

CHAPITRE 3

LE POTENTIEL ELECTROSTATIQUE DANS LE VIDE

1. CIRCULATION DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

1.1 Définition

La circulation du champ électrostatique \vec{E} sur une courbe (Γ) de A à B est définie par :

$$C_{AB}(\Gamma) = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

Où \vec{dr} désigne un déplacement élémentaire le long de la courbe (Γ).

1.2 Conservation de la circulation du champ électrostatique

La circulation élémentaire du champ électrostatique \vec{E} créée par une charge ponctuelle q est :

$$\vec{E} \cdot \vec{dr} = K \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{dr} = K \frac{q dr}{r^2} = Kq d\left(-\frac{1}{r}\right)$$

La circulation de A à B sur la courbe (Γ) est donc :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr} = Kq \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Cette circulation ne dépend pas du chemin (Γ) pour aller de A à B : la circulation se conserve lorsque nous passons d'un chemin (Γ) à un autre chemin ($\hat{\Gamma}$) reliant les points A et B . Par conséquent, la circulation du champ électrostatique est conservative.

On peut donc identifier le champ \vec{E} à un champ de gradient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(r) \quad \text{avec} \quad V(r) = K \frac{q}{r} + \text{cste}$$

D'où

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr} = Kq \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V_A - V_B$$

La circulation du champ de A vers B est égale à la valeur initiale moins la valeur finale de du potentiel.

Où d'une manière générale :

$$-dV = \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

Le champ scalaire V dit « potentiel électrostatique » et il est défini par les relations suivantes :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(r) \quad \text{et} \quad -dV = \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

Donc, ce champ scalaire V permet de reconstruire le champ électrostatique \vec{E} . Outre une commodité de calcul (il est plus facile d'additionner deux scalaires que deux vecteurs), l'existence d'un tel scalaire traduit des propriétés importantes du champ électrostatique.

Le signe (-) dans ces formules est une convention liée à celle adoptée pour l'énergie électrostatique (chapitre 4).

La circulation du champ électrostatique sur une courbe fermée (on retourne en A) est nulle. On verra plus loin que ceci est d'une grande importance en électrocinétique.

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dr} = 0$$

D'après la relation $\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr} = V_A - V_B$, le long d'une ligne de champ, c'est-à-dire pour $\vec{E} \cdot \vec{dr} > 0$ on a $V(A) > V(B)$. Les lignes du champ électrostatique vont dans le sens des potentiels décroissants.

Si l'on veut se former une représentation du potentiel, on peut remarquer qu'il mesure le degré d'électrification d'un conducteur. Il y a en fait une analogie formelle entre d'un côté, le potentiel V et la température T d'un corps, et de l'autre, entre la charge Q et la chaleur déposée dans ce corps.

2. POTENTIEL ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

Une charge ponctuelle q placée en O crée, au point M ($\|\overrightarrow{OM}\| = r$), un potentiel scalaire V donné par :

$$V(r) = K \frac{q}{r} + cste$$

Remarques :

- Le potentiel V est défini à une constante près. Lorsqu'il n'y a pas de charges à l'infini, on choisit cette constante nulle, c'est-à-dire que l'action des charges tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini.
- Physiquement, c'est la différence de potentiel entre deux points qui a un sens et qui est mesurable. Le signe de cette différence de potentiel est fixé par le sens de parcours choisi pour calculer la circulation du champ.

- L'unité du potentiel V est le volt (symbole V).
- De la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V(r)$, on peut calculer \vec{E} connaissant V . On a :

- En coordonnées cartésiennes :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- En coordonnées sphériques :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

- De la relation $-dV = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr}$, on peut calculer le potentiel V connaissant le champ \vec{E} .
- les champs et les potentiels électrostatiques ont été exprimés dans le cas où les charges sont dans le vide, d'où l'utilisation de la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 . Dans le cas où on a de la matière à la place du vide, on remplace ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ où ϵ_r est dite permittivité relative du matériau ($\epsilon_r > 1$) ; donc la constante K change de valeur mais la structure des formules reste la même.

3. POTENTIEL ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION DISCRETE DE CHARGES

Le potentiel électrostatique créé en M par un ensemble de charges ponctuelles ($q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$) placées aux points ($M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$) respectivement est la somme des potentiels créés par chacune des charges au point M (principe de superposition) :

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = K \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + cste$$

Tel que $r_i = \|\overrightarrow{M_i M}\|$

4. POTENTIEL ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

- Pour un fil chargé (C) de densité linéique λ :

$$V(r) = K \int_C \frac{\lambda dl}{r} + cste$$

- Pour une surface chargée (S) de densité surfacique σ :

$$V(r) = K \iint_S \frac{\sigma ds}{r} + cste$$

- Pour un volume chargé V de densité volumique ρ :

$$V(r) = K \iiint_V \frac{\rho dv}{r}$$

Notons que l'on ne peut pas évaluer le potentiel (ni le champ d'ailleurs) sur une particule en utilisant l'expression discrète (c'est-à-dire $r_i = 0$). Par contre, on peut le faire avec une distribution continue : c'est dû au fait que dq/r converge lorsque r tend vers zéro.

5. SURFACES EQUIPOTENTIELLES

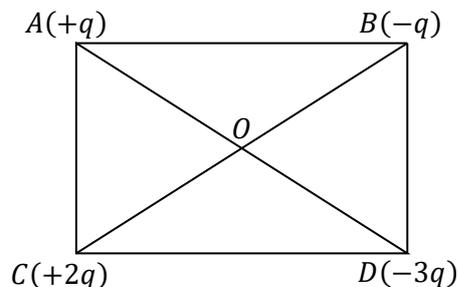
C'est l'ensemble des points M pour lesquels le potentiel est constant :

$$V(r) = cste$$

Considérons deux points M et \hat{M} d'une surface équipotentielle, on a $\overrightarrow{M\hat{M}} = \overrightarrow{dl}$ et $dV = 0$. Or $dV = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \overrightarrow{dl}$. Donc les lignes du champ électrostatique sont normales aux surfaces équipotentielles.

6. EXEMPLES D'APPLICATION

- Calculer le potentiel créé par l'assemblage de charges ponctuelles de la figure suivante au point O :



- A partir de l'expression du champ électrostatique établi dans le chapitre précédent pour le disque, calculer le potentiel électrostatique correspondant.
- Calculer le potentiel créé en un point M de l'espace par un sagement de droite, de longueur $2L$, portant une charge totale Q répartie uniformément avec une densité linéique λ , En déduire l'expression du champ électrique en M .
- Déterminer et représenter les surfaces équipotentielles d'une charge ponctuelle (q).

CHAPITRE 4

ENERGIE ELECTROSTATIQUE

1. DEFINITION

L'énergie électrostatique W d'un système de charges, supposées initialement éloignées les unes des autres, correspond au travail qu'il faut fournir pour amener ces charges à leurs positions finales.

2. TRAVAIL DES FORCES ELECTROSTATIQUES

2.1 Energie d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique \vec{E}

Rappelons d'abord qu'une charge ponctuelle isolée ne peut avoir une énergie potentielle. En effet, cette charge crée autour d'elle un champ et un potentiel, mais c'est en interagissant avec le champ d'une autre charge ou d'une distribution de charges qu'elle va acquérir une énergie potentielle E_p engendrant une force d'interaction \vec{F} .

Le travail élémentaire de la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$, lors d'un déplacement élémentaire \vec{dr} de la charge q est :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = q\vec{E} \cdot \vec{dr} = -q \overrightarrow{gradV} \cdot \vec{dr} = -q dV$$

Lorsque la charge se déplace de A à B , le travail total est :

$$W_{AB} = \int_A^B \delta W = -q \int_A^B dV = -q(V_B - V_A) = q(V_A - V_B)$$

Notons que le champ électrostatique \vec{E} est créé par une autre distribution de charges.

On peut dire aussi que l'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasistatique cette particule de l'infini à sa position actuelle.

En effet, pour la déplacer de l'infini vers un point A , un opérateur extérieur doit fournir une force qui s'oppose à la force de Coulomb. Si ce déplacement est fait suffisamment lentement,

la particule n'acquiert aucune énergie cinétique. Cela n'est possible que si, à tout instant $\vec{F}_{ext} = -\vec{F} = -q\vec{E}$. Le travail fourni par l'opérateur sera donc :

$$w = \int_{-\infty}^M dW = \int_{-\infty}^M \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dr} = -q \int_{-\infty}^M \vec{E} \cdot \vec{dr} = q[V(M) - V(\infty)]$$

Puisqu'on peut toujours définir le potentiel nul à l'infini, on obtient l'expression suivante pour l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle située en M :

$$W = E_p = qV(M)$$

On voit donc que le potentiel électrostatique est une mesure de l'énergie électrostatique (à un facteur q près) : c'est dû au fait que V est lié à la circulation du champ. Autre remarque importante : le travail est indépendant du chemin suivi, donc la force électrostatique est une force conservative et dérive d'une énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$$

$$E_p = W$$

2.2 Energie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

Lorsqu'on a affaire à un ensemble de N charges ponctuelle q_i , chacune d'entre elles va créer sur les autres un champ électrostatique et ainsi mettre en jeu une énergie d'interaction électrostatique. Initialement, toutes les charges étaient éloignées les unes des autres et à l'infini.

- On amène q_1 de l'infini à A_1 : $W_1 = 0$ car $E = 0$.
- La charge q_1 est en A_1 . On amène q_2 de l'infini à A_2 . En A_2 , le potentiel V_2 créée par q_1 est :

$$V_2 = V_1(A_2) = K \frac{q_1}{r_{12}}$$

Où $r_{12} = \|\overrightarrow{A_1A_2}\|$ est la distance entre les charges q_1 et q_2 . Le travail fourni est :

$$W_2 = q_2V_2 = K \frac{q_1q_2}{r_{12}} = q_1V_1$$

Où $V_1 = V_2(A_1)$. C'est-à-dire identique au travail qu'il fallait fournir pour amener q_1 de l'infini en A_1 , en présence de q_2 déjà située en A_2 . Cela signifie que ce système constitué de deux charges possède une énergie électrostatique :

$$W = E_p = W_1 + W_2 = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = \frac{1}{2} (q_1 V_2(A_1) + q_2 V_1(A_2))$$

Ainsi, cette énergie potentielle peut être vue comme :

- L'énergie de q_1 dans le champ de q_2 .
 - L'énergie de q_2 dans le champ de q_1 .
 - L'énergie potentielle du système isolé, constitué par les deux charges q_1 et q_2 .
- On a donc q_1 fixe en A_1 et q_2 fixe en A_2 . On amène q_3 de l'infini à A_3 . En A_3 , le potentiel sera :

$$V_3 = V_1(A_3) + V_2(A_3) = K \frac{q_1}{r_{13}} + K \frac{q_2}{r_{23}}$$

Où $r_{13} = \|\overrightarrow{A_1 A_3}\|$, $r_{23} = \|\overrightarrow{A_2 A_3}\|$, $V_1(A_3)$ est le potentiel créé par q_1 en A_3 et $V_2(A_3)$ est le potentiel créé par q_2 en A_3 . L'énergie potentielle de la charge q_3 est donc :

$$W_3 = q_3 V_3 = K \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Correspondant à une énergie électrostatique de ce système de 3 charges :

$$W = E_p = W_1 + W_2 + W_3 = K \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

Ainsi, on voit qu'à chaque couple $q_i q_j$ est associé une énergie potentielle d'interaction. En continuant cette procédure, c'est-à-dire, en amenant de l'infini les charges restantes ($q_4, q_5, \dots, q_i, \dots, q_n$) à leurs positions finales ($A_4, A_5, \dots, A_i, \dots, A_n$), on montre que l'énergie totale de ce système de N charges ponctuelles sera :

$$W = E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i(A_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N K \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j > i}^N K \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Où, il est évident que :

$$V_i(A_i) = K \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{r_{ij}}$$

Qui représente le potentiel électrostatique créé par toutes les autres charges $q_j (j \neq i)$ au point A_i (où se trouve la charge q_i). La quantité r_{ij} représente la distance entre les charges q_i et q_j ($r_{ij} = \|\overrightarrow{A_i A_j}\|$).

Le terme $1/2$ provient du fait que dans l'interaction entre les charges q_i et q_j , l'énergie de ce couple est comptée deux fois.

Notons que l'énergie potentielle électrostatique d'une distribution de charges correspond à l'énergie de constitution (cohésion, interne) ou la dissociation de cette distribution. Si cette énergie est positive, cela signifie que la distribution de charges absorbe de l'énergie en se constituant (ou dissociant). Par contre, si elle négative, cela signifie qu'elle dégage de l'énergie en se constituant (ou dissociant).

2.3 Energie d'une distribution continue de charges

Comme pour le champ et le potentiel électrostatiques, on se ramène à un ensemble de charges ponctuelles en divisant la charge totale en charges élémentaires dq . Donc, dans l'expression donnant l'énergie d'un ensemble de charges ponctuelles, il suffit de remplacer q_i par dq et la somme discrète par une intégrale.

$$W = E_p = \int_{distribution} dq V(A)$$

Où A est la position de l'élément de charge dq .

Distribution volumique :

$$W = E_p = \frac{1}{2} \iiint_V \rho V dv$$

Distribution surfacique :

$$W = E_p = \frac{1}{2} \iint_S \sigma V ds$$

Distribution linéique :

$$W = E_p = \int_C \lambda V dl$$

3. EXEMPLES D'APPLICATION

- Donner l'expression générale de l'énergie électrostatique d'un ensemble de 04 charges ponctuelles (q_1, q_2, q_3, q_4) .
- Soit un ensemble de 5 charges ponctuelles identique de même valeur $(+q)$, placées aux sommets et au centre d'un carré de coté a . Donner l'expression de l'énergie potentielle électrostatique de ce système.
- Soit une sphère de rayon R chargée en volume, de densité uniforme ρ . La charge totale de la sphère est Q . Le champ à l'intérieur est $(E = \rho r / 3\epsilon_0)$, et le potentiel a pour expression $V = \left[-\rho(r^2 - 3R^2) / 6\epsilon_0 \right]$ (ces résultats seront vus au chapitre suivant). Calculer l'énergie électrostatique de cette sphère.

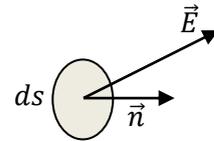
CHAPITRE 5

THEOREME DE GAUSS

1. FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

Considérons un élément de surface ds traversé par un champ électrostatique \vec{E} . Par définition, le flux élémentaire de \vec{E} à travers ds est donné par :

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{ds} = \vec{E} \cdot \vec{n} ds$$



Où $\vec{ds} = \vec{n} ds$ et \vec{n} est la normale à l'élément de surface ds .

A travers la surface entière S :

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} ds$$

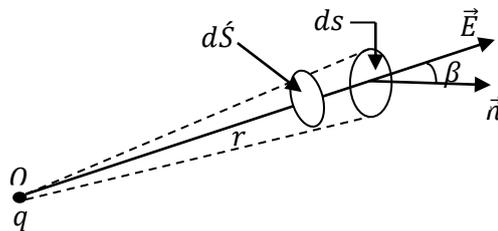
2. FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

2.1 Flux du champ électrostatique à travers un élément de surface

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{ds} = \vec{E} \cdot \vec{n} ds = E ds \cos \theta$$

En remplaçant l'expression de E (champ électrostatique créée par une charge ponctuelle), il vient que :

$$d\phi = Kq \frac{ds \cos \beta}{r^2} = Kq d\Omega$$



Par définition, la quantité

$$d\Omega = \frac{ds \cos \beta}{r^2} = \frac{dS}{r^2}$$

est appelé « angle solide » élémentaire sous lequel, depuis le point O , on voit la surface ds . La quantité $dS = ds \cos \beta$ est dit surface effective (qui par exemple, qui serait vu par un observateur situé en O).

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans le plan. Par définition, c'est l'angle délimité par un cône coupant un élément de surface \vec{ds} . Un exemple concret de l'angle solide est le cône de lumière construit par l'ensemble des rayons lumineux issus d'une lampe torche. Cet angle solide est toujours positif et indépendant de la distance r . Son unité est le stéradian de symbole « sr ».

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) , une surface élémentaire vaut $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. L'angle solide élémentaire s'écrit alors $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. L'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet α vaut :

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin \theta d\theta = 2\pi(1 - \cos \alpha)$$

Ainsi, le demi-espace, engendré avec $\alpha = \pi/2$, correspond à un angle solide de 2π sr, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de 4π ($\alpha = \pi$).

Enfin, on voit bien que ce flux dépend directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de la distance r .

Remarque :

Si ds appartient à une surface S fermée, \vec{n} est orienté vers l'extérieur de cette surface et le flux est dit sortant et il est positif. Par contre, si \vec{n} est orienté en sens inverse, le flux est dit entrant et il est négatif. Nous aurons dans ce cas :

$$d\phi = -Kq d\Omega$$

2.2 Flux du champ électrostatique à travers une surface fermée

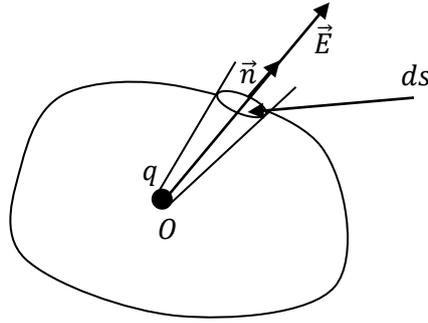
2.2.1 Cas où la charge q est à l'intérieur de la surface

Comme la surface S est fermée, \vec{n} est orienté vers l'extérieur et le flux de \vec{E} créé par la charge q placée en O est un flux sortant. On a :

$$\phi = \iint_S Kq d\Omega = Kq \Omega$$

Où Ω est l'angle solide, sous lequel de O , on voit la surface S . Dans notre cas $\Omega = 4\pi$ sr, d'où :

$$\phi = Kq4\pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$



2.2.2 Cas où la charge q est l'extérieur de la surface

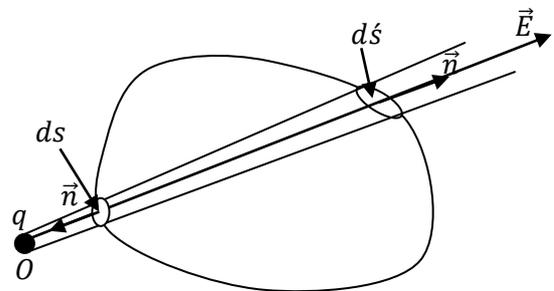
La charge q est à l'extérieur de la surface fermée S . Le même angle solide $d\Omega$ de sommet O , découpe sur S deux éléments de surface ds et $d\acute{s}$, dont les normales sont orientées vers l'extérieur de la surface fermée S . Les flux de \vec{E} à travers ces deux éléments de surfaces sont :

$$d\phi = -Kq d\Omega \quad \text{et} \quad d\phi' = Kq d\Omega$$

On aura alors une contribution au flux :

$$d\phi + d\phi' = 0$$

Pour l'ensemble des couples d'éléments de surface associés $(ds, d\acute{s})$ constituant la surface S , on a des flux élémentaires qui s'annulent deux à deux. Donc, au total, le flux de \vec{E} à travers S est nul.



2.3 Enoncé du théorème de Gauss

Considérons un ensemble de charges (ponctuelles ou non) et une surface fermée S . Les charges q_{ext} , situées à l'extérieur de S , créent un champ électrostatique dont le flux à travers S est nul. Les charges q_{int} , à l'intérieur de S , créent un champ dont le flux est égal à :

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

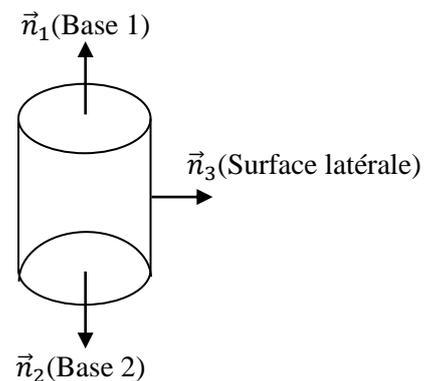
2.4 Application du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet le calcul du module du champ électrostatique \vec{E} d'une distribution de charges plus rapidement que la méthode directe. Pour cela, il faut :

- Déterminer la symétrie de la distribution de charges. Ce qui permet de déterminer le sens et la direction du champ \vec{E} (principe de Curie, voir chapitre 1)
- Choisir une surface fermée (surface de Gauss), en fonction de cette symétrie.
- Dans le cas d'une sphère chargée, la surface de Gauss est une sphère.
- Dans le cas d'un fil, d'un cylindre infini et d'un plan infini chargés, la surface de Gauss est un cylindre.
- Calculer le flux à travers la surface fermée.

Dans le cas où la surface de Gauss est un cylindre, il faut décomposer le flux total en trois flux : deux flux à travers les deux surfaces de base et un flux à travers la surface latérale.

- Appliquer le théorème de Gauss et en déduire le module du champ \vec{E} .



Remarques

- La surface de Gauss est une surface imaginaire.
- Le champ \vec{E} doit être constant (en module) sur toute la surface de Gauss. Cette condition nous permet de le faire sortir de l'intégrale.
- le champ \vec{E} doit être également soit parallèle ou perpendiculaire à l'élément de surface (ou à \vec{n}) :

$$\text{Si } \vec{E} \parallel \vec{n} \, ds \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = E \, ds.$$

$$\text{Si } \vec{E} \perp \vec{n} \, ds \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

$$\text{Donc au final, on aura : } \phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = \oiint_S E \, ds = E \oiint_S ds = E S_G = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0 S_G}$$

3. EXEMPLES D'APPLICATION

En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique en tout point M de l'espace créée par :

- Un fil infini chargé uniformément avec une densité λ .
- Un plan infini chargé uniformément avec une densité σ .
- Une sphère de rayon R chargé uniformément en surface avec une densité σ .
- Une sphère de rayon R chargé uniformément en volume avec une densité ρ .
- Un cylindre infini de rayon R chargé uniformément en surface avec une densité σ .
- Un cylindre infini de rayon R chargé uniformément en volume avec une densité ρ .