

1. Les comparaisons (suite)

1.1. Test non-paramétriques (suite)

1.1.2. Test de « Mann et Whitney » pour échantillons indépendants

Ce test est appliqué pour comparer entre deux échantillons indépendants. Ex : comparer entre des volleyeurs et des footballeurs.

Il est aussi recommandé pour la comparaison des échantillons avec un petit effectif (<30). Ce test est basé sur les Rangs, ce qui le rend insensible aux valeurs extrêmes.

Tout d'abord il est nécessaire de comprendre la notion des Rangs. Le rang c'est l'emplacement de la valeur dans une série ordonnée.

Exemple :

Série : 5 ; 2 ; 6 ; 3 ; 4 ; 9 ; 10

Quel est le rang de la valeur « 4 » et « 6 » ??

Série ordonnée : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 (ordonner la série du plus petit au plus grand : croissant)

Donc, le rang de la valeur « 4 » est **3** et le rang de la valeur « 6 » est **5**.

U de Mann et Whitney :

$$U_1 = \sum \text{Rangs1} - \frac{n_1(n_1+1)}{2} \quad \text{Équation 1}$$

$$U_2 = \sum \text{Rangs2} - \frac{n_2(n_2+1)}{2} \quad \text{Équation 2}$$

$U_{cal} = \text{Min} [U_1, U_2]$ (U_{cal} = la valeur la plus petite des deux U)

Exemple :

Groupe 01	Groupe 02
7	8
4	9
3	11
5	13
3	9
6	3
4	4
	3

Question : est-ce que le groupe 01 diffère du groupe 02 (statistiquement) ?

Solution :

Etape 01 :

Classer l'ensemble des valeurs (groupe 01 et 02) dans un ordre croissant, et donner à chaque valeur son rang dans cette série

groupe 01 et 02	rangs	rang moyen
3	1	$(1+2+3+4)/4=2.5$ 2.5
3	2	
3	3	
3	4	
4	5	$(5+6+7)/3=6$ 6
4	6	
4	7	
5	8	8
6	9	9
7	10	10
8	11	11
9	12	$(12+13)/2=12.5$ 12.5
9	13	
11	14	14
13	15	15

Tableau 1. Rangs et rangs moyens des valeurs des deux échantillons

Lorsque la valeur est répétée, on calcule le rang moyen de cette valeur. Ex : la valeur « 3 » s'est répétée 4 fois, donc on divise la somme des rangs (1+2+3+4) sur le nombre de répétition (ici 4 fois) :

Le rang moyenne de la valeur « 3 » est égal à $(1+2+3+4)/4= 2.5$

Etape 02 :

Rapporter chaque rang dans sa colonne

rangs du groupe 01	Groupe 01	Groupe 02	rangs du groupe 02
10	7	8	11
6	4	9	12.5
2.5	3	11	14
8	5	13	15
2.5	3	9	12.5
9	6	3	2.5
6	4	4	6
		3	2.5

Pour remplir la colonne « Rangs du groupe 01 », on cherche le rang de la valeur « 7 » dans le Tableau 1, il se trouve qu'elle correspond à 10. Pour chaque valeur du groupe 01 et 02 on rapporte les rangs correspondants.

Etape 03 :

Calculer U1 et U2 en appliquant l'équation 01 et 02

rangs du groupe 01	Groupe 01	Groupe 02	rangs du groupe 02
10	7	8	11
6	4	9	12.5
2.5	3	11	14
8	5	13	15
2.5	3	9	12.5
9	6	3	2.5
6	4	4	6
		3	2.5
	n1= 7	n2 =8	
Σ rangs1=44			Σ rangs 2=76

$$U_1 = \sum Rangs1 - \frac{n_1(n_1+1)}{n_1} = 44 - \frac{7(7+1)}{7} = 16$$

$$U_2 = \sum Rangs2 - \frac{n_2(n_2+1)}{n_2} = 76 - \frac{8(8+1)}{8} = 40$$

U_{cal}= min[16,40]= 16 (16 c'est la valeur la plus petite)

U_{cal}=16

Nous comparons ensuite le U_{cal} avec le U_{tab}. le U_{tab} (α=0.05 ; n1 et n2)

Dans notre exemple n1= 7 ; n2 = 8 donc U_{tab}= 10

n ₂	α	n ₁																	
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	.05	--	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
	.01	--	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
4	.05	--	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14
	.01	--	--	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8
5	.05	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
	.01	--	--	0	1	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13
6	.05	1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
	.01	--	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	15	16	17	18
7	.05	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
	.01	--	0	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
8	.05	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
	.01	--	1	2	4	6	7	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	28	30
9	.05	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
	.01	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	20	22	24	27	29	31	33	36

Interprétation

Contrairement au test de Student, la différence est significative lorsque le U_{cal}<U_{tab}.

dans notre exemple U_{cal} (16) >U_{tab} (10) donc :

il n'existe pas de différence significative entre les deux groupes.

1.1.3. Test de Wilcoxon pour deux échantillons appariés

Il est appelé aussi test des **Rangs Signés**, en référence au signe des rangs positif et négatif. Ce test non-paramétrique est l'équivalent du test Student pour échantillons appariés. Souvent, il est utilisé pour comparer entre pré-test et post-test. Il est aussi recommandé pour la comparaison des échantillons avec un petit effectif (<30). Ce test est basé sur les Rangs, ce qui le rend insensible aux valeurs extrêmes.

Vu la complexité de la formule, nous procédons aux calculs par étapes et sans mentionner cette formule.

Exemple : voici les résultats de la VMA d'un groupe de sportif. Le pré-test est réalisé avant le début de la saison, alors que le deuxième s'est effectué après 30 jours d'entraînement.

pré-Test	post-test
11	15
10	12
13	14
15	17
16	18
14	17
13	11
13	10
11	12

Question : la VMA de ce groupe a-t-elle progressé ?

Solution

Etape 01 : calculer la différence (post-test)-(pré-test) et la valeur absolue de la différence

pré-Test	post-test	Différence	Absolu de différence
11	15	(15-11)=4	4
10	12	2	2
13	14	1	1
15	17	2	2
16	18	2	2
14	17	3	3
13	11	-2	2
13	10	-3	3
11	12	1	

Etape 02 : attribuer les rangs aux valeurs absolues de la « Différence ».

Pour ce faire, il faut rapporter les valeurs dans ordre croissant

Abs (Différence) ordonnée	rang	rang moyen
1	1	$(1+2)/2=1.5$
1	2	
2	3	$(3+4+5+6)/2=4.5$
2	4	
2	5	
2	6	
3	7	$(7+8)/2=7.5$
3	8	
4	9	9

Donc :

- le rang de la valeur « 1 » est 1.5
- le rang de la valeur « 2 » est 4.5
- le rang de la valeur « 3 » est 7.5
- le rang de la valeur 4 est 9

Etape 03 : calculer les rangs positifs et les rangs négatifs :

Rapporter les rang dans le tableau suivant :

Différence	Absolu de différence	rangs moyens
$(15-11)=4$	4	9
2	2	4.5
1	1	1.5
2	2	4.5
2	2	4.5
3	3	7.5
-2	2	4.5
-3	3	7.5

Somme des rangs positifs : $9+4.5+1.5+4.5+4.5+7.5=33$

Somme des rangs négatifs : $4.5+7.5=12$

$W_{cal} = \text{Min}[33,12] = 12$ (W_{cal} = la valeur la plus petite = 12)

Etape 04

Comparer W_{cal} avec le W_{tab} en sachant que :

W_{tab} = la valeur qui correspond à N et $\alpha=0.05$ (Bilatéral dans le tableau)

Dans notre exemple ; N=9 donc $W_{cal}=6$

N	Niveau de signification, test unilatéral		
	0,025	0,01	0,005
	Niveau de signification, test bilatéral		
	0,05	0,02	0,01
6	0		
7	2	0	
8	4	2	0
9	6	3	2
10	8	5	3
11	11	7	5
12	14	10	7
13	17	13	10
14	21	16	13
15	25	20	16

Interprétation

Comme pour le test de Mann et Whitney et contrairement au test de Student, la différence est significative lorsque le $W_{cal} < W_{tab}$.

Dans notre exemple $W_{cal} (12) > W_{tab}(6)$ donc nous concluons qu'il n'existe pas de différence statistiquement significative.

Remarque :

Toutes les étapes peuvent être réalisées dans un seul tableau.

pré-test	post-test	Différence	ABS dif	Rang	Rang Moyen
11	15	4	4	9	9
10	12	2	2	3	4.5
13	14	1	1	1	1.5
15	17	2	2	2	4.5
16	18	2	2	2	4.5
14	17	3	3	3	7.5
13	11	-2	2	2	4.5
13	10	-3	3	2	7.5
11	12	1	1	1	1.5
	Somme Positive	33			
	Somme Négative	12			