivité thermique λ (souvent notée k dans les pays anglo-saxons) exprime, de par sa définition, l'aptitude d'un matériau à conduire la chaleur. On peut définir la conductivité thermique comme le flux de chaleur qui traverse une surface unité pour un matériau soumis à un gradient de température égal à l'unité. La conductivité thermique s'exprime en **W.m⁻¹.K⁻¹**.

Dans le modèle de l'équation (II.4), la conductivité thermique est supposée être un scalaire constant. C'est le cas des solides homogènes et isotropes. Cependant, il existe de nombreux cas où la conductivité thermique dépend des propriétés d'orientation du solide (cristal, matériau déposé en couches minces, matériau fibreux etc....). La conductivité thermique devient alors un tenseur et la loi de Fourier généralisée s'exprime par :

$\vec{\varphi} = -[\lambda] \vec{grad}(T) \dots (II.5)$

Où $[\lambda] = \begin{vmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{vmatrix}$ désigne le tenseur des conductivités thermiques.

Dans la plupart des cas, le tenseur peut être diagonalisé sous la forme

$[A] = \begin{vmatrix} \lambda_u & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_v & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_w \end{vmatrix}$ où les grandeurs $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$ désignent les conductivités

principales du milieu selon les directions Ou, Ov, Ow .

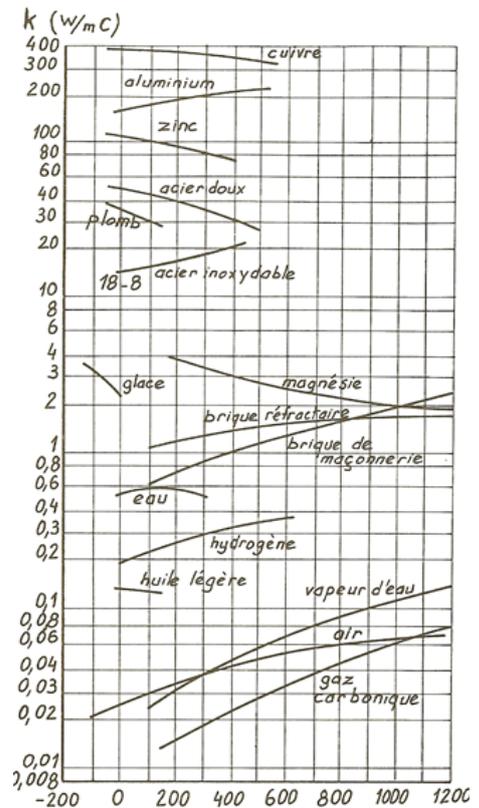


Fig. II.3. Conductivité thermique.

La conductivité thermique dépend de :

- La nature physico-chimique du matériau
- La nature de la phase considérée (solide, liquide, gaz)
- La température
- L'orientation dans les matériaux anisotropes

Ordre de grandeur à température ambiante (20°C)

La conductivité thermique dépend de la température lorsque l'on considère des plages étendues de température. Dans ce cas on pourra cependant souvent considérer une variation linéaire avec T, sous la forme : $\lambda = \lambda_0 (1 + b(T - T_0))$, λ_0 désigne la conductivité à $T = T_0$ et b est une constante expérimentale. La dépendance en température de différents matériaux est illustrée dans la figure II.3.

Dans la suite de ce cours on considérera systématiquement la conductivité thermique λ comme un scalaire constant ce qui revient à se placer dans le **cas de matériaux homogènes et isotropes**. Cette simplification n'est cependant pas abusive car il est souvent difficile de procéder différemment et même dans le cas de matériaux typiquement inhomogènes (béton par exemple) on considère une conductivité moyenne appelée conductivité effective.

Tab I.1. Conductivités thermique de quelques matériaux

Type de matériaux	Conductivité thermique (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
Gaz à la pression atmosphérique	0.006-0.18
Matériaux isolants	0.025-0.25
Liquides non métalliques	0.1-1.0
Solides non métalliques	0.025-3
Liquides métalliques	8.5-85
Alliages métalliques	10-150
Métaux purs	20-400

II.4 Equation générale de la conduction

II.4.1. Bilan d'énergie

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :

- ϕ_{st} flux de chaleur stocké
- ϕ_g flux de chaleur généré
- ϕ_e flux de chaleur entrant
- ϕ_s flux de chaleur sortant

II.4.2. Expression des flux d'énergie

Il faut ensuite établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, on obtient l'équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

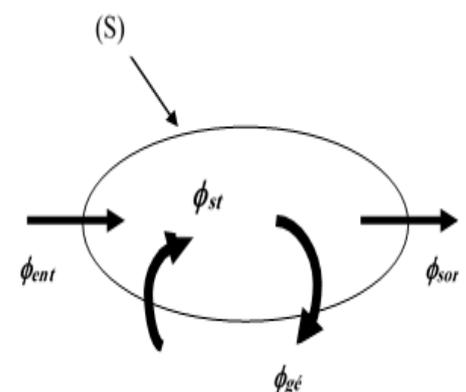


Fig.II.4. Système et bilan énergétique

- **Flux de chaleur lié à un débit massique**

Lorsqu'un débit massique \dot{m} de matière entre dans le système à la température T_1 et en ressort à la température T_2 , on doit considérer dans le bilan, un flux de chaleur entrant correspondant

$$\dot{\phi} = \dot{m} c_p (T_1 - T_2) \dots \dots \dots \text{(II.7)}$$

Avec : $\dot{\phi}$ Flux de chaleur entrant dans le système (W)
 \dot{m} Débit massique (kg.s⁻¹)
 c_p Chaleur spécifique (J.kg⁻¹.K⁻¹)
 T_1, T_2 Températures d'entrée et de sortie (K)

• **Génération d'énergie**

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme :

$$\phi_g = \dot{q} V \dots \dots \text{(II.8)}$$

avec : ϕ_g : Flux d'énergie thermique générée (W),
 \dot{q} : Densité volumique d'énergie générée (W m⁻³),
 V : Volume (m³).

• **Stockage d'énergie**

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante et en l'absence de changement d'état) :

$$\phi_{st} = \rho \cdot c_p V \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \text{(II.9)}$$

Avec : ρ : masse volumique (kg.m⁻³),
 V : volume (m³),
 c_p : chaleur spécifique (J.kg⁻¹.K⁻¹),
 T : température (K),
 t : temps (s).

• **Flux convectif**

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :

$$\phi_{cv} = h \cdot A \cdot (T_s - T_\infty) \dots \dots \text{(II.10)}$$

Avec h : Coefficient de transfert de chaleur par convection (W.m⁻².K⁻¹),
 A : Aire de la surface d'échange solide/fluide (m²),
 $(T_s - T_\infty)$: différence de température (K).

• **Rayonnement**

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :

$$\phi_{Rd} = \sigma \epsilon_p A (T_p^4 - T_\infty^4) \dots \dots \text{(II.11)}$$

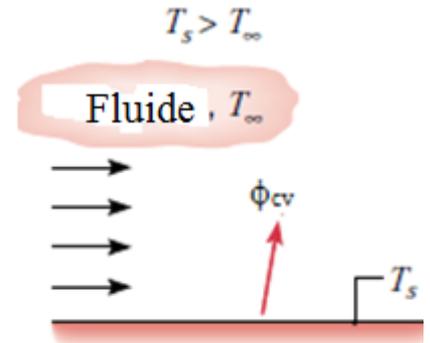


Fig.II.5. Schéma du transfert de chaleur convectif.

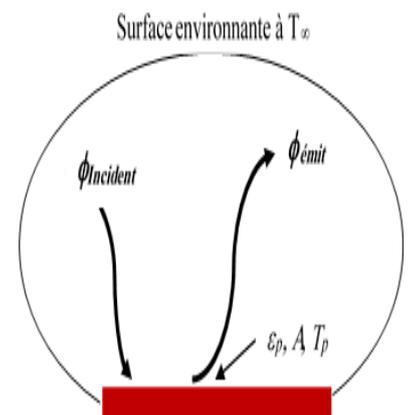


Fig.II.6. Schéma du transfert de chaleur radiatif entre une plaque et l'air environnant.

Avec σ : Constante de Stefan ($5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$)

ϵ_p : Facteur d'émission de la surface

T_p : Température de la surface (K)

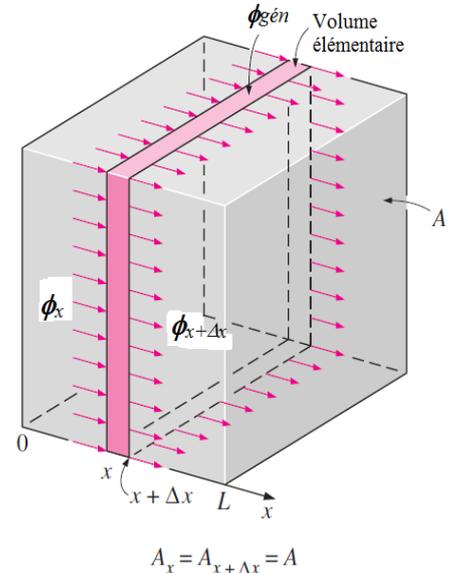
T_∞ : Température du milieu environnant la surface (K)

A : Aire de la surface (m^2).

II.4.3. Équation de la conduction monodimensionnelle

II.4.3.1. Cas d'un mur simple

Considérons un élément d'épaisseur Δx dans un large mur plan, comme le montre la figure II.7. Supposons que la densité du mur est ρ , la chaleur spécifique est c_p , et la surface de la paroi perpendiculaire à la direction du transfert de chaleur est A . Un équilibre énergétique sur cet élément pendant un petit intervalle de temps dt peut être exprimé comme :



$$A_x = A_{x+\Delta x} = A$$

Fig.II.7. Conduction unidirectionnelle à travers un mur simple.

À partir d'un bilan thermique :

$$\left[\begin{array}{l} \text{flux thermique entrant} \\ \text{par conduction } \phi_x \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{flux thermique généré} \\ \text{à l'interieur } \phi_g \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{flux thermique sortant} \\ \text{par conduction } \phi_{x+\Delta x} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{flux thermique stocké} \\ \text{pendant } dt \phi_{st} \end{array} \right]$$

D'après les expressions des flux, nous avons :

$$\phi_x - \phi_{x+\Delta x} + \dot{q}A\Delta x = \rho c_p A \Delta x \frac{\partial T}{\partial t} \dots \text{(II.12)}$$

Divisant par $A\Delta x$:

$$-\frac{1}{A} \frac{\phi_{x+\Delta x} - \phi_x}{\Delta x} + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \dots \text{(II.13)}$$

Nous avons : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi_{x+\Delta x} - \phi_x}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi_x)$, en plus d'après la loi de Fourier,

$\phi_x = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \dots \text{(II.14)}$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- Si le milieu est isotrope et homogène : λ est constante dans toutes les directions.
- S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$.
- Si le milieu est hétérogène, λ n'est fonction que de T .

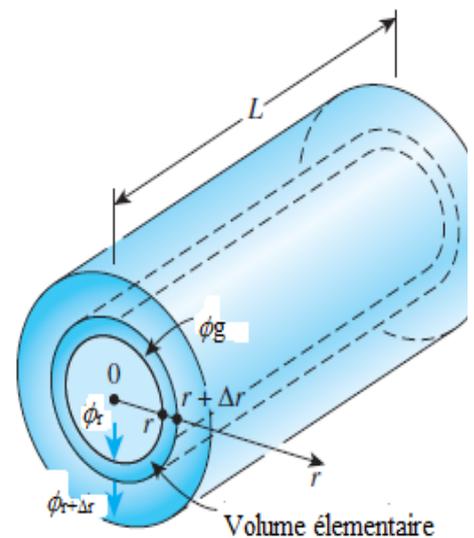


Fig.II.8. Conduction unidirectionnelle à travers un cylindre long.

Si la conductivité thermique est constante l'équation (II.14) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \dots (II.15)$$

Avec α est la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$), qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

II.4.3.2. Cas d'un cylindre long

Considérons maintenant un élément cylindrique d'épaisseur Δr dans un long cylindre, comme indiqué sur la figure II.8. Á partir d'un même bilan d'énergie, nous avons :

$$\phi_r - \phi_{r+\Delta r} + \dot{q}A\Delta r = \rho c_p A\Delta r \frac{\partial T}{\partial t} \dots (II.16)$$

Avec A : l'aire de la surface d'échange $A = 2\pi rL$.

Divisant l'éq (II.16) par $A\Delta r$: $-\frac{1}{A} \frac{\phi_{r+\Delta r} - \phi_r}{\Delta r} + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$, nous avons

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\phi_{r+\Delta r} - \phi_r}{\Delta r} = \frac{\partial}{\partial r}(\phi_r), \text{ et d'après la relation de Fourier : } \phi_r = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial r},$$

nous obtenons :

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \dots (II.17)$$

II.4.3.3. Cas d'une sphère

Soit une sphère de densité ρ , de chaleur spécifique c_p , et de rayon R . l'aire de la surface sphérique $A = 4\pi r^2$. Nous considérons un élément sphérique d'épaisseur Δr , figure II.9. Nous pouvons prendre même approche utilisée en section II.4.3.2. L'équation de la chaleur dans ce cas est écrite comme suit :

$$\frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \dots (II.18)$$

Dans le cas où la chaleur se déplace dans toutes les directions au sien d'un milieu solide. L'équation de la conduction peut prendre la forme suivante :

- En coordonnées cartésiennes :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \dots (II.19)$$

- En coordonnées cylindrique :

$$x = r \cos\phi, y = r \sin\phi, z = z$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \dots (II.20)$$

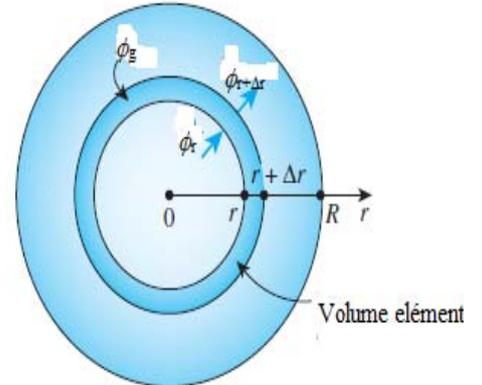


Fig.II.9. Conduction unidirectionnelle à travers une sphère.

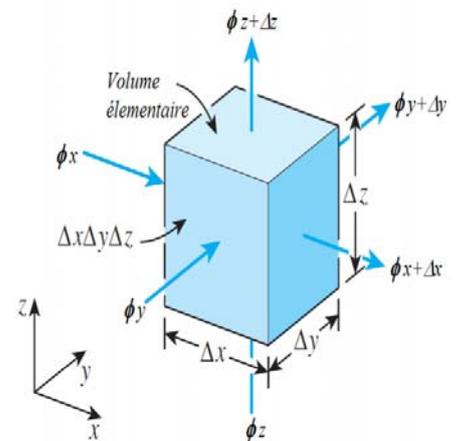


Fig.II.10. Conduction tri directionnelle à travers un élément rectangulaire.

- En coordonnées sphériques :

$$x = r \cos\phi \sin\theta, y = r \sin\phi \sin\theta, z = r \cos\theta$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

.... (II.21)

II.5 Conditions aux limites

L'équation générale de la conduction est une équation aux dérivées partielles, linéaire de deuxième ordre. Elle admet une infinité de solutions et ne peut avoir de sens physique que pour des conditions définies représentant les causes qui déterminent l'évolution du phénomène : ce sont les conditions aux limites.

Nous citons dans le tableau suivant, les conditions les plus utilisées

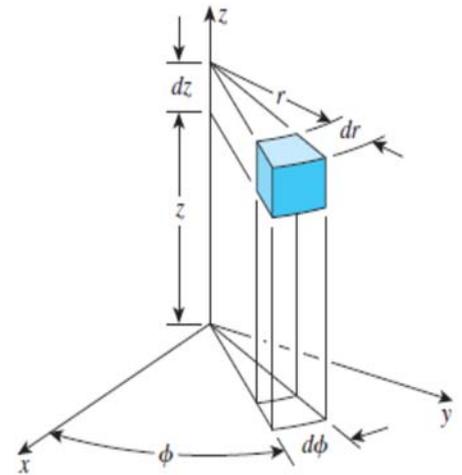


Fig.II.11. Coordonnées cylindriques.

<ul style="list-style-type: none"> • Température imposées : $T(0,t) = T_1$ $T(L,t) = T_2$ 	
<ul style="list-style-type: none"> • Flux thermique surfacique imposé $\varphi_0 = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right _{x=0}$ $\varphi_L = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right _{x=L}$ 	
<ul style="list-style-type: none"> • Flux convectif (condition de Newton) $-\lambda \left. \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} \right _{x=0} = h_1(T_{\infty 1} - T(0,t))$ $-\lambda \left. \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} \right _{x=L} = h_2(T(L,t) - T_{\infty 2})$ 	

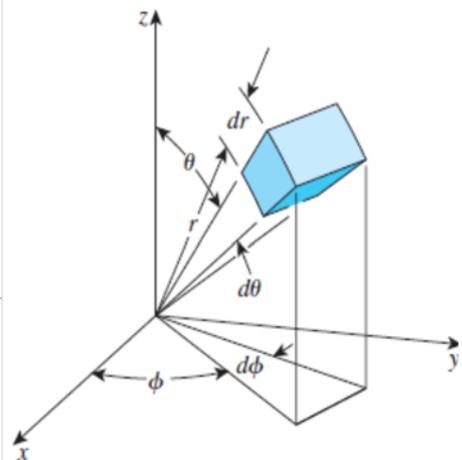
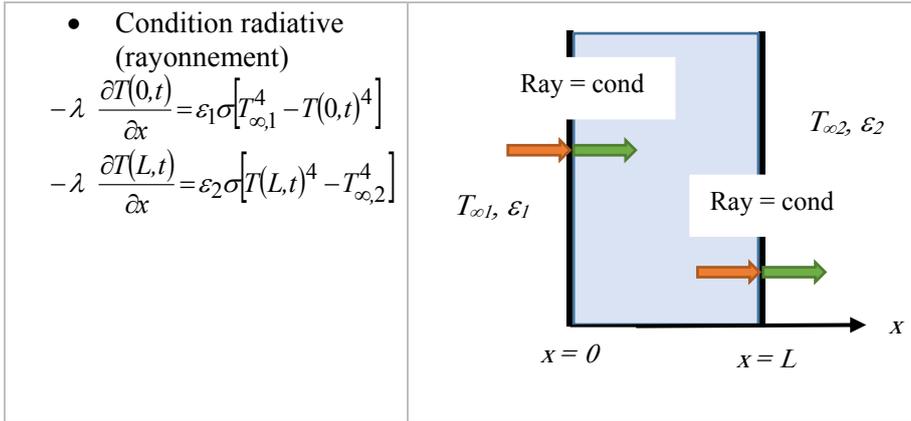


Fig.II.12. Coordonnées sphériques.



II.6. Conduction stationnaire (notion de résistance thermique)

II.6.1. Résistance thermique conductive pour une géométrie plane

On dit que le régime est permanent si, en tout point, la température est indépendante du temps. C'est la limite vers laquelle tend toute distribution de température lorsque les conditions extérieures sont elles mêmes indépendantes du temps. En théorie, l'établissement du régime permanent exige un délai infini. Dans la pratique, compte tenu de l'imperfection des moyens de mesure, les écarts avec le régime permanent cessent d'être observables après un certain délai, très variable suivant les cas.

Dans ce qui suit, nous supposons que le milieu est isotrope $\lambda =$ constante. Nous considérons un transfert thermique en régime permanent à travers un mur simple sans source de chaleur ($q = 0$). Dans ce cas le flux thermique reste constant à travers le mur. D'après la loi de Fourier :

$$\phi = -\lambda A \frac{dT}{dx}. \text{ Ainsi } dT/dx = Cte, \text{ ce qui signifie que la température à}$$

travers le mur varie linéairement avec x . Autrement dit, la distribution de la température dans le mur dans des conditions stables est une ligne droite fig II.13.

Séparer les variables de l'équation précédente et intégrer de $x = 0$, où $T(0) = T_1$, à $x = L$, où $T(L) = T_2$, nous obtenons :

$$\int_{x=0}^L \phi_{cond, mur} dx = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda A dT, \text{ effectuons les intégrations nous trouvons}$$

$$\phi_{cond} = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{L} \dots (II.22)$$

Donc comme résultat : le flux thermique conductif à travers une paroi plane est proportionnelle à la conductivité thermique moyenne, à la surface de la paroi et à la différence de température, mais est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la paroi. L'équation (II.22) peut être réarrangée comme :

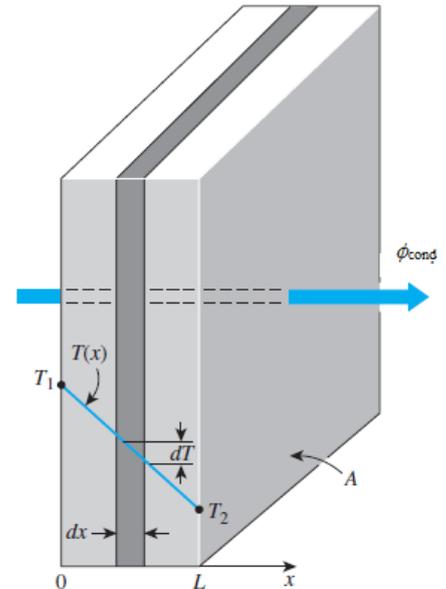


Fig. II.13. Répartition de la température dans une paroi plane.

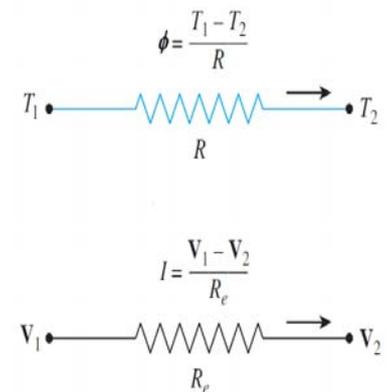


Fig.II.14. Analogie entre les concepts de résistance thermique et électrique.

$$\phi_{cond} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} \text{ où } R_{th} = \frac{L}{\lambda A}$$

R_{th} est la **résistance thermique conductive** de la paroi contre la conduction thermique ou simplement la résistance de conduction de la paroi. Notons que la résistance thermique d'un milieu dépend de **la géométrie et des propriétés thermiques du milieu**. La résistance thermique est habituellement exprimée en K/W (Kelvin par Watt). Elle informe sur la capacité de l'isolant thermique à résister au froid et à la chaleur : plus la résistance thermique est élevée, plus l'isolant est efficace. Cette équation est analogue à la relation pour le courant électrique **I** (loi d'Ohm), exprimée par :

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_e} \dots (II.23)$$

Où R_e est la résistance électrique, $(V_1 - V_2)$ est la différence de potentiel à travers la résistance. Ainsi, le flux thermique à travers le mur correspond au courant électrique, la résistance thermique correspond à la résistance électrique et la différence de température correspond à la différence de potentiel (fig. II.14).

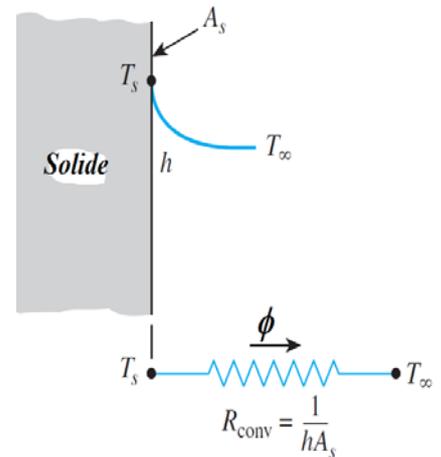


Fig. II.15. Schéma de résistance convective.

II.6.1.2. Résistance thermique convective

Considérons un transfert de chaleur par convection d'une surface solide, de l'aire A et de la température T_s vers un fluide dont la température est suffisamment éloignée de la surface T_∞ , avec un coefficient de transfert de chaleur par convection h . La loi de Newton de refroidissement (Eq (II.10) peut être réarrangé comme $\phi_{conv} = \frac{T_s - T_\infty}{R_{th,conv}}$

, où $R_{th,conv} = \frac{1}{h.A}$ est la **résistance thermique par convection** (Fig.

II.15). Notons que lorsque le coefficient de transfert de chaleur par convection est très grand, la résistance de convection devient nulle et $T_s \approx T_\infty$. C'est-à-dire que la surface n'offre aucune résistance à la convection et ne ralentit donc pas le processus de transfert de chaleur.

II.6.1.3. Assemblage des résistances thermiques

- **Mur multicouche (assemblage en série)**

C'est le cas des murs réels (schématisé sur la fig. II.16) constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$ des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale A . En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$\phi = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{1/h_1 A} = \frac{T_1 - T_2}{L_1/\lambda_1 A} = \frac{T_2 - T_3}{L_2/\lambda_2 A} = \frac{T_3 - T_{\infty 2}}{1/h_2 A} \dots (II.24)$$

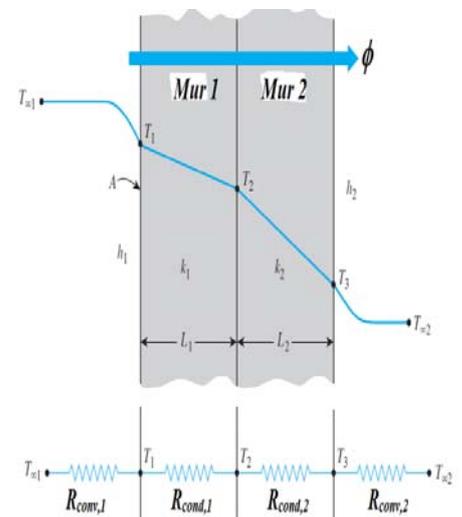


Fig. II.16. Schématisation des flux et des températures dans un mur multicouche.

On a considéré que les contacts entre les couches de différentes natures étaient parfaits et qu'il n'existait pas de discontinuité de température aux interfaces. La formule précédente s'écrit alors :

$$\phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{1/h_1 A + L_1/\lambda_1 A + L_2/\lambda_2 A + 1/h_2 A} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{con,1} + R_{cond,1} + R_{cond,2} + R_{con,2}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{tot}}$$

• **Mur composite (assemblage en parallèle)**

C'est le cas le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas homogènes. Considérons à titre d'exemple un mur de largeur L constitué d'agglomérés creux (fig. II.17). Notant que le transfert de chaleur total est la somme des transferts de chaleur à travers chaque couche, nous avons :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_2} = (T_1 - T_2) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \dots (II.25)$$

Utilisant l'analogie électrique, nous avons : $\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{tot}}$ où

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

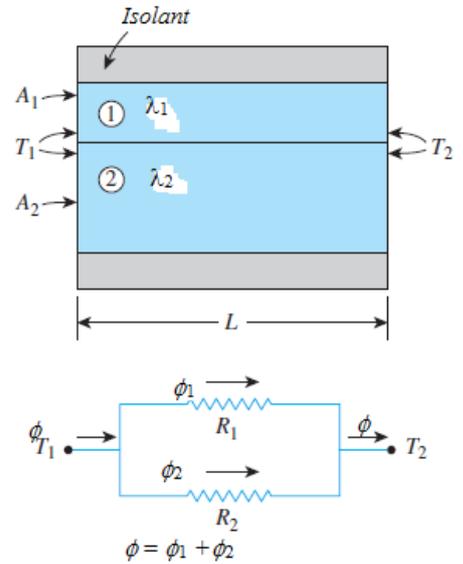


Fig. II.17. Assemblage en parallèle de deux couches.

II.6.2. Résistance thermique (géométrie cylindrique et sphérique)

• **Cas d'un cylindre creux**

Considérons un cylindre creux (tube) de conductivité thermique l, de rayon intérieur r1, de rayon extérieur r2, de longueur L, les températures des faces internes et externes étant respectivement T1 et T2 (figure II.18). On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

Nous appliquons la loi de Fourier, le flux thermique peut s'écrire comme suit :

$$\phi_{cond,cyl} = -\lambda A \frac{dT}{dr}, \text{ avec } A = 2\pi r L. \text{ Séparons les variables de l'équation ci-dessus et intégrons entre } r_1 \text{ et } r_2. \text{ Nous obtenons :}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\phi_{cond,cyl}}{A} dr = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda dT, \text{ ce qui implique :}$$

$$\phi_{cond,cyl} = 2\pi L \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \dots (II.26)$$

Puisque $\phi = \text{constante}$. Cette équation peut être réarrangée comme :

$$\phi_{cond,cyl} = \frac{T_1 - T_2}{R_{cyl}}, \text{ où } R_{cyl} \text{ est la résistance thermique pour une couche cylindrique}$$

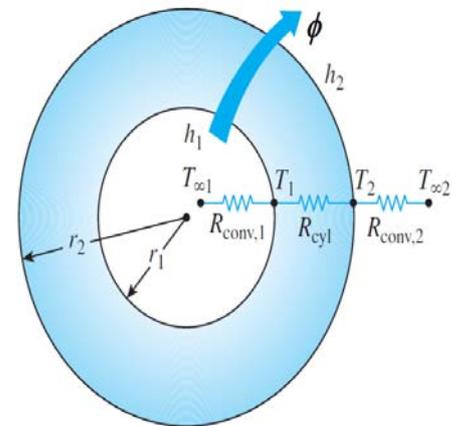


Fig. II.18. Résistance thermique cylindrique ou sphérique.

$$R_{cyl} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda} = \frac{\ln(\text{Rayon extérieur} / \text{Rayon intérieur})}{2\pi \times \text{longueur} \times \text{conductivité thermique}} \dots (II.27)$$

• **Cas d'une sphère**

Nous pouvons répéter l'analyse pour une couche sphérique en prenant $A = 4\pi r^2$ et nous effectuons les intégrations dans Eq.II.26. Le résultat peut être exprimé comme :

$$\phi_{cond, sph} = \frac{T_1 - T_2}{R_{sph}}$$

où

$$R_{sph} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 \lambda} = \frac{\text{rayon ext} - \text{rayon int}}{4\pi \times \text{conductivité thermique} \times \text{rayon int} \times \text{rayon ext}} \dots (II.28)$$

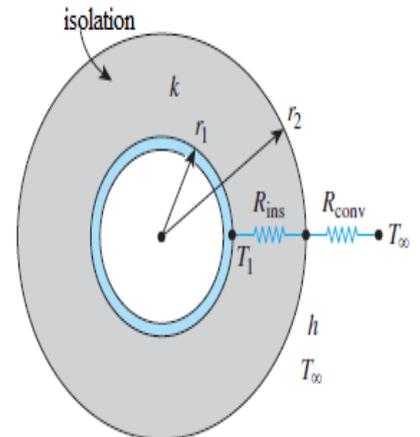


Fig. II.19. Isolation d'un tube cylindrique.

II.6.3. Rayon critique pour l'isolation

On pourrait penser qu'il suffit de recouvrir une surface par une couche d'un matériau peu conducteur pour réduire les pertes thermiques, et que plus l'épaisseur de revêtement est importante, plus les pertes sont faibles. Ceci est exact pour des surfaces planes, mais ne l'est pas toujours pour des surfaces courbes.

Considérons un tube cylindrique de rayon extérieur r_1 dont la température de surface externe T_1 est maintenue constante (Fig. II.19). Nous voulons isoler le tube maintenant avec un matériau dont la conductivité thermique est λ et le rayon extérieur est r_2 . Le flux thermique transféré à l'air ambiant peut être exprimé comme suit :

$$\phi = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda} + \frac{1}{h(2\pi r_2 L)}} \dots (II.29)$$

La variation de ϕ avec le rayon extérieur de l'isolation r_2 est représentée sur la figure II.20. La valeur de r_2 à laquelle ϕ atteint un maximum est déterminée à partir de l'exigence que $d\phi / dr_2 = 0$ (pente nulle). En fonction de rayon r_2 , **le rayon critique** pour un corps cylindrique est exprimé par :

$$r_{cr, cylindre} = \frac{\lambda}{h} \dots (II.30)$$

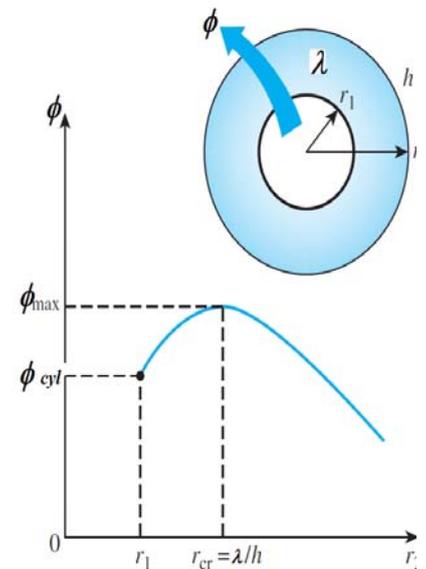


Fig. II.20. Variation de flux thermique en fonction de r_2 .

Notons que le rayon critique d'isolation dépend de la conductivité thermique de l'isolation λ et du coefficient de transfert thermique par convection externe h . Le flux thermique sortant du cylindre augmente avec l'addition de l'isolation pour $r_2 < r_{cr}$, atteint un maximum lorsque $r_2 = r_{cr}$, et commence à diminuer pour $r_2 > r_{cr}$. Ainsi, isolation du tube peut en fait augmenter le flux de chaleur du tuyau au lieu de le diminuer lorsque $r_2 < r_{cr}$.

II.7. Ailettes

II.7.1. Définition

Ailette est un dispositif thermique ayant pour but d'amplifier les échanges de chaleur entre un élément plan et un fluide extérieur. les ailettes sont utilisées, en particulier dans les échangeurs industriel, les radiateurs de véhicules, de chauffage central et pour le refroidissement des montages électroniques.

II.7.2. l'équation de l'ailette

Nous considérons un volume élémentaire d'une ailette (entre x , $x+\Delta x$), de surface A_c , et d'un périmètre p , (fig. II.21), sous les conditions stationnaires, le bilan d'énergie sur ce volume peut s'exprimer comme :

$$\left[\begin{array}{l} \text{flux thermique entrant} \\ \text{par conduction } \phi_x \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{flux thermique sortant} \\ \text{par conduction } \phi_{x+\Delta x} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{flux thermique sortant} \\ \text{par convection } \phi_{conv} \end{array} \right] \dots \text{(II.31)}$$

Ou : $\phi_{conv} = h(p\Delta x)(T - T_\infty)$

Substituant et divisant par Δx , nous obtenons :

$$\frac{\phi_{cond, x+\Delta x} - \phi_{cond, x}}{\Delta x} + hp(T - T_\infty) = 0 \dots \text{(II.32)}$$

Prenons la limite comme Δx tend vers 0 :

$$\frac{d\phi_{cond}}{dx} + hp(T - T_\infty) = 0 \dots \text{(II.33)}$$

D'après la loi de Fourier, nous trouvons l'équation suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda A_c \frac{dT}{dx} \right) - hp(T - T_\infty) = 0 \dots \text{(II.34)}$$

L'équation (II.34) est l'équation différentielle qui gouverne le transfert thermique dans une ailette.

En général, la surface d'échange A_c et le périmètre changent en fonction de x , ce qui devient une équation difficilement à résoudre.

Dans le cas où A_c , p et la conductivité thermique sont des constantes, l'équation précédente devient :

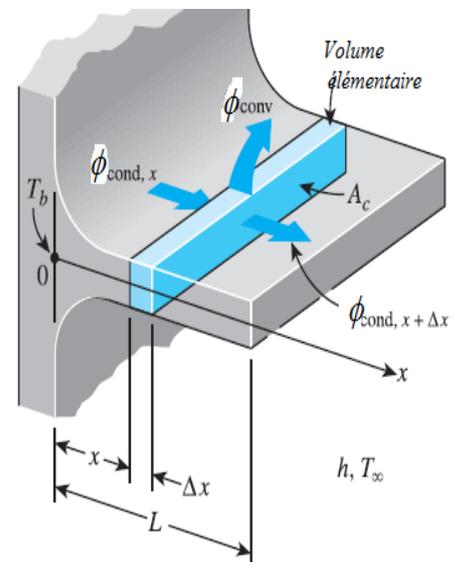


Fig. II.21. Volume élémentaire dans une ailette.

$$\frac{d^2T}{dx^2} - hp \frac{hp}{\lambda A_c} (T - T_\infty) = 0 \text{ où bien } \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \dots \text{(II.35)}$$

Ou

$$m^2 = \frac{hp}{\lambda A_c} \text{ et } \theta = T - T_\infty \text{ est l'excès de température.}$$

L'équation (II.35) est une équation différentielle du deuxième ordre à coefficient constantes dont la solution générale est de forme :

$$\theta(x) = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

ou bien

$$\theta(x) = c_1 \cosh(mx) + c_2 \sinh(mx) \dots \text{(II.36)}$$

Le champ de température dans l'ailette s'obtient donc en résolvant l'équation précédente, avec les conditions aux limites appropriées en $x = 0$ et $x = L$. en général, on peut supposer connue la température à la base de l'ailette, à la limite, il existe plusieurs cas peuvent être envisagé :

- A la base $T = T_b \Rightarrow \theta_b = T_b - T_\infty$
- Au bout de l'ailette :
 1. Ailette infiniment longue $\theta(L) = 0$
 2. Ailette isolée ou symétrique $\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$
 3. Température prescrite $\theta(L) = \theta_L$
 4. Convection $-\lambda \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = h\theta(L)$

➤ **1^{ere} cas : ailette infiniment longue**

La solution est de forme suivante :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = e^{-mx} = e^{-x\sqrt{hp/\lambda A_c}} \dots \text{(II.37)}$$

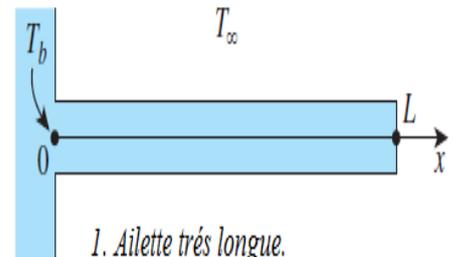
Notons que la température le long de l'ailette diminue dans ce cas exponentiellement de T_b à T_∞ , comme le montre la figure 3-38. Le flux thermique à travers l'ailette peut être déterminé à partir de la loi de Fourier :

$$\phi_{ailette, long} = -\lambda A_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \sqrt{hp \lambda A_c} (T_b - T_\infty) \dots \text{(II.38)}$$

➤ **2^{eme} cas : ailette isolée** :

La solution de l'équation de l'ailette est comme suit :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(mL)} \dots \text{(II.39)}$$



1. Ailette très longue.
2. Ailette isolée.
3. Température imposée.
4. Convection.

Fig. II.22. Conditions aux limites

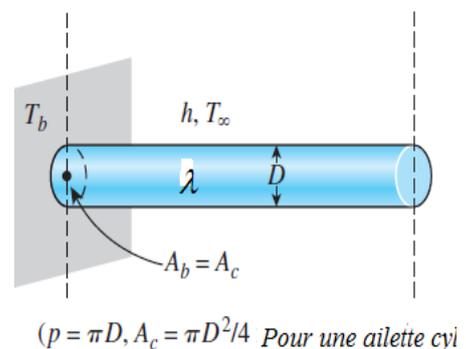
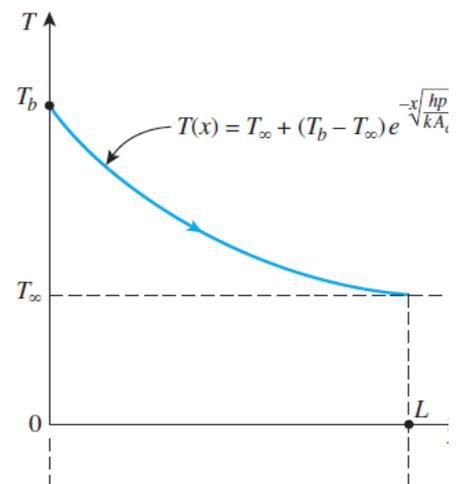


Fig. II.23. Variation de température dans une barre très longue

Et le flux thermique peut s'exprimer comme suit :

$$\phi_{\text{aillette, isolée}} = -\lambda A_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \sqrt{hp \lambda A_c} (T_b - T_\infty) \tanh(mL) \dots (II.40)$$

➤ 3^{ème} cas : température imposée

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{[(T_L - T_\infty)/(T_b - T_\infty)] \sinh(mx) + \sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)} \dots (II.41)$$

$$\phi_{\text{aillette, temp, imposée}} = -\lambda A_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \sqrt{hp \lambda A_c} (T_b - T_\infty) \frac{\cosh(mL) - [(T_L - T_\infty)/(T_b - T_\infty)]}{\sinh(mL)} \dots (II.42)$$

➤ 4^{ème} cas : convection :

La distribution de la température pour ce cas est exprimée comme suit :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh(m(L-x)) + (h/m\lambda) \sinh(m(L-x))}{\cosh(mL) + (h/m\lambda) \sinh(mL)} \dots (II.43)$$

Et le flux thermique est donné par l'expression :

$$\phi_{\text{aillette, conv}} = -\lambda A_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \sqrt{hp \lambda A_c} (T_b - T_\infty) \frac{\sinh(mL) + (h/m\lambda) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/m\lambda) \sinh(mL)} \dots (II.44)$$

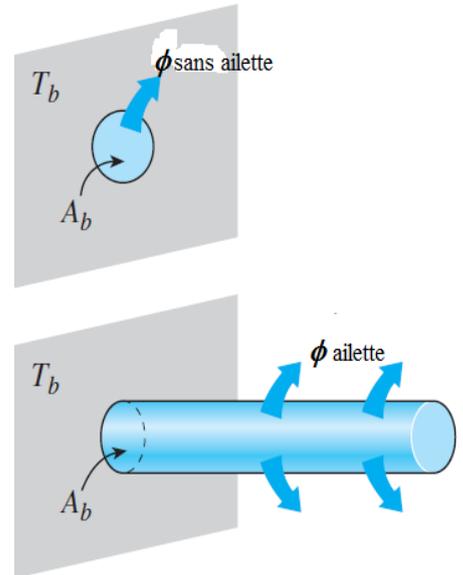


Fig. II.24. Efficacité d'une ailette.

II.7.3. Efficacité d'une ailette

Pour une ailette on définit *l'efficacité*, $\epsilon_{\text{aillette}}$, (effectiveness en anglais) comme le rapport entre l'énergie réellement évacuée par l'aillette et l'énergie qui serait évacuée s'il n'y avait pas d'aillette. L'installation d'une ailette est intéressante si l'efficacité est au moins supérieure à 2.

$$\epsilon_{\text{aillette}} = \frac{\phi_{\text{reel}}}{\phi_{\text{sans, ailette}}} = \frac{\phi_{\text{reel}}}{h A_b (T_b - T_\infty)} \dots (II.45)$$

Si $\epsilon = 1$, ailette n'affecte pas sur l'échange thermique.

Si $\epsilon < 1$ ailette utilisée comme isolant (ralentissant l'échange).

Si $\epsilon > 1$ ailette améliore l'échange de la surface comme elle la devrait.

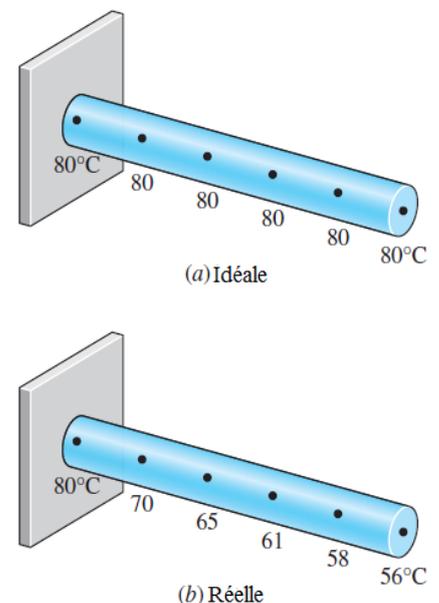


Fig.II.25. ailette idéale et réelle.

II.7.4. Rendement d'une ailette

Le rendement, η d'une ailette (en anglais, efficiency) se définit comme le rapport entre l'énergie réellement évacuée par l'ailette et l'énergie qui serait évacuée si l'ailette était faite d'un matériau infiniment conducteur (la température serait T_b partout dans l'ailette) ou (ailette idéale).

$$\eta_{ailette} = \frac{\phi_{reel}}{\phi_{ailette, idéale}} = \frac{\phi_{reel}}{hA_{ailette} (T_b - T_\infty)} \dots (II.46)$$

Remarque :

Il existe une relation entre le rendement et l'efficacité :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ailette} &= \frac{\phi_{reel}}{\phi_{sans, ailette}} = \frac{\phi_{reel}}{hA_b (T_b - T_\infty)} = \dots (II.47) \\ \frac{\eta_{ailette} hA_{ailette} (T_b - T_\infty)}{hA_b (T_b - T_\infty)} &= \frac{A_{ailette}}{A_b} \eta_{ailette} \end{aligned}$$

Chapitre III :

TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

Plan du chapitre :

III.1. Introduction

III.2. Modélisation du transfert de chaleur par convection

III.3. Classification des écoulements de fluide

III.4. Couches limites (dynamique et thermique)

III.5. Nombres sans dimensions (analyse dimensionnelle)

III.6. Quelques formules empiriques pour le calcul de h

III.6.1. Convection forcée externe

III.6.2. Convection forcée interne

III.6.3. Convection naturelle

Objectifs :

- Comprendre le mécanisme physique de la convection, et sa classification ;
- Visualiser le développement de couches limites dynamique et thermique lors des écoulements sur les surfaces ;
- Acquérir une connaissance pratique des nombres sans dimension de Reynolds, Prandtl, Péclet Grashof et Nusselt... ;
- Déterminer le coefficient d'échange par convection à partir de corrélations expérimentales.

III.1 Introduction

Jusqu'à maintenant nous avons considéré les échanges convectifs seulement comme une condition aux limites pour traiter les problèmes de conduction de la chaleur. Le terme « convection » est utilisé pour décrire le transfert d'énergie entre une surface solide et un fluide en mouvement par rapport à cette surface. Pour ce transfert, le transport d'énergie par conduction a toujours lieu, néanmoins le mode dominant est celui dû aux **mouvements de particules fluides**.

L'objectif de cette partie du cours est double. Le premier est de présenter le mécanisme physique à la base duquel repose le transfert par convection, le second est d'apporter une méthodologie pour traiter des problèmes de convection rencontrés en pratique.

Parmi les problèmes de convection on distingue :

- la convection naturelle,
- la convection forcée,

La distinction se faisant sur l'origine du mouvement permettant le transfert d'énergie d'une région de l'espace à une autre. Lorsque ce mouvement est dû à l'action simultanée des différences de température qui existent dans le milieu et d'un champ de forces massiques, on dit qu'il y a convection libre. Par exemple, au contact d'un radiateur, la température de l'air croît et sa masse volumique décroît. Cet air subit alors une poussée d'Archimède du fait de l'air environnant plus froid. Il se met donc en mouvement, en emmenant de la chaleur fournie par le radiateur. Cet air est ensuite remplacé par l'air plus froid qui s'échauffe à son tour et le processus continu. Cet exemple ne fait intervenir que des forces de pesanteur. La convection libre est alors qualifiée de **convection naturelle**.

Lorsque le fluide est mis en mouvement par une pompe, un ventilateur ou tout autre moyen mécanique, on dit qu'il y a **convection forcée**. Le fluide échange de la chaleur avec des parois, mais son mouvement est pratiquement peu influencé par les différences de température. Par exemple, dans un sèche-cheveux, l'air est chauffé au contact de résistances électriques et transporté plus loin grâce à un ventilateur.

La relative complexité des phénomènes de convection nous obligera à ne traiter que des cas simples et caractéristiques permettant de résoudre les problèmes les plus courants.

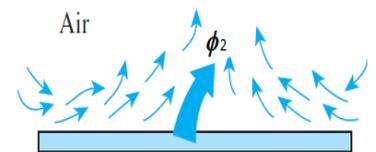
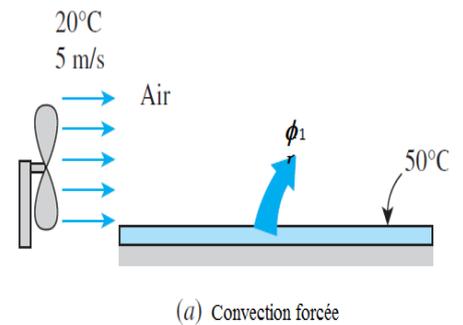


Fig. III.1. Convection forcée et naturelle

III.2. Modélisation du transfert de chaleur par convection

Malgré la complexité de la convection, on observe que la densité (ϕ : W/m²) du flux de chaleur par convection est proportionnelle à la différence de température et est commodément exprimé par la loi de Newton de refroidissement

$$\phi = h(T_s - T_\infty) \quad \left(\frac{W}{m^2} \right) \dots \text{(III.1)}$$

Où bien :

$$\phi_{conv} = h A_s (T_s - T_\infty) \quad (W) \dots \text{(III.2)}$$

Où : h : coefficient d'échange convectif, W/m².K ;

A_s : l'air de surface d'échange, m² ;

T_s : température de surface, K ;

T_∞ : Température du fluide, K.

L'expérience montre que le transfert de chaleur par convection dépend fortement des propriétés du fluide, de la viscosité dynamique μ , de la conductivité thermique λ , de la densité ρ et de la chaleur spécifique c_p , ainsi que de la vitesse du fluide. En plus du type d'écoulement de fluide (comme être laminaire ou turbulent). Ainsi, nous nous attendons à ce que les relations de transfert de chaleur par convection soient plutôt complexes en raison de la dépendance de la convection sur un grand nombre de variables. Ce n'est pas surprenant, car la convection est le mécanisme le plus complexe du transfert de chaleur.

III.2.1. Coefficient d'échange par convection

Le problème majeur à résoudre avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer le coefficient de convection h qui dépend de nombreux paramètres :

- Etat des surfaces : qualité, masse volumique, capacité thermique massique ;
- Nature du fluide : propriétés thermo-physiques ;
- Température du fluide ;
- Nature de l'écoulement.

L'écoulement des fluides est souvent confiné par des surfaces solides, et il est important de comprendre comment la présence de surfaces solides affecte l'écoulement des fluides. Considérez

l'écoulement d'un fluide dans un tuyau stationnaire ou sur une surface solide qui est non poreuse (c'est-à-dire imperméable au fluide). Toutes les observations expérimentales indiquent qu'un fluide en mouvement s'arrête complètement à la surface et prend une vitesse nulle par rapport à la surface. C'est-à-dire qu'un fluide en contact direct avec un solide «colle» à la surface en raison d'effets visqueux, et qu'il n'y a pas de glissement. Ceci est connu comme la condition de *non-glissement*.

Une conséquence de la condition de non-glissement est que tous les profils de vitesse doivent avoir des valeurs nulles par rapport à la surface aux points de contact entre un fluide et une surface solide (figure III.2). Une autre conséquence de la condition de non-glissement est la traînée de surface, qui est la force qu'un fluide exerce sur une surface dans la direction de l'écoulement.

Une implication de la condition de non-glissement est que le transfert de chaleur de la surface solide à la couche de fluide adjacente à la surface est par conduction pure, puisque la couche de fluide est immobile, et peut être exprimée comme :

$$\phi_{conv} = \phi_{cond} = -\lambda_{fluide} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \dots (III.3)$$

Où T représente la distribution de température dans le fluide et $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$ est le gradient de température à la surface. La chaleur est ensuite convectionnée loin de la surface à la suite du mouvement du fluide. Notez que le transfert de chaleur par convection d'une surface solide à un fluide est simplement le transfert de chaleur de conduction de la surface solide à la couche de fluide adjacente à la surface. Par conséquent, nous pouvons assimiler les Eqs. III-1 et III-3 pour le flux de chaleur à obtenir :

$$h = \frac{-\lambda_{fluide} (\partial T / \partial y)_{y=0}}{T_s - T_\infty} \dots (III.4) \quad [W/m^2.K]$$

Les conditions de l'écoulement varient le long d'une surface, alors h varie aussi. Le flux de chaleur total est obtenu en intégrant le flux local sur toute la surface :

$$\phi = (T_s - T_\infty) \int h ds \dots (III.5)$$

La relation peut être exprimée en fonction d'un coefficient de convection moyen :

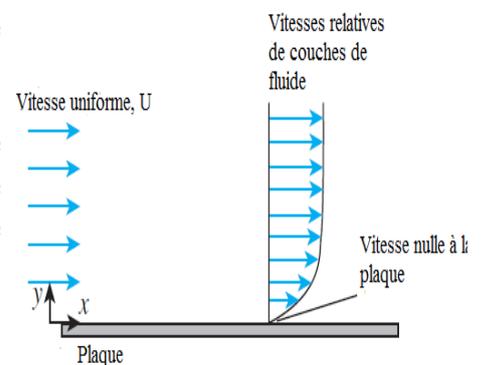


Fig. III.2. Ecoulement de fluide devant une plaque fixe.

$$\phi = \bar{h} A_s (T_s - T_\infty) ; \text{ avec } \bar{h} = \frac{1}{A_s} \int h ds \text{ ou } \bar{h} = \frac{1}{L} \int h dx$$

III.3. Classification des écoulements de fluide

Le transfert de chaleur par convection est étroitement lié à la mécanique des fluides, qui est la science qui traite du comportement des fluides au repos ou en mouvement, et de l'interaction des fluides avec les solides ou d'autres fluides aux limites. Il existe une grande variété de problèmes d'écoulement des fluides rencontrés dans la pratique, et il est généralement de les classer sur la base de certaines caractéristiques communes pour qu'il soit possible de les étudier en groupes. Il existe plusieurs façons de classer les problèmes d'écoulement des fluides, et nous présentons ici quelques catégories comme :

- **Écoulement interne et externe :**

Un écoulement de fluide est classé comme étant interne ou externe, selon que le fluide est forcé de s'écouler dans un canal confiné ou sur une surface. L'écoulement d'un fluide non lié sur une surface telle qu'une plaque, un fil ou un tuyau est un écoulement externe. L'écoulement dans un tuyau ou une conduite est un écoulement interne si le fluide est complètement délimité par des surfaces solides. L'écoulement de l'eau dans un tuyau, par exemple, est un écoulement interne, et le flux d'air sur une bille ou sur une conduite exposée pendant un jour venteux est un écoulement externe.

- **Écoulement laminaire et turbulent :**

Certains écoulements sont lisses et ordonnés tandis que d'autres sont plutôt chaotiques. Le mouvement fluide hautement ordonné caractérisé par des couches lisses de fluide est appelé laminaire. Le mot laminaire provient du mouvement des particules fluides adjacentes dans des «stratifiés». *L'écoulement de fluides à haute viscosité tels que les huiles à faible vitesse est typiquement laminaire.* Le mouvement fluide hautement désordonné qui se produit typiquement à des vitesses élevées et qui est caractérisé par des fluctuations de vitesse est appelé turbulent (figure III.3). *L'écoulement de fluides à faible viscosité tels que l'air à des vitesses élevées est typiquement turbulent.* Un écoulement qui alterne entre être laminaire et turbulent est appelé transitionnel.

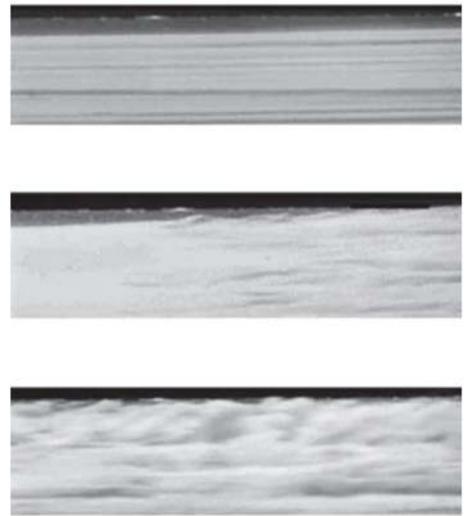


Fig.III.3. écoulement laminaire, transitoire et turbulent.

III.4. Couches limites

III.4.1. Couche limite dynamique

Considérons l'écoulement parallèle d'un fluide sur une plaque plane, comme le montre la figure III.4. Les surfaces légèrement profilées, telles que les aubes de turbine, peuvent également être approximées comme des plaques plates avec une précision raisonnable. La coordonnée x est mesurée le long de la surface de la plaque à partir du bord avant de la plaque dans la direction de l'écoulement, et y est mesurée à partir de la surface dans la direction normale. Le fluide se rapproche de la plaque dans la direction x avec une vitesse uniforme V , qui est pratiquement identique à la vitesse libre sur la plaque à l'écart de la surface.

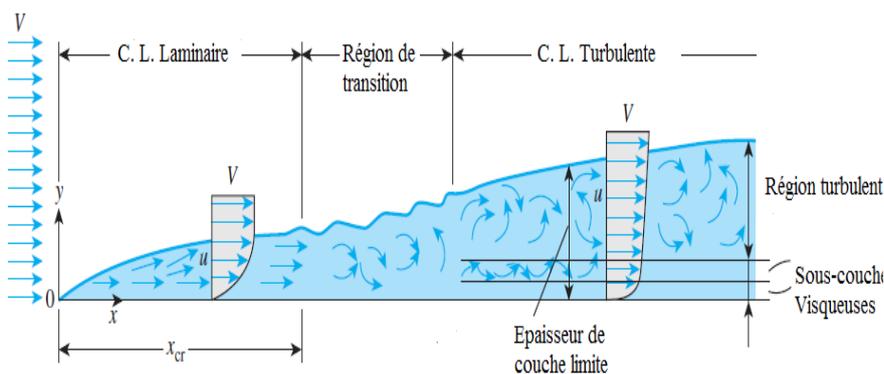


Fig.III.4. Développement de couche limite pour un écoulement devant une plaque.

Pour des raisons de discussion, nous pouvons considérer le fluide comme constitué de couches adjacentes empilées les unes sur les autres. La vitesse des particules dans la première couche de fluide adjacente à la plaque devient nulle en raison de la condition de non-glissement. Cette couche immobile ralentit les particules de la couche de fluide voisine à la suite du frottement entre les particules de ces deux couches de fluide adjacentes à des vitesses différentes. Cette couche de fluide ralentit ensuite les molécules de la couche suivante, et ainsi de suite. Ainsi, la présence de la plaque est ressentie jusqu'à une distance normale d de la plaque au-delà de laquelle la vitesse du courant libre reste essentiellement inchangée. Par conséquent, la composante de la vitesse du fluide, u , varie de 0 à $y = 0$ à près de V à $y = \delta$ (figure III.5). La région de l'écoulement au-dessus de la plaque délimitée par δ dans laquelle les effets des forces de cisaillement visqueux provoquées par la viscosité du fluide sont ressentis est appelée **couche limite dynamique**.

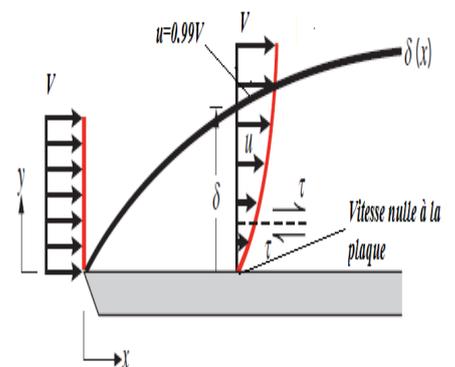


Fig. III.5. Couche limite dynamique.

L'épaisseur de la couche limite, δ , est typiquement définie comme la distance y de la surface à laquelle $u = 0,99V$.

La ligne hypothétique de $u = 0,99V$ divise le flux sur une plaque en deux régions : la région de la *couche limite*, dans laquelle les effets visqueux et les changements de vitesse sont significatifs, et la *région d'écoulement irrotationnel*, où les effets de frottement sont négligeables et la vitesse reste essentiellement constante.

La force de frottement par unité de surface est appelée contrainte de cisaillement et est désignée par τ . Des études expérimentales indiquent que la contrainte de cisaillement pour la plupart des fluides est proportionnelle au gradient de vitesse, et la contrainte de cisaillement à la surface de la paroi est exprimée comme :

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \dots (III.6) \text{ [N/m}^2\text{]}$$

Où μ est la viscosité dynamique (kg/m.s) ou (Pa.s) ou (poise = 0.1 Pa.s).

Le cisaillement à la surface est caractérisé par le coefficient de frottement local ;

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2} \dots (III.7)$$

Où C_f est le coefficient de frottement, dont la valeur dans la plupart des cas est déterminée expérimentalement, et ρ est la masse volumique. Notez que le coefficient de frottement, en général, varie avec l'emplacement le long de la surface. Une fois que le coefficient de frottement moyen sur une surface donnée est disponible, la force de frottement sur toute la surface est déterminée à partir de :

$$F_f = C_f A_s \frac{\rho V^2}{2} \dots (III.8)$$

Où A_s est l'aire de la surface.

III.4.2. Couche limite thermique

Nous avons vu qu'une couche limite dynamique se développe lorsqu'un fluide s'écoule sur une surface du fait que la couche de fluide adjacente à la surface prend la vitesse de surface (c'est-à-dire, une vitesse nulle par rapport à la surface). En outre, nous avons défini la couche limite de vitesse comme la région dans laquelle la vitesse du fluide varie de zéro à $0,99V$. De même, une couche limite thermique se développe lorsqu'un fluide à une température spécifiée s'écoule sur une surface qui est à une température différente, comme le montre la figure III.6.

Considérons l'écoulement d'un fluide à une température uniforme de T_∞ sur une plaque plane isotherme à la température T_s . Les particules de fluide dans la couche adjacente à la surface atteignent l'équilibre thermique avec la plaque et prennent la température de surface T_s . Ces particules de fluide échangent alors

Tab.III.1. Quelques valeurs de la viscosité dynamique des fluides à 20 °C.

Fluide	Viscosité dynamique [kg/m.s]
Glycérine	1.52
Huile de moteur	0.10
Mercure	0.0015
Alcool éthylique	0.0012
Eau	0.0010
Ammoniaque	0.00015
Air	0.000018
Hydrogène, 0°C	0.0000088

de l'énergie avec les particules dans la couche de fluide adjacente, et ainsi de suite. En conséquence, un profil de température se développe dans le champ d'écoulement qui va de T_s à T_∞ suffisamment loin de la surface. La région d'écoulement sur la surface dans laquelle la variation de température dans la direction normale à la surface est appelée *la couche limite thermique*. L'épaisseur de la couche limite thermique δ_t à n'importe quel endroit le long de la surface est définie comme étant la distance de la surface à laquelle la différence de température $(T - T_s) = 0,99 (T_\infty - T_s)$. Notez que pour le cas particulier de $T_s = 0$, nous avons $T = 0,99T_\infty$ sur le bord extérieur de la couche limite thermique, ce qui est analogue à $u = 0,99V$ pour la couche limite dynamique. L'épaisseur de la couche limite thermique augmente dans la direction de l'écoulement, car les effets du transfert de chaleur se font sentir à de plus grandes distances de la surface plus en aval. Le flux de chaleur par convection à n'importe quel endroit de la surface est directement lié au gradient de température à cet endroit. Par conséquent, la forme du profil de température dans la couche limite thermique dicte le transfert de chaleur par convection entre une surface solide et le fluide qui y circule.

III.5. Nombres sans dimensions (analyse dimensionnelle)

Dans la pratique, les coefficients d'échange de chaleur par convection sont généralement calculés à partir des équations empiriques obtenus en établissant une corrélation entre les données expérimentales au moyen de l'analyse dimensionnelle. Pour appliquer l'analyse dimensionnelle, il est indispensable de connaître au préalable les variables qui influencent le phénomène.

La première étape consiste à choisir un système de dimensions fondamentales. Celles-ci seront la longueur L , le temps T , la température θ et la masse M . à partir de ces dimensions fondamentales toutes les autres grandeurs peuvent être définies.

Le nombre de groupe adimensionnel indépendant nécessaire pour exprimer la relation décrivant un phénomène, peut être déterminé par une méthode empirique due à Vaschy- Buckingham. D'après ce théorème, le nombre de groupe indépendant adimensionnel, qui peut être formé par la combinaison des variables physiques du problème donné, est égal au nombre total de ces quantités physiques (masse volumique, viscosité, coefficient d'échange de chaleur ...etc.) diminué du nombre des dimensions fondamentales. Le coefficient h dépend des 7 grandeurs données dans le tableau III.2.

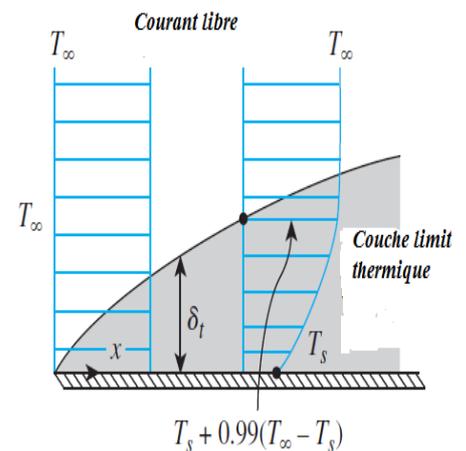


Fig. III.6. couche limite thermique pour une plaque isotherme (cas de chauffage).

Tab.III.2. Grandeurs de Vaschy-Buckingham

<i>Grandeurs</i>	<i>symbole</i>	<i>Unité S.I.</i>	<i>Equation aux dimensions</i>
Longueur de la plaque ou diamètre du tuyau	D	m	L
Vitesse du fluide	U_∞	m.s ⁻¹	LT ⁻¹
Masse volumique du fluide	ρ	Kg.m ⁻³	ML ⁻³
Viscosité dynamique du fluide	μ	Kg.m ⁻¹ .s ⁻¹	ML ⁻¹ T ⁻¹
Conductivité thermique du fluide	λ	W.m ⁻¹ .K ⁻¹	MLT ⁻³ θ ⁻¹
Capacité thermique massique du fluide	c_p	J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	L ² T ⁻² θ ⁻¹
Coefficient d'échange convectif	h	W.m ⁻² .K ⁻¹	MT ⁻³ θ ⁻¹

Ce problème met en jeu 7 grandeurs physiques et 4 dimensions. Donc, il faut déterminer une loi avec (7- 4=3) paramètres sans dimensions :

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \text{ ou bien } \pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

Relation dans laquelle π_1 , π_2 et π_3 désignent 3 produit sans dimension pouvant être constitués au moyen de ces 7 grandeurs physiques considérées

Recherchons ces groupements en posant :

$$\begin{cases} \pi_1 = D^{a_1} \mu^{b_1} \rho^{c_1} \lambda^{d_1} h \\ \pi_2 = D^{a_2} \mu^{b_2} \rho^{c_2} \lambda^{d_2} c_p \\ \pi_3 = D^{a_3} \mu^{b_3} \rho^{c_3} \lambda^{d_3} U_\infty \end{cases} \text{ d'où :}$$

$$\pi_1 = L^{a_1} (ML^{-1}T^{-1})^{b_1} (ML^{-3})^{c_1} (MLT^{-3}\theta^{-1})^{d_1} MT^{-3}\theta^{-1} = 1$$

Pour que π_n reste adimensionnel, il faut que la somme des exposants de chaque dimension fondamentale soit nulle.

Pour L : $a_1 - b_1 - 3c_1 + d_1 = 0$;

Pour M : $b_1 + c_1 + d_1 + 1 = 0$;

Pour T : $-b_1 - 3d_1 - 3 = 0$;

Pour θ : $-d_1 - 1 = 0$;

Ce qui nous permet de déduire : $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, d_1 = -1$ d'où

$$\text{alors } \pi_1 = \frac{Dh}{\lambda}.$$

$\pi_1 = Nu$ (nombre de Nusselt).

$$\text{Avec la même méthode on obtient pour } \pi_2 : \pi_2 = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} ;$$

$\pi_2 = Re = \text{nombre de Reynolds.}$

Le nombre de Reynolds est le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

$$\text{En fin pour } \pi_3, \pi_3 = Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \text{ (nombre de Prandlt).}$$

III. 5.1. Signification physique de quelques nombres sans dimensions

1. Nombre de Nusselt

Dans les études de convection, il est courant de dimensionner les équations gouvernantes et de combiner les variables, qui se regroupent en nombres sans dimension afin de réduire le nombre de variables totales. Il est également courant de dimensionner le coefficient de transfert thermique h avec le nombre de Nusselt, défini comme :

$$Nu = \frac{hL_c}{\lambda_f} \dots \text{(III.9)}$$

où λ_f est la conductivité thermique du fluide et L_c est la longueur caractéristique.

Pour comprendre la signification physique du nombre de Nusselt, considérons une couche de fluide d'épaisseur L et de différence de température $\Delta T = T_2 - T_1$, comme indiqué sur la figure III.7. Le transfert de chaleur à travers la couche de fluide se fait par *convection* lorsque le fluide implique un certain mouvement et par *conduction* lorsque la couche de fluide est immobile.

Flux de chaleur (le taux de transfert de chaleur par unité de surface) dans les deux cas est

$$\varphi_{conv} = h\Delta T \text{ et } \varphi_{cond} = \lambda \Delta T / L \text{ d'où :}$$

$$\varphi_{conv} / \varphi_{cond} = \frac{h\Delta T}{\lambda \Delta T / L} = \frac{hL}{\lambda} = Nu \dots \text{(III.10)}$$

Par conséquent, le nombre de Nusselt représente l'amélioration du transfert de chaleur à travers une couche de fluide à la suite de la convection par rapport à la conduction à travers la même couche de

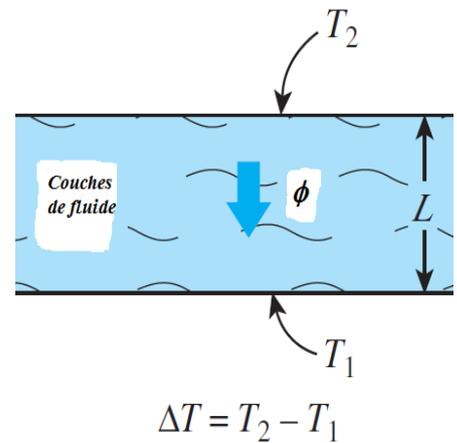


Fig.III.7. Transfert thermique à travers les couches de fluide.

fluide. Plus le nombre de Nusselt est grand, plus la convection est efficace.

2. Nombre de Reynolds

La transition de l'écoulement laminaire au turbulent dépend de la géométrie de la surface, la rugosité de surface, la vitesse d'écoulement, la température de surface et le type de fluide, entre autres choses. Après des expériences exhaustives dans les années 1880, Osborn Reynolds a découvert que le régime d'écoulement dépend principalement du rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses dans le fluide. Ce rapport est appelé le nombre de Reynolds, qui est une quantité sans dimension, et est exprimé pour l'écoulement externe comme :

$$Re = \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de visqueuse}} = \frac{UL_c}{\nu} = \frac{\rho UL_c}{\mu} \dots (III.11)$$

3. Nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \dots (III.12)$$

Le nombre de Prandtl caractérise entièrement le fluide considéré. Il compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Un Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Un Prandtl faible (exemple métaux liquides) indique que la condition thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température.

- Pour les gaz simple le nombre de Prandtl est d'ordre 1 ;
- Pour les liquides Pr est d'autant plus grand que le liquide est huileux ;
- Pour les métaux liquides (ou fondus), Pr est très petit, de l'ordre de 0.01.

4. Nombre de Péclet

Représente le rapport du transfert de chaleur par convection au transfert de chaleur par conduction.

$$Pe = Re . Pr = \frac{U . L_c}{\alpha} \dots (III.13)$$

Où α est la diffusivité thermique (m^2/s) $\alpha = \lambda / \rho c_p$.

5. Nombre de Grashof

Le nombre de Grashof (Gr) est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection libre dans un fluide. Il correspond au rapport des forces de gravité sur les

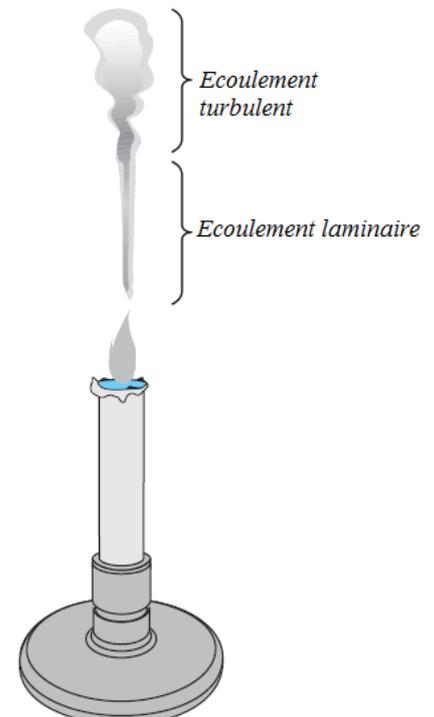


Fig.III.8. Ecoulement laminaire et turbulent d'un fumé.

Tab III.3. Quelques valeurs de nombre de Prandtl pour des fluides

Fluide	Pr
Métaux liquides	0.004 – 0.030
Gaz	0.7 – 1.0
Eau	1.7 – 13.7
Fluides organiques	5 – 50
Huiles	50 – 100000
Glycérine	2000 – 100000

forces visqueuses. Ce nombre porte le nom de Franz Grashof, ingénieur allemand. On définit le nombre de Grashof de la manière suivante :

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2} = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2} \dots \text{(III.14)}$$

Il remplace le nombre de Reynolds en convection naturelle

Remarque :

Dans le cas où les dimensions sont connues, pour obtenir la quantité de chaleur Q , il est préférable de suivre les étapes suivantes :

1. Calcul de nombre de Reynolds, puis, après comparaison avec un nombre de Reynolds critique (Re_c), détermination du régime de l'écoulement (laminaire ou turbulent) ;
2. Utilisation de la loi d'échange correspondant au régime de l'écoulement pour obtenir le nombre de Nusselt ;
3. Calcul du coefficient h ;
4. Calcul de Q par la relation $Q = hA_s t(T_s - T_\infty)$

III.6. Quelques formules empiriques pour le calcul de h

III.6.1. Convection forcée externe

Les phénomènes qui affectent la force de frottement affectent également le transfert de chaleur, et cet effet apparaît dans le nombre de Nusselt.

La loi fondamentale de transfert de chaleur par convection peut être mise sous la forme :

$$Nu_x = f(x^*, Re_x, Pr) \text{ ou } Nu = f(Re_L, Pr)$$

x^* est un rapport entre grandeurs de même dimensions.

Les données expérimentales pour le transfert de chaleur sont souvent représentées commodément avec une précision raisonnable par une simple relation loi-puissance de la forme :

$$Nu = C Re_L^m Pr^n \dots \text{(III.15)}$$

Où m et n sont des constantes, et la valeur de la constante C dépend la géométrie de la surface et l'écoulement. La température du fluide à l'intérieur de couche limite thermique varie de T_s à T_∞ . Les propriétés du fluide varient également avec la température, et donc avec la position à travers la couche limite. Afin de tenir compte de la variation des propriétés avec la température, les propriétés du fluide sont habituellement évaluées à *la température du film*, définie comme :

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2}$$

Qui représente un moyen arithmétique entre la température de surface et l'écoulement libre. Les propriétés du fluide sont supposées constantes durant l'écoulement.

III.6.1.1. Écoulement parallèle le long d'une plaque plane

On considère un écoulement parallèle au voisinage d'une plaque plate de longueur L (figure III.9). L'axe x est commencer à partir de bord d'attaque ($x = 0$), le fluide est approché avec une vitesse uniforme V et une température T_∞ . La couche limite dynamique commence comme laminaire, mais si la plaque est suffisamment long, l'écoulement devient turbulent à $x = x_{cr}$ où nombre de Reynolds a une valeur critique Re_{cr} .

La transition de l'écoulement entre laminaire et turbulent dépend la *géométrie de surface*, la *rugosité de surface*, la *vitesse*, la *température de la surface*, la *nature du fluide utilisé*. Pour caractériser l'écoulement il faut donc calculer le nombre de Reynolds (Re).

Le nombre de Reynolds à une distance x est exprimer par :

$$Re_x = \frac{\rho V x}{\mu} = \frac{V x}{\nu} \dots (III.16)$$

Pour la distance L :

$$Re_L = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu} \dots (III.17)$$

L'expérience montre que la distance x_c marquant la fin de la zone laminaire s'obtient pour un nombre de Reynolds valant approximativement 5×10^5 (cette valeur peut varier avec l'état de surface de la plaque, ainsi que le niveau de turbulence de l'écoulement incident). La transition entre deux régimes s'obtient donc pour :

$$Re_{cr} = \frac{\rho V x_{cr}}{\mu} = 5 \times 10^5 \dots (III.18)$$

III.6.1.2. Coefficient de frottement

Le *coefficient de frottement local* peut calculer par les expressions suivantes :

Laminaire :
$$C_{f,x} = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}}, Re_x < 5 \times 10^5 \dots (III.19)$$

Turbulent :
$$C_{f,x} = \frac{0.059}{Re_x^{1/5}}, 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7 \dots (III.20)$$

Le *coefficient de frottement moyen* le long de la plaque (L) est exprimé par :

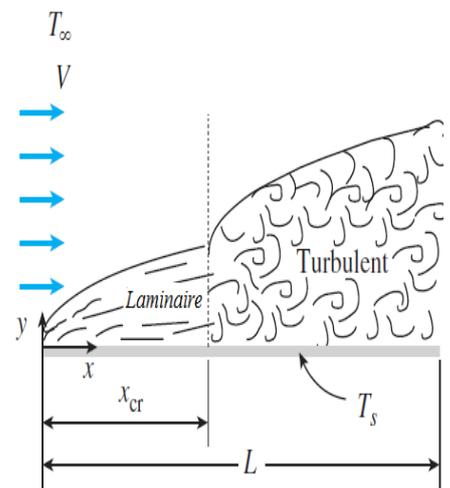


Fig.III.9. Régions laminaire et turbulente d'une couche limite pour un écoulement devant une plaque.

Laminaire : $C_f = \frac{1.33}{Re_L^{1/2}}, Re_L < 5 \times 10^5 \dots (III.21)$

Turbulent : $C_f = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}}, 5 \times 10^5 \leq Re_L \leq 10^7 \dots (III.22)$

III.6.1.3. Coefficient de transfert convectif

➤ Pour une plaque isothermique ($T_s = C^{te}$), Le nombre de Nusselt local peut calculer par :

Laminaire :

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} = 0.332 Re_x^{0.5} Pr^{1/3} \dots (III.23)$$

$Pr > 0.6, Re_x < 5 \times 10^5$

Turbulent :

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} = 0.0296 Re_x^{0.8} Pr^{1/3} \dots (III.24)$$

$0.6 \leq Pr \leq 60, 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7$

Le nombre de Nusselt moyen le long de la plaque (L) est déterminé par:

Laminaire :

$$Nu = \frac{h L}{\lambda} = 0.664 Re_L^{0.5} Pr^{1/3} \dots (III.25)$$

$Pr > 0.6, Re_L < 5 \times 10^5$

Turbulent :

$$Nu = \frac{h L}{\lambda} = 0.037 Re_L^{0.8} Pr^{1/3} \dots (III.26)$$

$0.6 \leq Pr \leq 60, 5 \times 10^5 \leq Re_L \leq 10^7$

Lorsque la couche limite est à la fois laminaire et turbulente, nous déterminons les coefficient moyens par :

- Si la zone de transition se produit à la fin de la plaque ($0.95 < x_{cr}/L < 1$), nous utilisons les corrélations pour les valeurs moyennes de Nusselt en régime laminaire.
- Si la zone de transition a lieu suffisamment avant ($x_{cr}/L < 0.95$), les coefficients sont influencés par les régimes laminaire et turbulent et il faut effectuer une intégration en deux parties. L'une du bord d'attaque à x_{cr} , l'autre de x_{cr} au bord de fuite :

$$h = \frac{1}{L} \left(\int_0^{x_{cr}} h_{x,laminaire} dx + \int_{x_{cr}}^L h_{x,turbulent} dx \right) \dots (III.27)$$

Nombre de Nusselt pour la couche mixte :

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} = (0.037 Re_L^{0.8} - 871) Pr^{1/3} \dots (III.28)$$

$$0.6 \leq Pr \leq 60, 5 \times 10^5 \leq Re_L \leq 10^7$$

➤ Pour *un flux thermique imposé* sur une plaque, Le nombre de Nusselt local peut calculer par :

Laminaire :

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} = 0.453 Re_x^{0.5} Pr^{1/3} \dots (III.29)$$

$$Pr > 0.6, Re_x < 5 \times 10^5$$

Turbulent :

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} = 0.0308 Re_x^{0.8} Pr^{1/3} \dots (III.30)$$

$$0.6 \leq Pr \leq 60, 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7$$

III.6.1.4. Écoulement autour d'un cylindre ou sphère

Les écoulements à travers les cylindres et les sphères, en général, impliquent une séparation d'écoulement, qui est difficile à manipuler analytiquement. Par conséquent, de tels écoulements doivent être étudiés expérimentalement ou numériquement. En effet, l'écoulement à travers les cylindres et les sphères a été étudié expérimentalement par de nombreux chercheurs, et plusieurs corrélations empiriques ont été développées pour le coefficient de transfert de chaleur. Parmi des nombreuses relations disponibles dans la littérature pour le nombre de Nusselt moyen pour *un écoulement autour d'un cylindre*, nous présentons celle proposée par Churchill et Bernstein (1977):

$$Nu_{cyl} = \frac{hD}{\lambda} = 0.3 + \frac{0.62 Re^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0.4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \dots (III.31)$$

Pour *un écoulement autour d'une sphère*, Whitaker (1972) recommandé la corrélation suivante :

$$Nu_{sph} = \frac{hD}{\lambda} = 2 + \left[0.4 Re^{1/2} + 0.06 Re^{2/3} \right] Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right)^{1/4} \dots (III.32)$$

Qui est valide pour :

$$3.5 \leq Re \leq 8 \times 10^4, 0.7 \leq Pr \leq 380 \text{ et } 1.0 \leq (\mu_\infty / \mu_s) \leq 3.2.$$

Le nombre de Nusselt moyen pour un écoulement autour d'un cylindre peut être exprimé d'une manière générale comme suit :

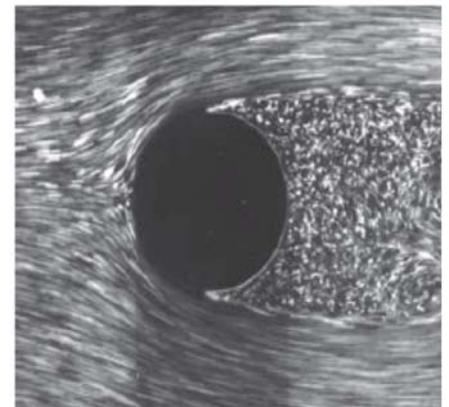


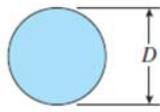
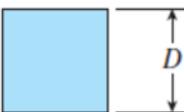
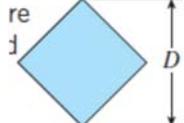
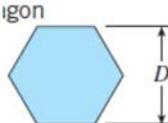
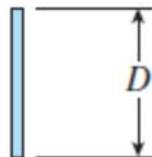
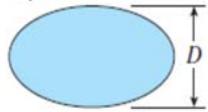
Fig. III.10. Séparation de la couche limite laminaire avec un sillage turbulent ; écoulement sur un cylindre circulaire à $Re = 2000$.

$$Nu_{cyl} = \frac{h D}{\lambda} = C Re^m Pr^n \dots \text{(III.33)}$$

Où $n = 1/3$, C et m déterminées expérimentalement.

Le tableau suivant donne les valeurs de C et m pour quelque géométrie circulaire et non-circulaires.

Tab.III.4. Corrélations empirique pour Nusselt moyen pour convection forcée autour d'un cylindre circulaire et non circulaire (Zukauskas, 1972, Jakob 1949, and Sparrow et al.,). 2004).

Géométrie	fluide	Re	Nusselt (Nu)
	Liqui de ou gaz	0.4 – 4	$Nu = 0.989 Re^{0.33} Pr^{1/3}$
		4 – 40	$Nu = 0.911 Re^{0.385} Pr^{1/3}$
		40 – 4000	$Nu = 0.683 Re^{0.466} Pr^{1/3}$
		4000 – 40000	$Nu = 0.193 Re^{0.618} Pr^{1/3}$
		40000 – 400000	$Nu = 0.027 Re^{0.805} Pr^{1/3}$
	Gaz	3900 – 79000	$Nu = 0.094 Re^{0.675} Pr^{1/3}$
	Gaz	5600 – 111000	$Nu = 0.258 Re^{0.588} Pr^{1/3}$
	Gaz	4500 – 90700	$Nu = 0.148 Re^{0.638} Pr^{1/3}$
	Gaz	6300 – 23600	$Nu = 0.257 Re^{0.731} Pr^{1/3}$
	Gaz	1400 – 8200	$Nu = 0.197 Re^{0.612} Pr^{1/3}$

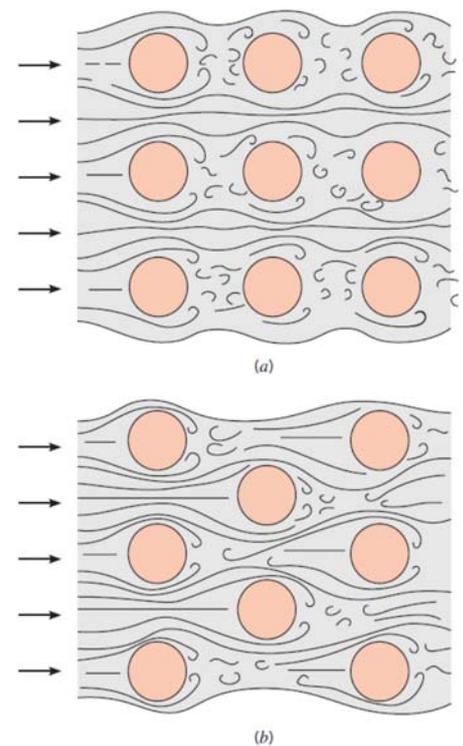


Fig.III.11. Ecoulement autour d'un faisceau de tubes : (a) alignés (b) en quinconce.

III.6.1.5. écoulement autour d'un faisceau de tubes

De nombreux appareils industriels tel que les réchauffeurs d'air, les échangeurs thermiques sont constitués de rangées de tubes parallèles, plongés dans un écoulement de fluide dirigé perpendiculairement à leur axe. Les tubes peuvent être disposés en ligne ou en quinconce, comme l'indique la figure . l'expérience montre que la disposition en quinconce est le siège d'une plus grande turbulence, et conduit alors à un coefficient de convection plus élevé que la disposition alignée.

Dans un faisceau, le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse maximale V_{max} , qui reliée à la vitesse d'entrée V comme :

Alignée et quincone avec $S_D < (S_T + D)/2$:

$$V_{max} = \frac{S_T}{S_T - D} V \dots (III.34)$$

Quincone avec $S_D < (S_T + D)/2$:

$$V_{max} = \frac{S_T}{2(S_T - D)} V \dots (III.35)$$

Où S_T distance transversale et S_D est la distance diagonale (figure III.12).

Le nombre du Nusselt moyen pour un écoulement autour d'un faisceau est exprimé par la relation qui a été proposée par Zukauskas (1987) comme :

$$Nu_D = \frac{h D}{\lambda} = C Re_D^m Pr^n (Pr/Pr_s)^{0.25} \dots (III.36)$$

où les valeurs des constantes C , m et n dépendent du nombre de Reynolds. Ces corrélations sont données dans le tableau III.5 pour les faisceaux de tubes de plus de 16 rangées

($N_L > 16$), $0,7 < Pr < 500$ et $0 < Re_D < 2 \times 10^6$. L'incertitude sur les valeurs du nombre de Nusselt obtenues à partir de ces relations est de 15%.

Notez que toutes les propriétés sauf Pr_s doivent être évaluées à la température moyenne arithmétique du fluide déterminé à partir de :

$$T_m = \frac{T_i + T_e}{2} \dots (III.38)$$

où T_i et T_e sont les températures du fluide à l'entrée et à la sortie du faisceau, respectivement.

Les relations de nombres de Nusselt moyen dans le tableau III.5 concernent les faisceaux de plus de 16 rangées. Ces relations peuvent également être utilisées pour des faisceaux de tubes avec $N_L < 16$ à condition qu'elles soient modifiées comme :

$$Nu_{D, N_L < 16} = F Nu_D \dots (III.39)$$

où F est un facteur de correction dont les valeurs sont données dans le Tableau III.6.

Pour $Re_D > 1000$, le facteur de correction est indépendant du nombre de Reynolds.

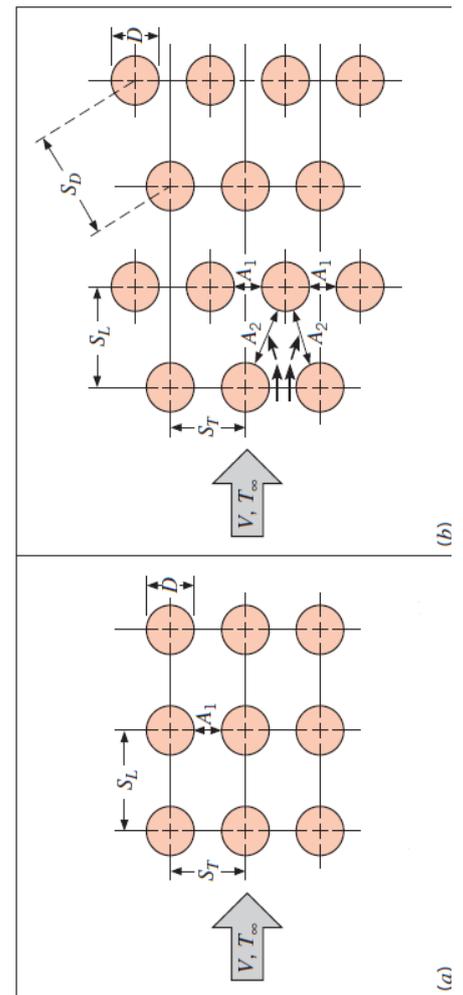


Fig. III.12. Arrangements de tubes dans une banque. (a) Aligné. (b) en quinconce.

Tableau III.5. Corrélation de Nu_D pour un écoulement autour d'un faisceau de tubes $N_L > 16$ et $0.7 < Pr < 500$ (Zukauskas, 1987).

Arrangement	Re_D	Correlation
Aligné	0-100	$Nu_D = 0.9 Re_D^{0.4} Pr^{0.36} (Pr/Pr_s)^{0.25}$
	100-1000	$Nu_D = 0.52 Re_D^{0.5} Pr^{0.36} (Pr/Pr_s)^{0.25}$
	1000- 2×10^5	$Nu_D = 0.27 Re_D^{0.63} Pr^{0.36} (Pr/Pr_s)^{0.25}$
	2×10^5 - 2×10^6	$Nu_D = 0.033 Re_D^{0.8} Pr^{0.4} (Pr/Pr_s)^{0.25}$
Quincone	0-500	$Nu_D = 1.04 Re_D^{0.4} Pr^{0.36} (Pr/Pr_s)^{0.25}$
	500-1000	$Nu_D = 0.71 Re_D^{0.5} Pr^{0.36} (Pr/Pr_s)^{0.25}$
	1000- 2×10^5	$Nu_D = 0.35 (S_T/S_L)^{0.2} Re_D^{0.6} Pr^{0.36} (Pr/Pr_s)^{0.25}$
	2×10^5 - 2×10^6	$Nu_D = 0.031 (S_T/S_L)^{0.2} Re_D^{0.8} Pr^{0.36} (Pr/Pr_s)^{0.25}$

Tableau III.6. Facteur de correction F pour $Nu_{D,NL < 16} = F Nu_D Re_D > 1000$

N_L	1	2	3	4	5	7	10	13
Aligné	0.70	0.80	0.86	0.90	0.93	0.96	0.98	0.99
Quincone	0.64	0.76	0.84	0.89	0.93	0.96	0.98	0.99

III.6.2. Convection forcée interne (écoulement dans un tube)

III.6.2.1. Considération dynamique

Dans un écoulement externe, il est nécessaire de se demander si l'écoulement est laminaire ou turbulent. Cependant, pour un écoulement interne, nous devons également nous préoccuper de l'existence de *régions d'entrée* et de *région pleinement développée*. Considérons l'écoulement laminaire dans un tube circulaire de rayon r_o (figure III.13), où le fluide pénètre dans le tube avec une vitesse uniforme. Nous savons que lorsque le fluide entre en contact avec la surface, les effets visqueux deviennent importants et une couche limite se développe avec l'augmentation de x . Ce développement se produit au détriment d'une région d'écoulement non réticulaire rétrécissant et se termine par une fusion de couche limite à la ligne centrale. Suite à cette fusion, les effets visqueux s'étendent sur toute la section transversale et le profil de vitesse ne change plus avec x . On dit alors que l'écoulement est *complètement développé*, et la distance de l'entrée à laquelle cette condition est atteinte est appelée *longueur d'entrée hydrodynamique*, L_h . Comme le montre la Figure III.13, le profil de vitesse dans cette région est de forme parabolique pour l'écoulement laminaire dans un tube circulaire.

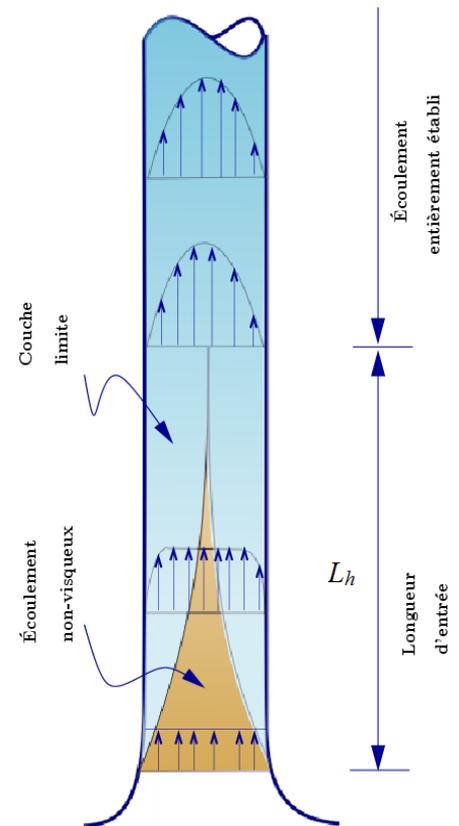


Fig.III.13. Écoulement dans un tube circulaire.

Le régime d'écoulement laminaire ou turbulent dans un tube circulaire, est déterminé par la connaissance du nombre de Reynolds défini de la façon suivante :

$$Re_D = \frac{V_m D}{\nu} = \frac{\rho V_m D}{\mu} \dots (III.40)$$

Où V_m est la vitesse moyenne sur une section.

L'expérience de Reynolds montre que l'écoulement laminaire correspond à un nombre de Reynolds allant de 0 à 2300. La turbulence est considérée comme pleinement développée au delà de 10000. Entre 2300 et 10000 s'étend la zone de transition.

Pour un écoulement à travers un tube non-circulaire, le nombre de Reynolds, nombre de Nusselt et coefficient de frottement linéaire sont basés sur le *diamètre hydraulique* D_h défini comme :

$$D_h = \frac{4A_c}{P} \dots (III.41)$$

Où A_c est l'aire de surface d'échange et P le périmètre.

En régime laminaire ($Re_D < 2300$), la longueur d'établissement de la couche limite dynamique, appelée aussi *longueur d'entrée*, est donnée par :

$$L_{h,laminaire} \approx 0.05 Re_D D \dots (III.42)$$

En régime turbulent, la longueur d'entrée ne dépend quasiment pas du nombre de Reynolds, et vaut approximativement 10 à 60 fois le diamètre

$$10 \leq \frac{L_{h,turb}}{D} \leq 60 \dots (III.43)$$

La vitesse varie sur la section transversale, il est nécessaire de travailler avec une vitesse moyenne V_m lorsqu'il s'agit d'un écoulement interne. Cette vitesse est liée au débit massique par la relation suivante :

$$q_m = \rho V_m A_c \dots (III.44)$$

Pour un écoulement permanent, incompressible dans un tube de section uniforme A_c , le nombre de Reynolds est exprimé par :

$$Re_D = \frac{4 q_m}{\pi D \mu} \dots (III.45)$$

Et la vitesse moyenne est donnée par la relation suivante, pour un écoulement incompressible dans un tube circulaire :

$$V_m = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} u(r) r dr \dots (III.46)$$

L'ingénieur s'intéresse fréquemment à la perte de charge dans un écoulement interne, car ce paramètre détermine les besoins en

puissance de la pompe ou du ventilateur. Pour déterminer la *perte de charge*, il est pratique de travailler avec le *coefficient de frottement linéaire*, qui est un paramètre sans dimension défini comme :

$$f = \frac{-(dp/dx)D}{\rho V_m^2/2} \dots (III.47)$$

Cette quantité ne doit pas être confondue avec le coefficient de frottement à la paroi, parfois appelé le facteur de frottement Fanning, qui est défini comme :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho V_m^2/2} \dots (III.48)$$

L'expérience montre que le coefficient de frottement linéaire dépend de nombre de Reynolds.

Le tableau suivant représente quelques corrélations pour f , dans des conduites circulaires.

Tableau III.7. Quelques corrélations pour f .

Corrélation	R. d'écoulement	Région d'écoulement
$f = 64/Re_D$	Laminaire	Pleinement développée
$f = 0.316Re_D^{-1/4}$	Turbulent	Pleinement développée $Re_D \leq 2 \times 10^4$
$f = 0.184Re_D^{-1/5}$	Turbulent	Pleinement développée $Re_D \geq 2 \times 10^4$
$f = (0.790 \ln Re_D - 1.64)^{-2}$	Turbulent	Pleinement développée $3000 \leq Re_D \leq 5 \times 10^6$

III.6.2.2. Conséideration thermique

Nous considérons maintenant les effets thermiques. Si le fluide pénètre dans le tube de la figure III.14 à une température uniforme $T(r, 0)$ inférieure à la température de surface, le transfert de chaleur par convection se produit et une couche limite thermique commence à se développer. Et comme l'hydrodynamique, il existe aussi deux régions thermiquement distinctes : *région thermique d'entrée* et *région thermique pleinement développée*.

La longueur d'établissement de la couche limite thermique ou la *longueur d'entrée thermique*, notée par L_t , peut être obtenue, en régime laminaire, à partir de L_h , et nombre de Prandtl :

$$L_{t,lam} = 0.05 Re_D Pr D = Pr L_{h,lam} \dots (III.49)$$

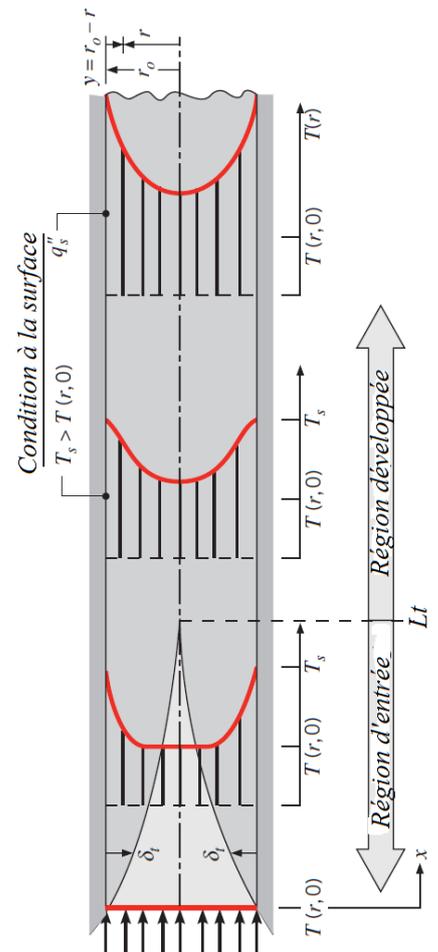


Fig.III.14. Ecoulement en convection dans un tube chauffé.

En régime turbulent, la longueur d'entrée thermique dépend très peu du nombre de Prandtl, elle est du même ordre que la longueur d'entrée dynamique.

III.6.2.3. Analyse thermique

On considère un écoulement permanent dans un tube cylindrique, la conservation de l'équation d'énergie (le flux thermique) pour l'écoulement permanent d'un fluide dans un tube peut être exprimée comme

$$\phi = q_m c_p (T_e - T_i) \dots \text{(III.50)}$$

où T_i et T_e sont les températures moyennes du fluide à l'entrée et à la sortie du tube, respectivement.

Notons que la température d'un fluide circulant dans un tube reste constante en l'absence de toute interaction énergétique à travers la paroi du tube. Les conditions thermiques à la surface peuvent généralement être approximées avec une précision raisonnable pour être une température de surface constante ($T_s = \text{constante}$) ou une densité du flux de chaleur de surface constant ($\phi_s = \text{constante}$).

1. Dans le cas de $\phi = \text{Cte}$, le flux thermique est donné par

$$\phi = q_m c_p (T_e - T_i) \dots \text{(III.51)}$$

Ensuite, la température moyenne du fluide à la sortie du tube devient :

$$T_e = T_i + \frac{\phi_s A_s}{q_m c_p} \dots \text{(III.52)}$$

On notera que la température moyenne du fluide augmente linéairement dans le sens de l'écoulement dans le cas d'un flux thermique constant, puisque la surface augmente linéairement dans le sens de l'écoulement

III.6.2.4. Corrélation empirique de nombre de Nusselt

Corrélation	R. d'écoulement	Région d'écoulement
$Nu_D = 4.36$	Laminaire	Pliement développée, avec densité du flux constante
$Nu_D = 3.66$	Laminaire	Pliement développée, avec température constante
$Nu_D = 3.66 + \frac{0.0668(D/L) Re_D Pr}{1 + 0.04[(D/L) Re_D Pr]^{2/3}}$	Laminaire	Région d'entrée avec $Pr > 5$ et $T_s = \text{Cte}$.
Où $Nu_D = 1.86 \left(\frac{Re_D Pr}{L/D} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14}$	Laminaire	$T_s = \text{Cte}$, $0.6 \leq Pr \leq 160$ $0.0044 \leq (\mu/\mu_s) \leq 9.75$

$Nu_D = 0.023 Re_D^{4/5} Pr^n$	Turbulent	$0.6 \leq Pr \leq 160$ $Re_D \geq 10000, (L/D) \geq 10$ $n = 0.4$ pour chauffage $n = 0.3$ pour refroidissement
$Nu_D = \frac{(f/8)(Re_D - 1000)Pr}{1 + 12.7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)}$	Turbulent	Plenement développée, $0.5 \leq Pr \leq 2000$ $3000 \leq Re_D \leq 5 \times 10^6$, $(L/D) \geq 10$

III.6.3. Convection naturelle

Un coefficient thermophysique supplémentaire intervient dans le cas de convection naturelle : le coefficient de dilatation thermique à pression constante défini par :

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta T} \right) \dots (III.53)$$

$\Delta \rho$ est la variation de masse volumique ρ provoquée par la variation de température ΔT .

L'application de l'analyse dimensionnelle à la convection naturelle met en évidence un groupement adimensionnel nouveau appelé nombre de Grashof (Gr). Envisageons le cas du fluide en contact avec une paroi plane horizontale (figure III.15).

Le fluide est initialement au repos et en équilibre thermique avec la paroi à la température T_∞ . La masse volumique du fluide est ρ_0 . Quand on augmente la température de la paroi, le fluide s'échauffe de $\Delta T = T_p - T_\infty$. Il se dilate et donc sa masse volumique varie aussi comme : $\Delta \rho = \rho - \rho_0 < 0$. Il sera alors soumis à une force ascensionnelle (poussée d'Archimède) d'intensité $\Delta \rho \vec{g}$ (par unité de volume) correspondant à l'accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{\Delta \rho}{\rho} \vec{g} = -\beta \vec{g} \Delta T \dots (III.54)$$

L'écoulement spontané résultant va conduire aux courants de convection naturelle.

On peut admettre a priori que le coefficient d'échange convectif h entre la paroi et le fluide en question dépend :

- ✓ Des caractéristiques du fluide : $\lambda_f, \rho, \mu, c_p, \beta g \Delta T$
- ✓ Du gradient de température dans la couche limite ΔT
- ✓ Des caractéristiques géométriques de la paroi : longueur L

Suivant la démarche présentée en convection forcée, nous obtenons le nombre sans dimension de Grashof :

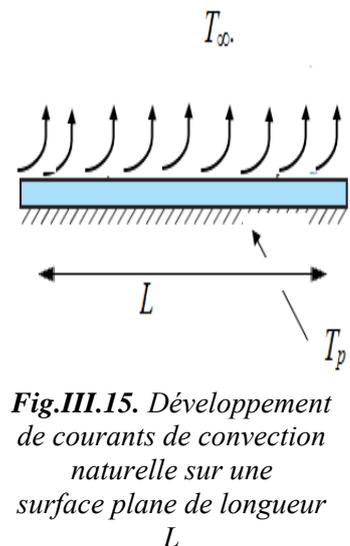


Fig.III.15. Développement de courants de convection naturelle sur une surface plane de longueur L

$$Gr = \frac{\beta \rho^2 g \Delta T L^3}{\mu^2} = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu^2} \dots (III.55)$$

Ou $\nu = \mu/\rho$.

L'analyse dimensionnelle montre que les échanges en convection naturelle peuvent être décrits par des corrélations du type :

$$Nu = f(Pr, Gr) \dots (III.56)$$

Dans les corrélations expérimentales pour la convection naturelle nous allons souvent rencontrer le produit des nombres de Grashof et de Prandtl. Ce produit est appelé le nombre de Rayleigh :

$$Ra = Pr Gr \dots (III.67)$$

III.6.3.1. Régime turbulent en convection naturelle

Comme pour la convection forcée, le régime turbulent est lié aux instabilités dans l'écoulement. Ces instabilités sont liées à la dimension caractéristique de l'écoulement.

En pratique, on utilise le nombre de Rayleigh : $Ra_x = Gr_x \cdot Pr$ pour déterminer le régime d'écoulement en convection naturelle.

Pour une plaque verticale (voir figure III.16) la valeur critique utilisée est $Ra_{x,c} = Gr_{x,c} \cdot Pr \approx 10^9$. L'écoulement est d'abord laminaire, puis devient turbulent à cette valeur critique de Ra_x .

III.6.3.2. Expressions du coefficient de convection h en convection naturelle

Les corrélations expérimentales les plus usuelles en convection naturelle sont généralement de la forme :

$$Nu = \frac{hL_c}{\lambda} = C(Gr_L Pr)^n = C Ra_L^n \dots (III.68)$$

Avec :

$$Ra_L = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu \alpha} \dots (III.69)$$

L'exposant n prend les valeurs :

- $n = 1/4$ en convection laminaire.
- $n = 1/3$ en convection turbulente.

Les propriétés du fluide en écoulement pour le nombre de Rayleigh sont déterminées pour la valeur moyenne de température

$$T_f = (T_\infty + T_s) / 2.$$

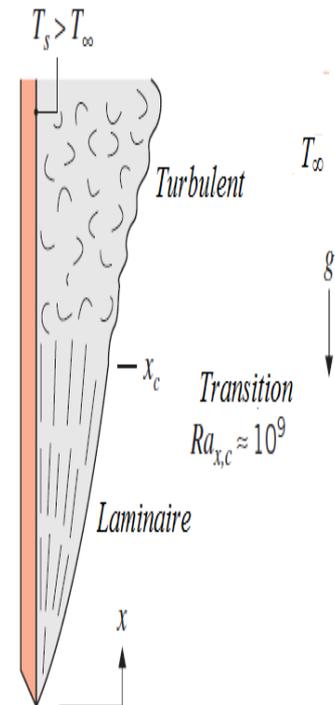
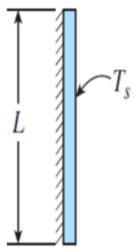
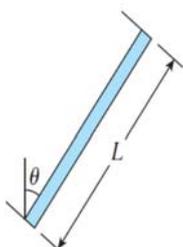
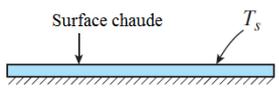
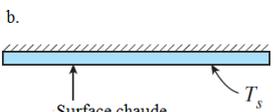
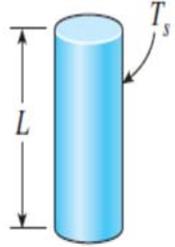
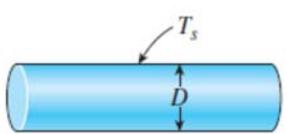
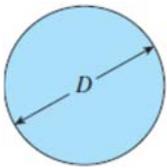


Fig. III.16 Développement de couche limite en convection naturelle sur une surface plane verticale

III.6.3.4. Corrélation empirique de nombre de Nusselt

Géométrie	Longueur caractéristique	Ra	Nu
Plaque verticale 	L	$10^4 - 10^9$	$Nu = 0.59 Ra_L^{1/4}$
		$10^{10} - 10^{13}$	$Nu = 0.1 Ra_L^{1/3}$
		Toute la gamme	$Nu = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$
Plaque inclinée 	L		Utiliser les équations de plaque verticale. Remplacer g par $(g \cdot \cos(\theta))$
Plaque horizontale a.  b. 	A_s/P	a. $10^4 - 10^7$	$Nu = 0.59 Ra_L^{1/4}$
		$10^7 - 10^{11}$	$Nu = 0.1 Ra_L^{1/3}$
		b. $10^5 - 10^{11}$	$Nu = 0.27 Ra_L^{1/4}$
Cylindre vertical 	L		Un cylindre vertical peut être traité comme une plaque verticale lorsque $D \geq \frac{35L}{Gr_L^{1/4}}$
Cylindre horizontal 	D	$Ra_D \leq 10^{12}$	$Nu = \left\{ 0.6 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{\left[1 + (0.559/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$
Sphère 	D	$Ra_D \leq 10^{11}$ $Pr \geq 0.7$	$Nu = 2 + \frac{0.589 Ra_D^{1/4}}{\left[1 + (0.469/Pr)^{9/16} \right]^{4/9}}$

Chapitre IV :

TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT

Plan du chapitre :

IV.1. Introduction

IV.2. Définitions et lois fondamentales

IV.3. Grandeurs énergétiques

IV.4. Définitions générales du rayonnement

IV.5. Lois du rayonnement thermique

IV.6. Echanges radiatifs

Objectifs :

- Le rayonnement thermique est un phénomène électromagnétique caractérisé par une fréquence et une longueur d'onde.
- Ce phénomène requiert des outils géométriques : l'angle solide. La loi de Planck décrit le rayonnement des corps noirs.
- Le rayonnement des corps réels se modélise à partir de celui des corps noirs.
- L'hypothèse des corps gris permet de simplifier l'étude du rayonnement des corps réels.
- Définir le flux de chaleur échangé par rayonnement entre plusieurs surfaces
- Utiliser le schéma aux radiosités pour décrire les transferts radiatifs entre surfaces grises

IV.1. Introduction

Nous abordons, avec ce chapitre, l'étude d'un mode de transfert d'énergie thermique qui, contrairement à la conduction ou à la convection, ne nécessite pas la présence d'un support matériel solide ou fluide.

Un exemple très caractéristique de ce mécanisme nous est fourni par le rayonnement solaire qui nous parvient après avoir parcouru une distance considérable dans le vide spatial. Egalement, si l'on ouvre par exemple devant nous la porte d'un four très chaud, nous percevons *instantanément*, même à une distance, une sensation de chaleur sur la peau. Ce phénomène ne saurait être attribué uniquement à un transfert convectif entre le four et notre corps, car on conçoit que les masses d'air ambiant échauffées au voisinage de l'ouverture du four mettent un certain temps à parcourir la distance nous séparant de celle-ci. Ce transfert fait donc intervenir également un autre mécanisme physique, qui est le *rayonnement électromagnétique*, dont la propagation est quasi instantanée, du moins à l'échelle des distances terrestre.

IV.2. Définitions et lois fondamentales

IV.2.1. Le rayonnement électromagnétique

Tous les corps, quel que soit leur état : solide, liquide ou gazeux, émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette émission d'énergie s'effectue au détriment de l'énergie interne du corps émetteur.

Le rayonnement se propage de manière rectiligne à la vitesse de la lumière, il est constitué de radiations de différentes longueurs d'onde comme l'a démontré l'expérience de William Herschel.

En passant à travers un prisme, les radiations sont plus ou moins déviées selon leur longueur d'onde. On envoie donc les radiations émises par une source à la température T_0 sur un prisme et on projette le faisceau dévié sur un écran absorbant (noirci), on obtient ainsi la décomposition du rayonnement total incident en un spectre de radiations monochromatiques.

Si l'on déplace le long de l'écran un thermomètre, on mesure la température T_e caractérisant l'énergie reçue par l'écran dans chaque longueur d'onde. En construisant la courbe $T_e = f(\lambda)$, on obtient la répartition spectrale de l'énergie rayonnée pour la température T_0 de la source. On constate alors que :

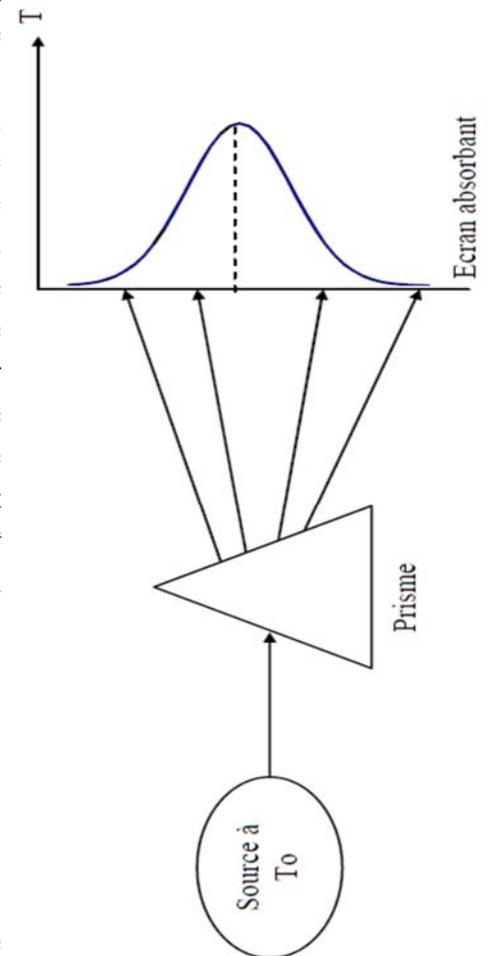


Fig. IV.1. Principe de l'expérience de William Herschel.

- ✓ L'énergie émise est maximale pour une certaine longueur d'onde λ_m variable avec T_0 .
- ✓ L'énergie n'est émise que sur un intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ de longueur d'onde caractérisant le rayonnement thermique.

On trouvera représentés sur la figure IV.2 les différents types d'ondes électromagnétiques et leurs longueurs d'ondes correspondantes. On retiendra que le rayonnement thermique émis par les corps se situe entre 0,1 et 100 μm . On notera par ailleurs que le rayonnement est perçu par l'homme :

- ✓ Par l'œil : pour $0,38 \mu\text{m} < l < 0,78 \mu\text{m}$ rayonnement visible.
- ✓ Par la peau : pour $0,78 \mu\text{m} < l < 314 \mu\text{m}$ rayonnement IR.

IV.2.2. Structure du rayonnement

Le rayonnement est un mode d'échange d'énergie par émission et absorption de radiations électromagnétiques. L'échange thermique par rayonnement se fait suivant le processus :

- **Emission** : Il y a conversion de l'énergie fournie à la source en énergie électromagnétique.
- **Transmission** : La transmission de cette énergie électromagnétique se fait par propagation des ondes avec éventuellement absorption par le milieu traverse.
- **Réception** : A la réception, il y a conversion du rayonnement électromagnétique incident en énergie thermique (absorption).

Le rayonnement trouve son origine lors d'une transition électronique entre deux états d'énergie d'une molécule ou d'un atome :

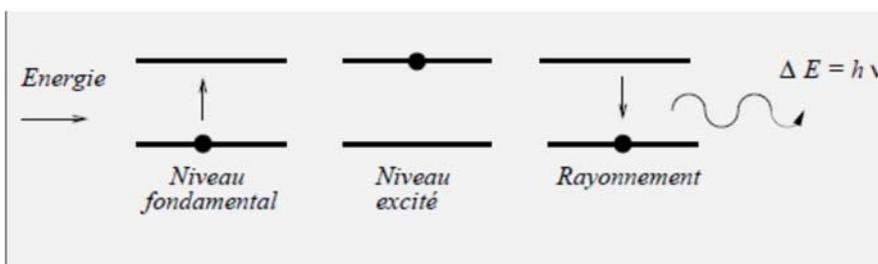


Fig. IV.3. Principe de l'émission d'un photon.

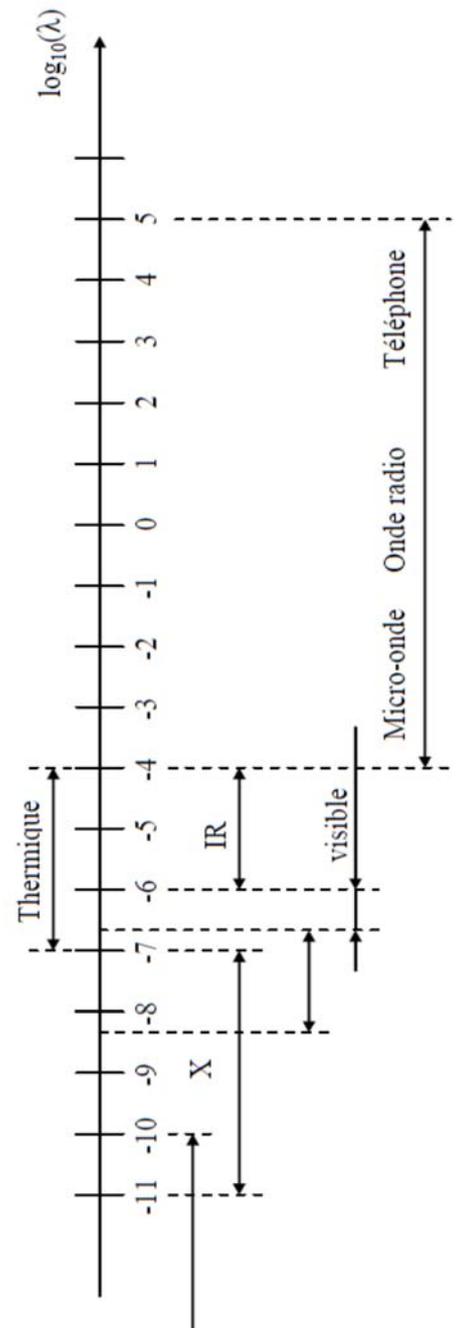


Fig. IV.2. Spectre des ondes électromagnétiques (λ en m).

IV.2.3. Loi de Planck

Le passage du niveau d'énergie E à un niveau d'énergie $E - \Delta E$ s'accompagne de l'émission d'un rayonnement de fréquence ν et d'énergie $h_0 \nu$ ou h_0 est la constante de Planck :

$$E = h_0 \nu \quad [J] \dots (IV.1)$$

Avec : $h_0 = 6.62 \times 10^{-34}$ J.s.

IV.2.4. Principe du chauffage par rayonnement

Lorsqu'un rayonnement arrive sur un corps opaque, celui-ci peut être :

- transmis,
- absorbé,
- réfléchi,

Dans des proportions variables selon la nature du corps.

IV.2.5. Classification des corps soumis à un rayonnement

Selon la nature du corps, et selon la longueur d'onde du rayonnement incident l'un de trois phénomènes : réflexion, transmission et absorption, peut être prépondérant.

Classification des corps soumis à un rayonnement.

✓ Corps transparents

Lorsqu'un rayonnement ne subit aucune atténuation lors de la traversée d'un milieu, on dit que le milieu est transparent pour ce rayonnement. C'est le cas du vide pour toutes les radiations, de certains gaz (N_2 , O_2 notamment) dans le visible et l'infrarouge.

✓ Corps opaques

La grande majorité des solides et des liquides sont dits « opaques », car ils arrêtent la propagation de tout rayonnement dès leur surface : ces corps se réchauffent par absorption du rayonnement.

✓ Corps semi-transparentes

Par contre certains corps sont partiellement transparents car l'onde électromagnétique peut se propager dans le milieu considéré.

La propagation s'accompagne d'une absorption électromagnétique qui accroît l'énergie du milieu traversé.

IV.2.6. Loi de conservation de l'énergie

Soit ϕ_i le flux incident, ϕ_r le flux réfléchi, ϕ_t le flux transmis et ϕ_a le flux absorbé, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\phi_i = \phi_r + \phi_a + \phi_t \dots \text{(IV.2)}$$

Coefficient d'absorption thermique

Posons :

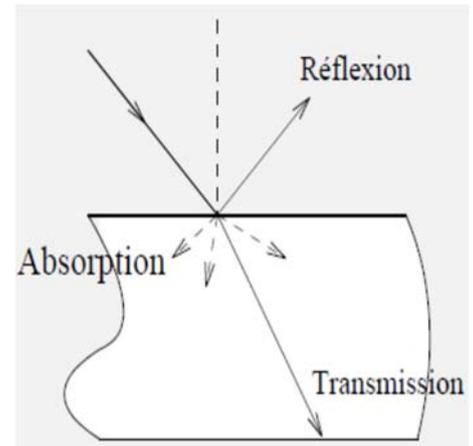


Fig. IV.4. Réflexion, transmission et absorption du rayonnement.

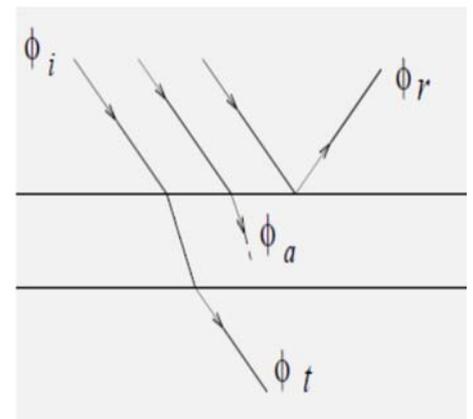


Fig. IV.5. Décomposition du flux incident.

$$\rho_0 = \frac{\phi_r}{\phi_i} \text{ Facteur de réflexion ;}$$

$$\alpha_0 = \frac{\phi_a}{\phi_i} \text{ Facteur d'absorption ;}$$

$$\tau_0 = \frac{\phi_t}{\phi_i} ; \text{ Facteur de transmission.}$$

La conservation de l'énergie s'écrit : $\rho_0 + \alpha_0 + \tau_0 = 1$. Ces paramètres caractérisent le comportement d'un corps vis à vis du rayonnement reçu. Le coefficient α_0 est important en thermique : il mesure la proportion de conversion du rayonnement électromagnétique incident en énergie thermique.

Remarque :

Le coefficient α_0 est faible pour les surfaces métalliques polies et non oxydées. Il augmente pour les corps qui apparaissent noirs mais reste toujours inférieur à l'unité.

IV.3. Grandeurs énergétiques

IV.3.1. Classification des grandeurs

Les grandeurs énergétiques caractérisant le rayonnement dépendent de :

- 1. La composition spectrale :** les grandeurs relatives à l'ensemble du spectre du rayonnement thermique sont appelées *totales*, ce qualificatif pouvant d'ailleurs être considéré comme implicite.

Les grandeurs relatives à un intervalle spectrale étroit $d\lambda$ centré autour d'une longueur d'onde λ sont dites *monochromatiques*. On les affecte d'un indice λ pour les distinguer des précédentes.

La densité spectrale G_λ de la grandeur G est définie par :

$$G_\lambda(\lambda) = \frac{dG(\lambda)}{d\lambda} \dots \text{(IV.3)}$$

- 2. La distribution spatiale :** les grandeurs sont dites *hémisphériques* lorsqu'elles concernent l'ensemble des directions de l'espace dans lesquelles un élément de surface peut rayonner ou recevoir du rayonnement. Le qualificatif *hémisphérique* est *facultatif* (de même que *total*).

Les grandeurs sont dites *directionnelles* lorsqu'elles caractérisent une direction donnée de propagation du rayonnement, relativement à la surface considérée.

IV.4. Définitions générales du rayonnement

IV.4. 1. Rappel sur le calcul des angles solides

L'angle solide, qui est une généralisation dans l'espace à trois dimensions de la notion d'angle plan, caractérise l'ensemble des directions issues d'un point et contenues dans une portion de l'espace. On le définit comme l'aire $d\omega$ de la surface interceptée, sur une sphère de rayon unité, par une surface conique dont le sommet est placé au centre de cette sphère. Sur une sphère concentrique de rayon R , compte tenu du rapport R^2 de similitude des surfaces, l'aire

découpée sera $ds = d\omega.R^2$, d'où : $d\omega = \frac{ds}{R^2}$

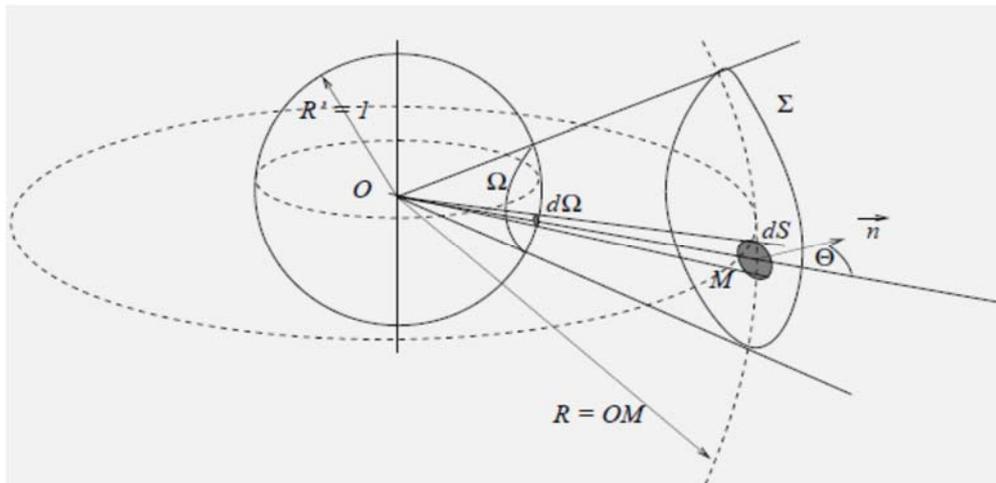


Fig. IV.6. Construction d'un angle solide $d\omega$.

Dans l'espace, l'unité d'angle solide est définie par la division de l'espace par trois plans orthogonaux deux à deux. L'espace est alors découpé en huit parties égales. Les plans se coupent suivant trois droites qui forment un trièdre trirectangle.

Par définition l'angle solide du trièdre trirectangle sera égal à $\pi/2$ fois l'unité d'angle solide appelée stéradian (sr).

Pour évaluer $d\omega$, construisons la sphère de centre O et de rayon $R = OM$. La projection de l'élément de surface dS sur la sphère de rayon R découpe une calotte sphérique dS' . L'angle solide est égal à la surface projetée à partir de la surface dS' , sur la sphère de rayon unité.

$$d\omega = \frac{dS'}{R^2} = \frac{dS \cdot \cos(\theta)}{R^2} \dots (IV.4)$$

IV.4.2. grandeurs relatives aux surfaces émettant un rayonnement

- 1. flux (total) d'une source : ϕ** , unité [W]. C'est la puissance émise par une source dans tout l'espace où elle peut rayonner.
- 2. Emittance : M** , unités [W /m²] considérons un élément de la surface émettrice ds émettant un flux élémentaire $d\phi$. L'émittance est le rapport du flux émis par l'élément de surface ds dans toutes les directions par l'élément de surface. Par définition :

$$M = \frac{d\phi}{ds} \dots (IV.5)$$

Remarque : L'émittance énergétique totale est une grandeur qui permet de comparer les densités de puissance émises par des sources d'étendues différentes.

- 3. Intensité : I** , unités [W/sr]. On considère une direction Ox issue de la surface d'un corps radiant. Cette direction est repérée par son angle θ avec la normale locale n à la surface. Si $d\phi_{Ox}$ est la portion du flux rayonné dans un angle solide élémentaire $d\omega$ entourant la direction Ox , on désigne sous le nom d'intensité I_{Ox} de la source, dans la direction Ox le flux par unité d'angle solide dans cette direction :

$$I = \frac{d\phi_{Ox}}{d\omega} \dots (IV.6)$$

- 4. Luminance : L_{Ox}** , unités [W/m²sr]. Considérons à nouveau un élément de surface ds et soit la direction Ox définie par l'angle θ par rapport à la normale de la surface ds .

Soit $d^2\phi$ la fraction de flux contenue dans le cône élémentaire d'angle solide $d\omega$ et de direction Ox . Le flux émis dans la direction Ox , semble provenir d'un élément de surface ds perpendiculaire à la direction Ox . Par définition, on appelle luminance le flux rayonné par unité d'angle solide et par unité de surface perpendiculaire à Ox .

$$L_{Ox} = \frac{d^2\phi_{Ox}}{ds_n d\omega} = \frac{d^2\phi_{Ox}}{ds \cos(\theta) d\omega} \dots (IV.7)$$

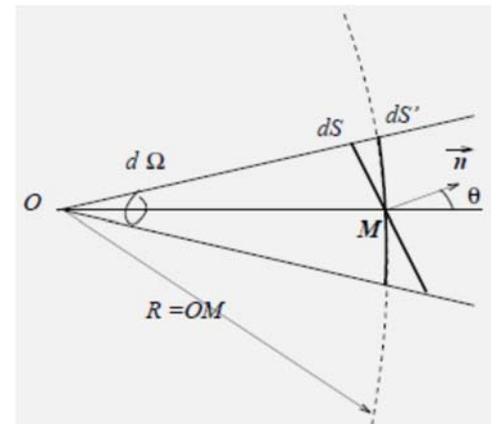


Fig. IV.7. Projection d'une surface quelconque sur une sphère de rayon R.

5. Loi de Lambert

Les sources dont la luminance est indépendante de la direction sont dites obéir à la loi de Lambert, ou encore sources à émission isotrope ou diffuse.

Dans le cas : $L_{Ox} = L$, indépendante de la direction Ox .

$$\text{Donc } L = \frac{I_{Ox}}{dS \cos(\theta)} = \frac{I_{On}}{dS} \text{ (dans la direction } On \text{ normale à } dS).$$

On déduit que :

$$I_{Ox} = I_{On} \cos(\theta) \dots \text{ (IV.8)}$$

Énoncé de la loi de Lambert : La quantité d'énergie émise à partir d'un élément de surface dans une direction déterminée est proportionnelle au cosinus que fait cette direction avec la normale à la surface. La loi de Lambert est également appelée "loi du cosinus".

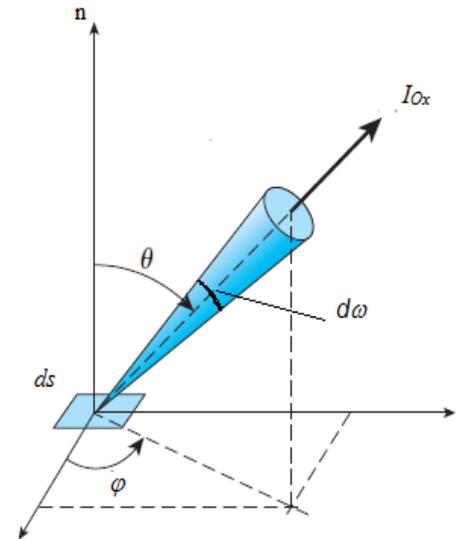


Fig. IV.7. Définition de l'intensité.

6. Flux, intensité, émittance et luminance monochromatiques

Toutes les grandeurs introduites à propos du rayonnement total (c.-à-d. concernant l'ensemble des longueurs d'onde rayonnées par une source) peuvent être également rapportées aux échanges confinés dans un domaine spectral étroit, de longueur $d\lambda$, centré sur une longueur d'onde λ .

On définit ainsi :

- Le flux monochromatique ϕ_λ , (W/m^2),
- L'émittance monochromatique M_λ , (W/m^3),
- L'intensité monochromatique I_{Ox} , ($W/(Sr.m)$),
- La luminance monochromatique L_{Ox} , ($W/m^3.Sr$).

Chaque grandeur monochromatique G_λ étant liée à la grandeur totale correspondante G par une relation du type :

$$G_\lambda = \left(\frac{dG}{d\lambda} \right)_\lambda \text{ ou } G = \int_0^\infty G_\lambda d\lambda$$

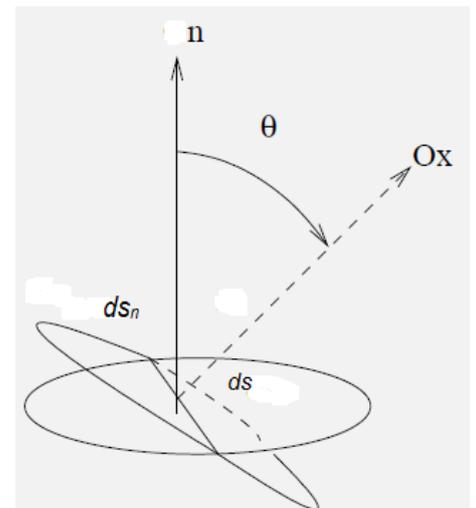


Fig. IV.8. Surface de luminance.

IV.4.3. grandeurs relatives aux surfaces recevant un rayonnement

1. Eclairement

On désigne ainsi le flux reçu par l'unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions d'où elle peut recevoir du rayonnement. Si dS est l'aire de la surface recevant un flux $d\phi$,

on a :

$$E = \frac{d\phi}{dS} \dots \text{ (IV.9)}$$

IV.5. Lois du rayonnement thermique

IV.5.1. Corps noir

Le rayonnement émis par un corps dépend de sa nature. L'émetteur idéal est le corps qui, pour une température donnée, émet le maximum d'énergie. Ce corps s'appelle le *corps noir*.

Pour le corps noir, le facteur d'absorption est donc égal à l'unité pour toutes les directions et pour toutes les longueurs d'onde.

Ce corps absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit sans en réfléchir ni transmettre une quelconque fraction. C'est le corps de référence.

$$\rho_\lambda = \tau_\lambda = 0, \alpha_\lambda = 1.$$

Dans tout ce qui suit, les grandeurs relatives au corps noir seront affectées d'un indice supérieur "°".

IV.5.2. Loi de Planck

Cette loi définit l'émission monochromatique du corps noir en fonction de la longueur d'onde et à sa température absolue T.

$$M_\lambda^\circ = \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]} \dots (IV.10)$$

$$\text{Ou } C_1 = 2\pi h c_0^2 = 3.74177 \times 10^8 \text{ W} \cdot \mu\text{m}^4 / \text{m}^2,$$

$$c_0 = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$C_2 = hc_0/k = 1.4388 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}, k = 1.3805 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

La figure IV.9 donne une représentation de la loi de Planck. A chaque température T correspond une courbe ayant un maximum situé à une valeur λ_m de la longueur d'onde variable avec T. ces courbes présentent une dissymétrie très prononcée : leur croissance avec λ (courte longueurs d'onde) est beaucoup plus rapide que leur décroissance. Pour $\lambda \leq 0.5\lambda_m$ il n'y a pratiquement plus d'énergie rayonnée (moins de 1%) alors qu'il faut atteindre $\lambda \geq 4.5\lambda_m$ pour obtenir le même résultat dans l'infra-rouge.

L'expression de la loi de Planck admet des approximations simplificatrices. En particulier, pour les courtes longueurs d'onde ($\lambda < 5 \mu\text{m}$: visible et proche infra-rouge) la formule de Planck peut être approchée par l'expression :

$$M_\lambda^\circ = C_1 \lambda^{-5} \exp(-C_2/\lambda T) \dots (IV.11)$$

Dite **formule de Wien**. Domaine de validité de cette approximation : $\lambda T \ll 14000 \mu\text{m} \cdot \text{K}$.

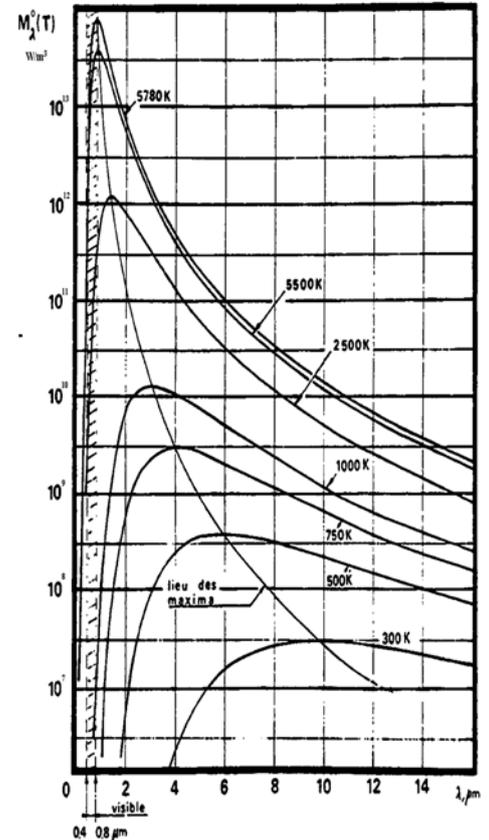


Fig. IV.9. Distribution spectrale de l'émission du corps noir en fonction de la température absolue.

Il y a deux lois de Wien :

1^{ère} loi « loi de déplacement » de Wien : $\lambda_m T = 2898 \mu m.K$.

2^{ème} loi s'exprime sous la forme : $M_{\lambda m}^o = B T^5$, avec $B = 1.287 \times 10^{-11}$

$W/m^2.\mu m.K^5$

IV.5.3. Loi de Stefan-Boltzmann

La luminance totale est obtenue par intégration à toutes les longueurs d'onde de la luminance monochromatique, soit

$$L^0 = \int_0^{\infty} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp(C_2/\lambda T) - 1} d\lambda = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \text{ l'émittance totale étant égale à}$$

$$M^0 = \sigma T^4$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,67 \times 10^{-8} W/m^2.K^4 \text{ est la constante de Stefan-}$$

Boltzmann.

IV.5.4. fraction de l'émittance totale contenue dans un intervalle spectrale donné

On a souvent besoin d'évaluer, à une température donnée, la quantité :

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda}^0 d\lambda}{\int_0^{+\infty} M_{\lambda}^0 d\lambda} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda}^0 d\lambda \dots (IV.12)$$

Que l'on peut également écrire :

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{\sigma T^4} \left(\int_0^{\lambda_2} M_{\lambda}^0 d\lambda - \int_0^{\lambda_1} M_{\lambda}^0 d\lambda \right) = F_{0-\lambda_2} - F_{0-\lambda_1} \dots (IV.13)$$

Avec

$$F_{0-\lambda} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda} M_{\lambda}^0 d\lambda = \frac{1}{\sigma T^5} \int_0^{\lambda T} M_{\lambda}^0 d(\lambda T) \dots (IV.14)$$

Les résultats de cette intégrale sont tabulés pour différentes valeurs de λT .

Tab IV.1. Quelques valeurs tabulées de la fonction $F_{0 \rightarrow \lambda}$

$\lambda T \times 10^5$ ($\mu\text{m} \cdot \text{K}$)	$F_{0 \rightarrow \lambda}$	$\lambda T \times 10^5$ ($\mu\text{m} \cdot \text{K}$)	$F_{0 \rightarrow \lambda}$	$\lambda T \times 10^5$ ($\mu\text{m} \cdot \text{K}$)	$F_{0 \rightarrow \lambda}$	$\lambda T \times 10^5$ ($\mu\text{m} \cdot \text{K}$)	$F_{0 \rightarrow \lambda}$
0,001	0	0,0339	0,36	0,1389	0,9616	0,569	0,9988
0,0095	0,0002	0,0391	0,4634	0,16	0,9733	0,6551	0,999
0,011	0,0009	0,045	0,5637	0,1842	0,9815	0,7543	0,9992
0,0126	0,0034	0,0518	0,6551	0,2121	0,9872	0,8685	0,9993
0,0146	0,0104	0,0596	0,7342	0,2442	0,9911	1	0,9994
0,0168	0,0263	0,0687	0,7997	0,2812	0,9939		
0,0193	0,0563	0,0791	0,852	0,3237	0,9957		
0,0222	0,1051	0,091	0,8924	0,3728	0,997		
0,0256	0,1741	0,1048	0,9228	0,4292	0,9978		
0,0295	0,261	0,1207	0,9453	0,4942	0,9984		

IV.6. Emission des corps réels

Les lois physiques que nous venons d'étudier fournissent les émittances totales M^0 ou spectrales M^0_λ du corps noir. Ce sont des grandeurs hémisphériques, car un corps noir ne privilégie aucune direction de propagation.

Peu de surfaces réelles émettent comme des corps noirs. Puisque le corps noir présente un maximum et que les relations énergie - température qui le caractérise sont simples, il est utile de l'employer comme référence. Les propriétés d'une surface réelle sont donc toujours comparées à celle du corps noir dans la même situation. Malheureusement, la distribution spectrale de Planck peut ne pas être valide pour des corps non-noir de même pour la distribution directionnelle (non-diffuse).

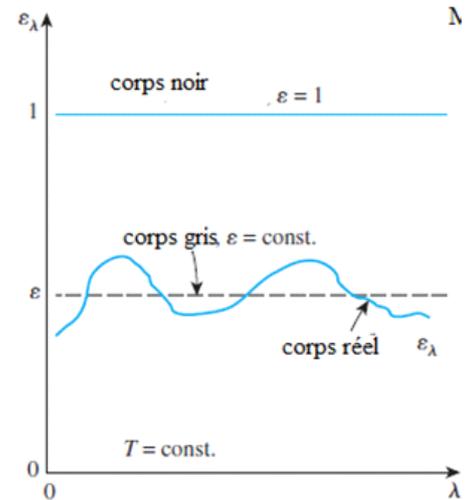
L'évaluation des propriétés émissives des substances réelles se fait par rapport à celles d'un corps noir placé dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde, à l'aide de coefficients appelés émissivité, totales ou spectrale, hémisphérique ou directionnelles. Ainsi, les émittances totale et spectrale d'une surface réelle déterminée, seront fournies par des relations du type :

$$M = \varepsilon M^0 \text{ et } M_\lambda = \varepsilon_\lambda M^0_\lambda$$

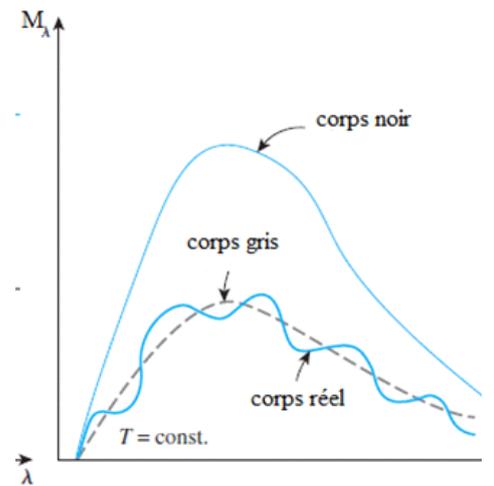
Les relations dans lesquelles ε est l'émissivité hémisphérique du corps, et ε_λ son émissivité spectrale à la longueur d'onde λ . Quant aux luminances L et L_λ du corps, elles seront liées à celles du corps noir par les relations

$$L_n = \varepsilon_n L^0 = \varepsilon_n \frac{M^0}{\pi} \text{ et } L_{n,\lambda} = \varepsilon_{n,\lambda} L^0_\lambda = \varepsilon_{n,\lambda} \frac{M^0_\lambda}{\pi}$$

Dans lesquelles ε_n est l'émissivité directionnelle totale du corps, et $\varepsilon_{n,\lambda}$ son émissivité directionnelle spectrale.



(a)



(b)

Fig. IV.10. Rayonnement des corps réels.

L'émissivité des substances naturelles dépend, d'une manière générale, de leur nature physico-chimique (oxydation, graisse, peinture), de leur état de surface géométrique (défauts de planéité, rugosité), et varie avec la longueur d'onde, la direction d'émission et la température de surface.

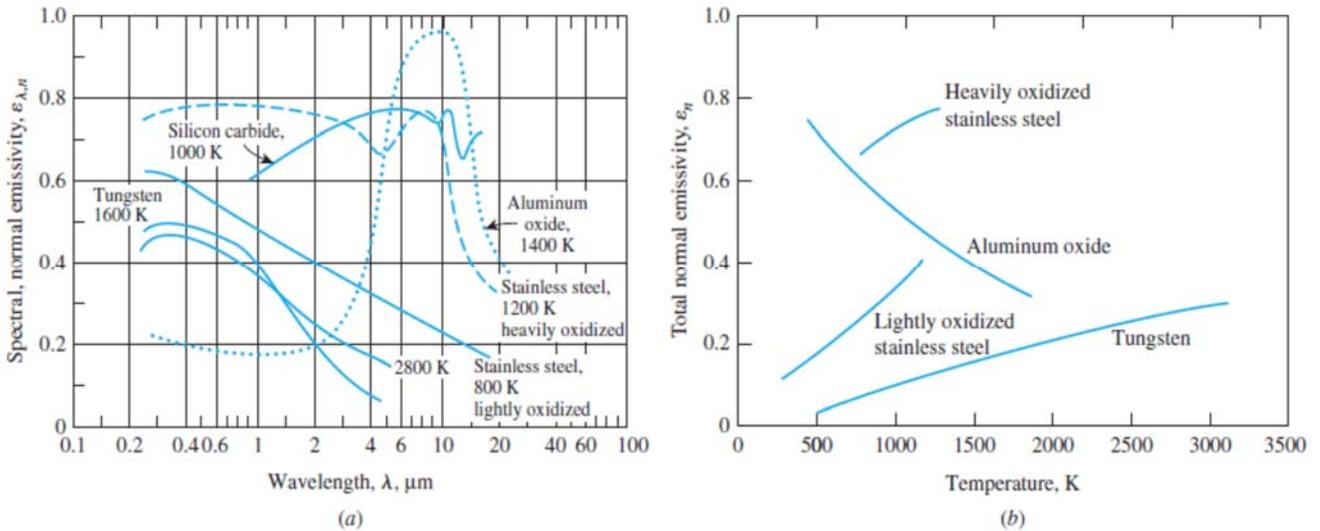


Fig. IV.11. Variation de l'émissivité normale totale avec :
(a) longueur d'onde, (b) température.

IV.6.1. Notion de corps gris

Un corps gris est un objet théorique qui n'absorberait qu'une fraction du rayonnement électromagnétique qu'il reçoit, indépendamment du spectre de ce rayonnement incident. Cette fraction absorbée est nommée absorptivité α . Dans le cas des corps gris l'absorptivité est indépendante de la longueur d'onde.

Un corps gris éclairé par de la lumière blanche refléterait de la même manière les différentes longueurs d'onde qui constituent la lumière blanche. Il ne prendrait donc pas de couleur. Un corps gris dont l'absorptivité serait proche de 1 se comporterait quasiment comme un corps noir. Un corps gris dont l'absorptivité est proche de 0 est parfois qualifié de « corps blanc ».

IV.6.2. loi de Kirchhoff

On considère un petit corps de surface A_s , d'une émissivité ϵ et d'une absorptivité α à la température T placé dans une grande enceinte fermée et parfaitement isolée de l'extérieur. Les parois de l'enceinte se comportent comme celles de corps noir.

Le rayonnement absorbé par le petit corps par unité de surface est :

$$\phi_a = \alpha \sigma T^4 \dots \text{(IV.15)}$$

Le rayonnement émis par le petit corps est : $\phi_e = \epsilon \sigma T^4$

A l'équilibre thermique, tout le système est à une température uniforme.

$$A_s \varepsilon \sigma T^4 = A_s \alpha \sigma T^4 \dots (IV.16)$$

D'où : $\varepsilon(T) = \alpha(T)$, pour les corps gris.

En d'autres termes, l'émissivité hémisphérique totale d'une surface à la température T est égale à son pouvoir absorbant hémisphérique total pour le rayonnement provenant d'un corps noir à la même température. Cette relation, qui simplifie grandement l'analyse par rayonnement, a été développée par Gustav Kirchhoff en 1860 et est maintenant appelée loi de Kirchhoff.

IV.6.3. Radiosité totale et spectrale

Le flux issu d'une surface grise résulte pour une part de l'émission propre de la surface et pour une autre part de la fraction de l'éclairement qu'elle réfléchit. L'émittance apparente d'une surface réelle, que l'on nomme radiosité, représente la somme de son émittance M et de l'éclairement réfléchi par l'unité de surface ρE .

La radiosité spectrale J_λ (W/m². μ m) est le taux auquel l'énergie radiante quitte à la longueur d'onde λ dans toutes les directions par unité de longueur d'onde $d\lambda$ autour de λ .

$$J_\lambda = M_\lambda + E_{\lambda,ref} \dots (IV.17)$$

On désigne ainsi la radiosité totale par :

$$J_\lambda = M_\lambda + E_{\lambda,ref} \dots (IV.18)$$

IV.7. Echanges radiatifs dans un milieu parfaitement transparent

IV.7.1. Echanges radiatifs entre corps noirs

Considérons deux surfaces noires S₁ et S₂, maintenues à des températures uniformes T₁ et T₂, et pouvant rayonner mutuellement l'une vers l'autre (figure IV.14).

Le flux total émis par S₁ est $\phi_1 = M_1^0 S_1$, dont seule une fraction ϕ_{12} atteint S₂. Posons :

$$\phi_{12} = F_{12} \phi_1 = M_1^0 S_1 F_{12} \dots (IV.19)$$

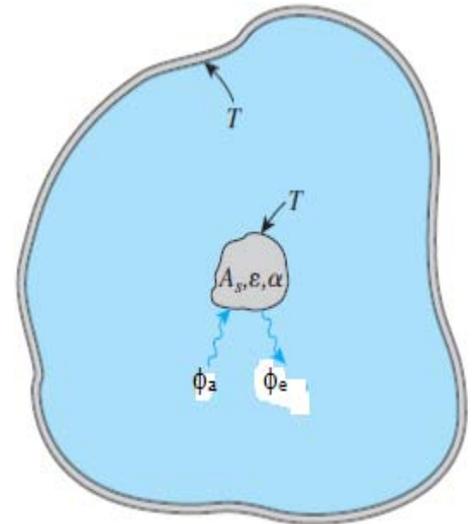


Fig. IV.12. Petit corps placé dans une enceinte en équilibre radiatif.

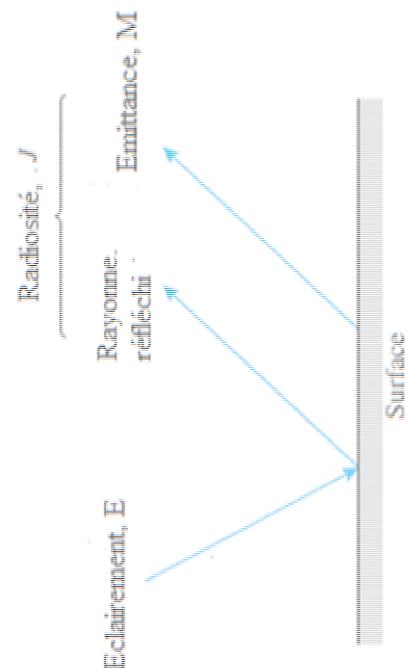


Fig. IV.13. Radiosité des corps gris.

F_{12} est un nombre sans dimension représentant la fraction du flux total de la surface S_1 qui atteint S_2 . F_{12} est appelé facteur de forme de S_1 vers S_2 .

IV.7.2. Facteur de forme

Le facteur de forme F_{12} est défini comme la fraction de la radiation quittant (flux total rayonné) une surface S_1 qui est interceptée par une surface S_2

Considérons deux éléments différentiels de la surface dS_1 et dS_2 arbitrairement orientés l'un par rapport à l'autre. Ces éléments peuvent être liés l'un à l'autre par une droite r qui forme les angles

θ_1 et θ_2 par rapport aux normales. Alors $d\Omega_{12} = \frac{\cos\theta_2 dS_2}{r^2}$

Le flux émis par l'élément de surface de surface dS_1 et intercepté par l'élément de surface dS_2 a pour expression :

$$d^2\phi_{12} = L_1^0 \cos\theta_1 dS_1 d\Omega_{12} = L_1^0 \cos\theta_1 dS_1 \frac{\cos\theta_2 dS_2}{r^2} \text{ et } L_1^0 = \frac{M_1^0}{\pi} \text{ (loi$$

de Lambert)

Supposant que la surface S_1 émet et réfléchit de façon diffuse, le flux de transfert total quittant la surface S_1 et reçu par la surface S_2 est :

$$\phi_{12} = \iint_{S_1} d^2\phi_{12} = M_1^0 \iint_{S_1} \frac{\cos\theta_1 dS_1 \cos\theta_2 dS_2}{\pi r^2} = M_1^0 S_1 \frac{1}{S_1} \iint_{S_1} \frac{\cos\theta_1 dS_1}{S_1} \iint_{S_2} \cos\theta_2 dS_2$$

Faisant ainsi apparaître le facteur de forme F_{12} :

$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \iint_{S_1} \frac{\cos\theta_1 dS_1 \cos\theta_2 dS_2}{\pi r^2} \dots \text{ (IV.20)}$$

Finalement :

$$\phi_{12} = M_1^0 S_1 F_{12} = \phi_1 F_{12} \dots \text{ (IV.21)}$$

On remarque que F_{12} est une quantité purement géométrique. Le flux émis simultanément par S_2 et atteignant S_1 s'écrira, de manière similaire :

$$\phi_{21} = M_2^0 S_2 F_{21} = \phi_2 F_{21} \dots \text{ (IV.22)}$$

Tel que : F_{21} est la fraction du flux de S_2 qui atteint S_1 .

D'après les expressions précédentes, on a :

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21} = \iint_{S_1, S_2} \frac{\cos\theta_1 dS_1 \cos\theta_2 dS_2}{\pi r^2} \dots \text{ (IV.23),}$$

relation de réciprocité.

Ainsi $\phi_{12} = M_1^0 S_1 F_{12}$ ou $M_1^0 S_2 F_{21}$

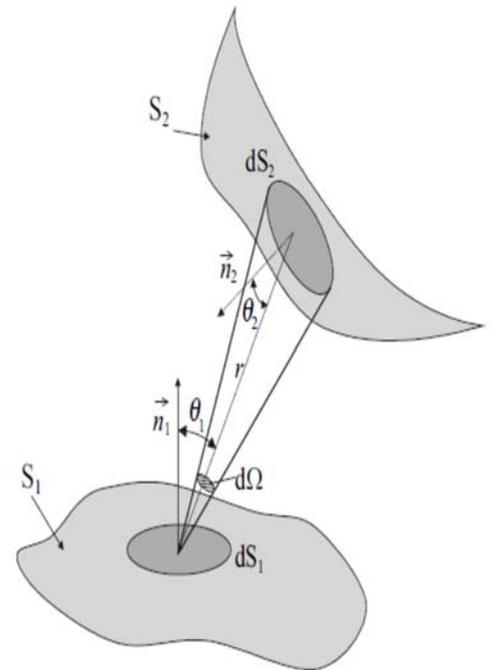


Fig. IV.14. Transfert de chaleur par rayonnement entre deux surfaces.

et $\phi_{21} = M_2^0 S_2 F_{21}$ ou $M_2^0 S_1 F_{12}$

On a donc le choix, pour le calcul des flux ϕ_{12} et ϕ_{21} , entre évaluer F_{12} et F_{21} . On choisit bien entendu celle de ces deux grandeurs qui est la plus simple à calculer.

IV.7.3. puissance nette échangé par rayonnement entre S_1 et S_2

Les deux surfaces étant noires, tout flux reçu par l'une ou l'autre est entièrement absorbé (il n'y a pas de réflexion ni transmission).

On obtient un flux net échangé entre S_1 et S_2 , noté ϕ_{12net} en faisant, sur S_1 , un bilan entre la puissance émise par S_1 vers S_2 (perte d'énergie thermique pour S_1) et la puissance absorbée par S_1 en provenance de S_2 (gain d'énergie thermique pour S_1) :

$$\phi_{12net} = \phi_{12} - \phi_{21} = M_1^0 S_1 F_{12} - M_2^0 S_2 F_{21} \dots (IV.24)$$

Soit, compte tenu de la relation de réciprocité :

$$\phi_{12net} = S_1 F_{12} (M_1^0 - M_2^0) = S_2 F_{21} (M_1^0 - M_2^0) \dots (IV.25)$$

Ou encore :

$$\phi_{12net} = S_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = S_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \dots (IV.26)$$

Si $T_1 > T_2$ le flux net échangé de S_1 à S_2 est positif. Cela signifie que S_1 émet davantage de rayonnement vers S_2 qu'elle n'en absorbe en provenance de cette dernière. Avec cette convention, qui est celle adoptée dans la plupart des ouvrages sur le rayonnement thermique, on compte positivement les pertes d'énergie d'une surface par rayonnement.



Fig. IV.15. Rayonnement dans une cavité fermée

IV.7.4. Relations algébriques entre facteurs de forme

D'après la relation de réciprocité, pour deux surfaces S_i et S_j :

$$S_i F_{ij} = S_j F_{ji} \dots (IV.27)$$

Il existe également une relation d'addition :

On considère une enceinte fermée constituée de surfaces noires individuellement isothermes, au nombre de n . pour la $i^{\text{ème}}$ surface S_i , on peut définir n facteurs de forme $F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{ii}, F_{ij}, \dots, F_{in}$.

Le flux total ϕ_i émis par S_i est absorbé par toutes les surfaces constituant l'enceinte, y compris S_i si elle est concave, donc

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} = \sum_{j=1}^n \phi_i F_{ij} = \phi_i \sum_{j=1}^n F_{ij} \dots \text{(IV.28)}$$

Il s'ensuit que l'on doit avoir :

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1 \dots \text{(IV.29)}$$

IV.7.5. Méthodes d'évaluation des facteurs de forme

L'évaluation d'un facteur de forme se ramène, dans le cas général, au calcul d'une intégrale de surface, ce qui ne présente pas de difficulté majeure, surtout si l'on procède numériquement, mais peut être long. Heureusement dans la pratique il n'est jamais nécessaire de calculer directement tous les facteurs de forme d'un système radiatif. En effet, il est souvent possible, à condition d'avoir présente à l'esprit la signification physique de ces facteurs, de trouver immédiatement certains eux, à partir de considérations simples de géométrie. D'autre part il existe des ouvrages fournissant des abaques, ou des tables des facteurs de forme d'un très grand nombre de configurations courantes, dans lesquelles on a des chances de trouver au moins quelque-uns des facteurs de forme du système étudié. On déduira alors les autres par application des relations algébriques entre facteurs de forme.

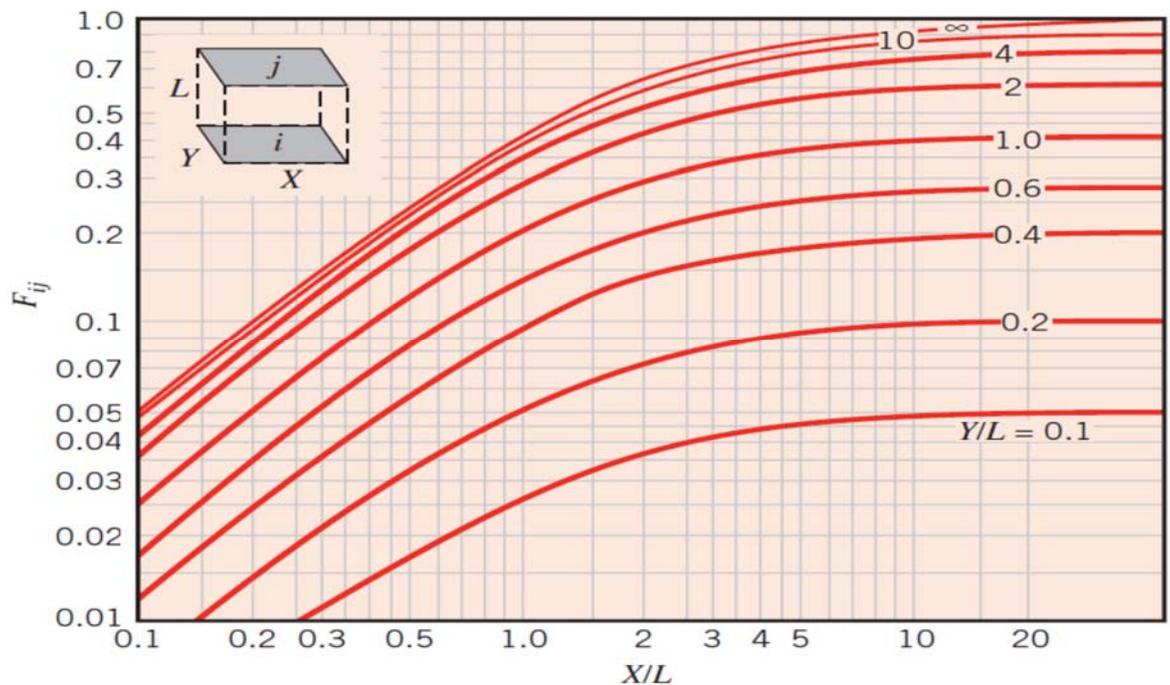


Fig. IV.16. Facteur de forme entre deux rectangles parallèles identiques.

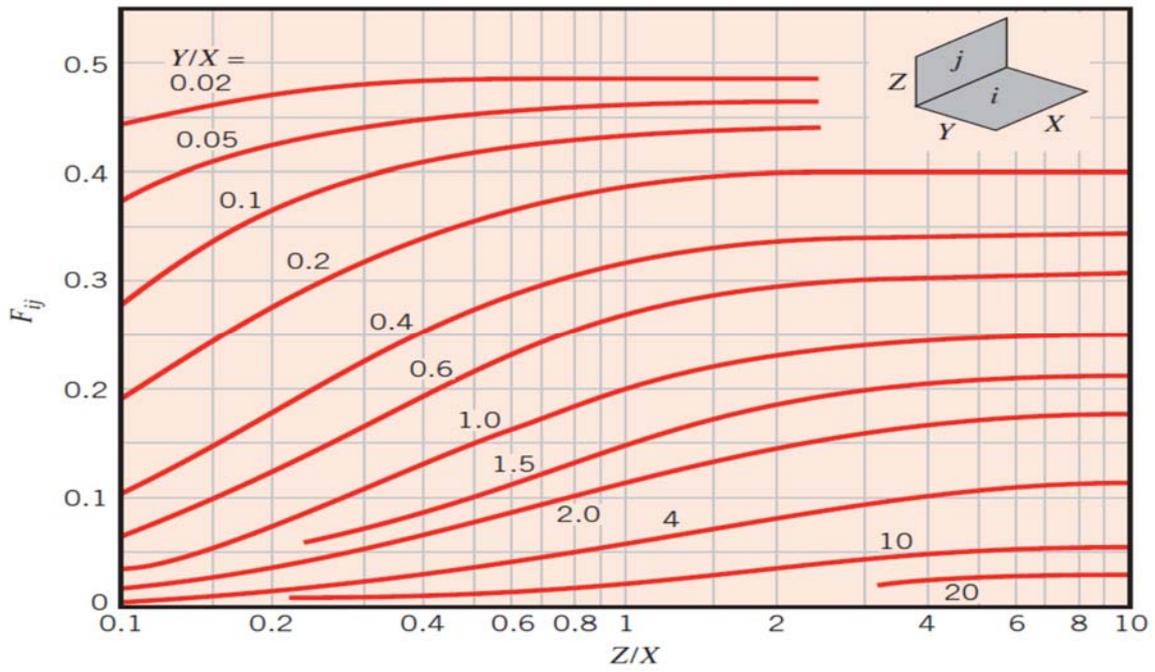


Fig. IV.17. Facteur de forme entre deux rectangles perpendiculaires.

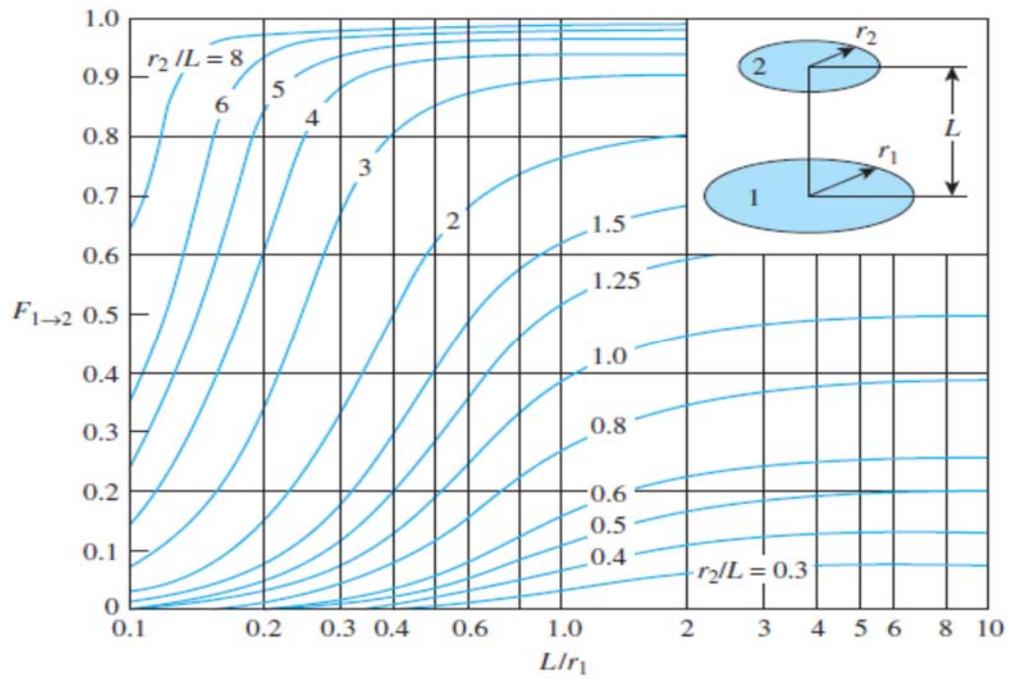


Fig. IV.18. Facteur de forme entre deux disques parallèles.

IV.7.6. Représentation des échanges radiatifs entre surfaces noires par analogie électrique

La relation exprimant le flux net échangé entre deux surfaces noires S1 et S2

$$\phi_{12net} = S_1 F_{12} (M_1^0 - M_2^0) \dots (IV.30)$$

Peut-être rapprochée de la relation $I_{12} = \frac{1}{R_{12}} (V_1 - V_2)$, fournissant le

courant I12 qui s'établit dans un réseau électrique entre deux nœuds de potentiels V1 et V2, séparés par une résistance R12.

On peut donc représenter l'échange radiatif entre deux surfaces noires à l'aide du schéma électrique analogique de la figure IV.19.

On a : $\phi_{12net} = S_1 F_{12} (M_1^0 - M_2^0)$ alors $\phi_{12net} = \frac{(M_1^0 - M_2^0)}{\frac{1}{S_1 F_{12}}}$, avec

$$R_{12} = \frac{1}{S_1 F_{12}} \dots (IV.31)$$

R12 est la résistance thermique géométrique.

IV.7.7. Echanges radiatifs entre deux surfaces opaques grises diffusantes

Ce type de surface, outre le flux radiatif émis, réfléchit une partie du flux radiatif incident (qu'elle reçoit). On introduit une nouvelle grandeur J, appelée radiosité, constituée du flux émis et du flux réfléchi c'est à dire du flux qui " quitte la surface ".

$$J = \varepsilon M^0 + \rho E \dots (IV.32)$$

où E est l'éclairement.

L'émissivité ε est relative au rayonnement émis alors que le coefficient de réflexion ρ dépend du rayonnement incident. L'introduction de la grandeur radiosité prend tout son intérêt pour des surfaces grises où ses coefficients ont des valeurs " indépendantes " de la nature des rayonnements émis et incident. Ainsi, on peut écrire $\alpha + \rho + \tau = 1$ implique $\rho = 1 - \alpha = 1 - \varepsilon$ pour des surfaces opaques $\tau = 0$, soit $\sigma = 5,72 \times 10^8 \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-4}$.

Le flux radiatif net perdu par une surface S est égal à la différence entre celui émis et celui absorbé.

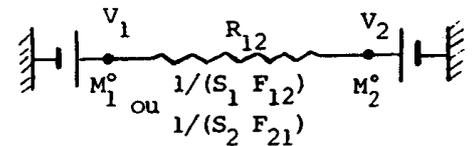


Fig. IV.19. Analogie électrique d'enceinte noire.

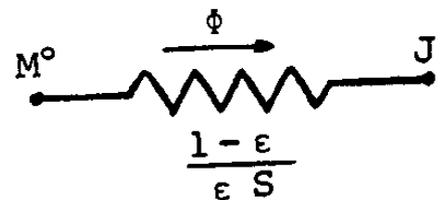


Fig. IV.20. Résistance thermique d'un corps gris.

$\phi_{net} = S(\epsilon M^0 - \alpha E)$, comme $\alpha = \epsilon$ (surface grise), on obtient :

$$\phi_{net} = \epsilon S(M^0 - E).$$

Éliminons E de cette relation en le remplaçant par son expression (IV.22), on obtient :

$$\phi_{net} = \frac{\epsilon S}{1 - \epsilon} (M^0 - J) \dots (IV.33)$$

IV.7.8. Utilisation de l'analogie électrique pour des surfaces grises

L'expression du flux net rayonné par une surface grise (eq. IV.33), peut être interprétée, en terme d'analogie électrique, à l'aide d'un circuit dans lequel une résistance $\frac{1 - \epsilon}{\epsilon S}$, soumise à une différence de

potentiel $(M^0 - J)$, est traversée par un courant égal à ϕ_{net}

Dans le cas général, pour des échanges entre plusieurs surfaces, le flux total quittant la surface S_i est égale à $S_i J_i$, celui atteignant S_j est égale à $F_{ij} S_i J_i$. De même, celui quittant S_j et atteignant S_i est égale à $F_{ji} S_j J_j$. Le flux échangé est donc :

$$\phi_{ij net} = S_i F_{ij} (J_i - J_j) = S_j F_{ji} (J_i - J_j) \dots (IV.34)$$

Pour un petit nombre de surfaces (2, 3 avec conditions particulières de type surface adiabatique ou surface noire ou surface de grande étendue), l'utilisation de l'analogie électrique est rapide et préférable à celle de la résolution du système d'équations linéaires. Ainsi pour deux surfaces (figure IV.21), on obtient :

$$\phi_{12 net} = \frac{M_1^0 - M_2^0}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{12}} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 S_2}} \dots (IV.35)$$

où $S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$

Dans une enceinte fermée composée de n surfaces, le principe de conservation de l'énergie nécessite que le flux net perdu par la surface i soit égal à la somme des flux net de la surface i vers toutes les n surfaces :

$$\phi_{i net} = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} = \sum_{j=1}^n S_i F_{ij} (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^n \frac{(J_i - J_j)}{R_{ij}} \dots (IV.36)$$

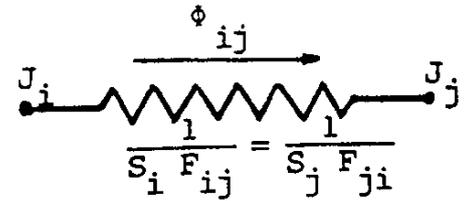


Fig. IV.20. Flux net entre surfaces grises.

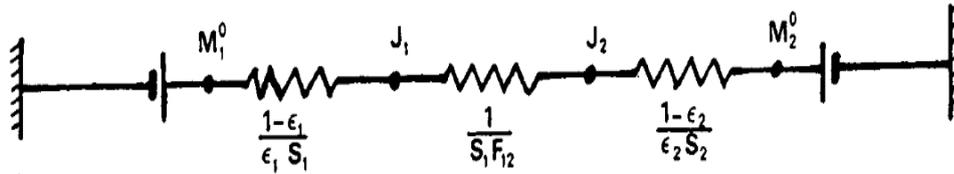
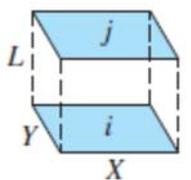
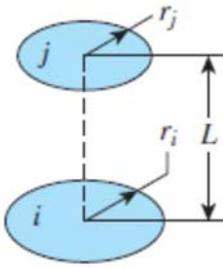
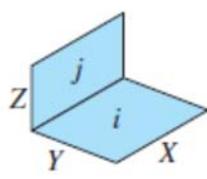
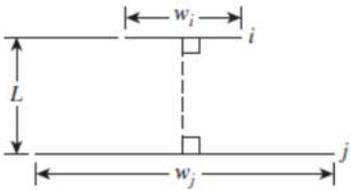
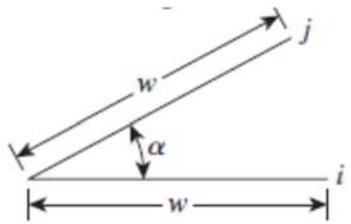
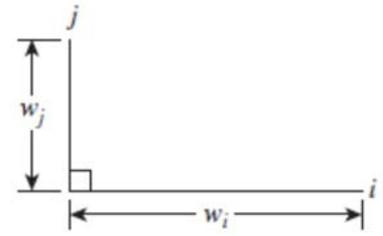
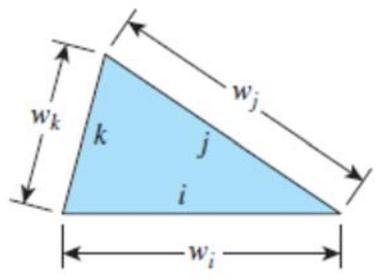


Fig. IV.21. Échange radiatif entre deux surfaces grises.

Tab IV.2. Expression de facteur de forme de quelques géométries.

<p>Rectangles parallèles alignés</p> 	$\bar{X} = X/L \text{ and } \bar{Y} = Y/L$ $F_{i \rightarrow j} = \frac{2}{\pi \bar{X} \bar{Y}} \left\{ \ln \left[\frac{(1 + \bar{X}^2)(1 + \bar{Y}^2)}{1 + \bar{X}^2 + \bar{Y}^2} \right]^{1/2} + \bar{X}(1 + \bar{Y}^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{\bar{X}}{(1 + \bar{Y}^2)^{1/2}} \right.$ $\left. + \bar{Y}(1 + \bar{X}^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{\bar{Y}}{(1 + \bar{X}^2)^{1/2}} - \bar{X} \tan^{-1} \bar{X} - \bar{Y} \tan^{-1} \bar{Y} \right\}$
<p>Disques parallèles coaxiaux</p> 	$R_i = r_i/L \text{ and } R_j = r_j/L$ $S = 1 + \frac{1 + R_j^2}{R_i^2}$ $F_{i \rightarrow j} = \frac{1}{2} \left\{ S - \left[S^2 - 4 \left(\frac{r_j}{r_i} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}$ <p>For $r_i = r_j = r$ and $R = r/L$: $F_{i \rightarrow j} = F_{j \rightarrow i} = 1 + \frac{1 - \sqrt{4R^2 + 1}}{2R^2}$</p>
<p>Rectangles perpendiculaires avec une arête commune</p> 	$H = Z/X \text{ and } W = Y/X$ $F_{i \rightarrow j} = \frac{1}{\pi W} \left(W \tan^{-1} \frac{1}{W} + H \tan^{-1} \frac{1}{H} - (H^2 + W^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{1}{(H^2 + W^2)^{1/2}} \right.$ $\left. + \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{(1 + W^2)(1 + H^2)}{1 + W^2 + H^2} \left[\frac{W^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + W^2)(W^2 + H^2)} \right]^{W^2} \right. \right.$ $\left. \times \left[\frac{H^2(1 + H^2 + W^2)}{(1 + H^2)(H^2 + W^2)} \right]^{H^2} \right\} \right)$

<p>Plaques parallèles avec lignes médianes reliées par une ligne perpendiculaire</p> 	$W_i = w_i/L \text{ and } W_j = w_j/L$ $F_{i \rightarrow j} = \frac{[(W_i + W_j)^2 + 4]^{1/2} - (W_j - W_i)^2 + 4]^{1/2}}{2W_i}$
<p>Plaques inclinées de largeur égale et à bord commun</p> 	$F_{i \rightarrow j} = 1 - \sin \frac{1}{2} \alpha$
<p>Plaques perpendiculaires à bord commun</p> 	$F_{i \rightarrow j} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{w_j}{w_i} - \left[1 + \left(\frac{w_j}{w_i} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}$
<p>Enceinte à trois côtés</p> 	$F_{i \rightarrow j} = \frac{w_i + w_j - w_k}{2w_i}$

Références bibliographiques

1. CENGEL, Yunus. *Heat and mass transfer: fundamentals and applications*. McGraw-Hill Higher Education, 2014.
2. BERGMAN, Theodore L., INCROPERA, Frank P., DEWITT, David P., et al. *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
3. SACADURA, Jean-François. *Initiation aux transferts thermiques*. TEC & DOC, 2000.
4. BATTAGLIA, Jean-Luc, KUSIAK, Andrzej, PUIGGALI Jean-Rodolphe. *Introduction aux transferts thermiques*. DUNOD, 2010.
5. HOLMAN, Jack P. *Heat Transfer*. (McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering). 2010.
6. CENGEL, Yunus. *Introduction to Thermodynamics and Heat Transfer*. McGraw-Hill Primis, 2008.
7. BIANCHI, Ana-Maria, FAUTRELLE, Yves, et ETAY, Jacqueline. *Transferts thermiques*. PPUR presses polytechniques, 2004.
8. MARCHIO, Dominique et REBOUX, Paul. *Introduction aux transferts thermiques*. Presses des MINES, 2003.
9. Olivier PERROT. *COURS DE RAYONNEMENT*. I.U.T. de Saint-Omer Dunkerque, 2010 - 2011.