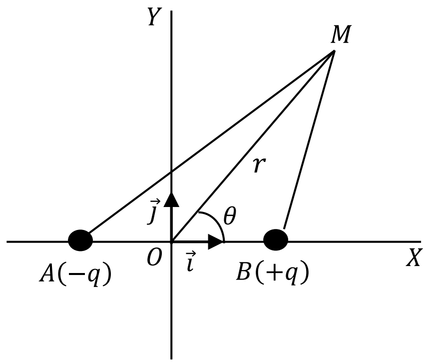
Série de TD n°5 (Dipôles électrostatique)

Exercice 1 :

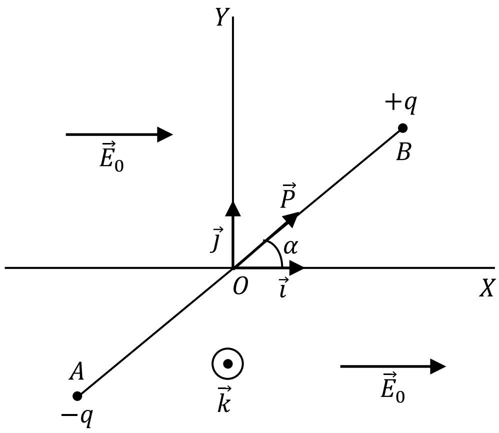
Un dipôle électrostatique est un ensemble de deux charges ponctuelles de même valeur mais de signes opposés, séparées par une distance a. Il est caractérisé par son moment dipolaire $\vec{p} = q\overrightarrow{AB}$. Soit un point du plan de coordonnées polaires $r = OM$ et $\theta = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ (Voir figure ci-contre).



1. **1.** Déterminer, en fonction de r, θ et p, l'expression du potentiel électrique créé par le dipôle au point M ;
2. **2.** Que devient cette expression dans le cas où $a << r$? (Approximation dipolaire)
3. **3.** En utilisant la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, déduire l'expression du champ électrique correspondant ;
4. **4.** Donner les expressions du champ et du potentiel dans les cas suivants : $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi$

Exercice 2 :

Soit un dipôle électrostatique, de moment dipolaire $\vec{p}$, placée dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}_0$ ir figure ci-contre). On pose $\alpha = \left(\vec{E}_0, \vec{p}\right)$.

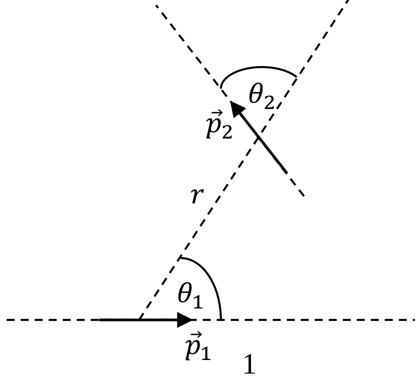


1. **1.** Déterminer l'énergie potentielle électrique d'interaction du dipôle $\vec{p}$ avec le champ $\vec{E}_0$;
2. **2.** Déterminer la résultante et le moment des forces qui s'exercent sur le dipôle. Déduire les positions d'équilibre du dipôle. Conclure.

Exercice 3 :

Deux dipôles, de moments dipolaires $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$, sont placés dans la configuration indiquée sur la figure ci-contre, à une distance r l'un de l'autre. Déterminer :

1. L'énergie potentielle E_{p2} du dipôle de moment $\vec{p}_2$ placé dans le champ du dipôle de moment $\vec{p}_1$:
2. La relation entre les angles θ_1 et θ_2 lorsque le dipôle de moment $\vec{p}_2$ est dans une position d'équilibre :



Corrigé de la série de TD n°5

Exercice 1 :

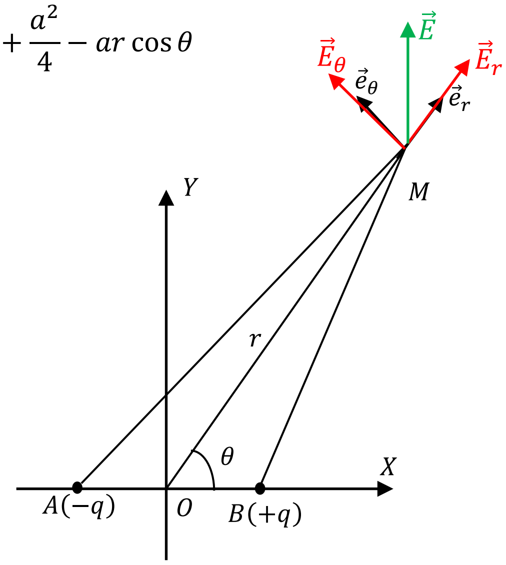
1. L'expression du potentiel :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = K\frac{-q}{AM} + K\frac{+q}{BM} = \frac{q}{K}\left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM}\right)$$

D'après la figure, on a :

$$(BM)^2 = \left(\overrightarrow{BM}\right)^2 = \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right)^2 = (OM)^2 + (OB)^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}$$

$$= (OM)^2 + (OB)^2 - 2(OM)(OB)\cos\theta = r^2 + \frac{a^2}{4} - ar\cos\theta$$



Soit

$$BM = r\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

De même, en changeant θ par $(\pi - \theta)$, on obtient :

$$AM = r\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

d'où

$$V(M) = \frac{Kq}{r}\left[\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

2. Dans le cadre de l'approximation dipolaire on a $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \gg a$; soit $a/r \ll 1$. Par conséquent, on peut effectuer un développement limité au premier ordre de $V(M)$. Sachant que :

$$x \ll 1 \Rightarrow \begin{cases}(1+x)^n \approx 1 + nx \\ (1-x)^n \approx 1 - nx\end{cases}$$

On obtient l'expression suivante pour le potentiel crée par le dipôle au point M :

$$V(M) = \frac{Kq}{r}\left[\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)\right] = K\frac{qa\cos\theta}{r^2} = K\frac{p\cos\theta}{r^3}$$

3. Les composantes du champ, en coordonnées polaires, peuvent être déterminées en utilisant la relation :

$$\vec{E}(M) = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta = -\overrightarrow{grad}V(M)$$

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = K\frac{2p\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = K\frac{p\sin\theta}{r^3} \end{cases}$

4. Les expressions du champ et du potentiel dans les cas suivants : $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi$

	V	$\vec{E}$
$\theta = 0$	$K\frac{p}{r^3}$	$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = K\frac{2p}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$
$\theta = \frac{\pi}{2}$	0	$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = K\frac{p}{r^3} \end{cases}$
$\theta = \pi$	$-K\frac{p}{r^3}$	$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -K\frac{2p}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$

Exercice 2 :

1. L'énergie potentielle électrique d'interaction du dipôle $\vec{p}$ avec le champ $\vec{E}_0$:

C'est l'énergie nécessaire pour amener les deux charges $(-q)$ et $(+q)$ du dipôle de l'infini à leurs positions A et B, respectivement, en présence du champ électrostatique uniforme $\vec{E}_0$. On sait que les énergies des charges ponctuelles $(-q)$ et $(-q)$, dans le champ électrique uniforme $\vec{E}_0$, sont :

$$E_{pA} = -qV_A \ ; \ E_{pB} = qV_B$$

Par conséquent, l'énergie totale du dipôle dans le champ $\vec{E}_0$ est :

$$E_p = E_{pA} + E_{pB} = q(V_B - V_A)$$

Or, on sait que :

$$V_B - V_A = \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E}_0.\vec{dl} = -\int_A^B E_0 dl\cos\alpha = -E_0\cos\alpha\int_A^B dl = -E_0 a\cos\alpha = -\vec{E}_0.\overrightarrow{AB}$$

d'où :

$$E_p = q(V_B - V_A) = -q\vec{E}_0.\overrightarrow{AB} = -\left(q\overrightarrow{AB}\right).\vec{E}_0 = -\vec{p}.\vec{E}_0 = -\|\vec{p}\|\left\|\vec{E}_0\right\|\cos\alpha$$

2. La résultante et le moment des forces qui s'exercent sur le dipôle. Chacune des charges du dipôle subit une force donnée par :

$$\vec{F}_A = -q\vec{E}_0 \ ; \ \vec{F}_B = q\vec{E}_0$$

Puisque le champ extérieur est uniforme, la résultante des forces est évidemment nulle (on ne tiendra pas compte de la force exercée par la charge q sur la charge $(-q)$ et réciproquement) :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$$

Par contre, le dipôle subit un couple de force $\left(\vec{F}_A, \vec{F}_B\right)$ dont le moment, par rapport à O, n'est pas nul. En effet :

$$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B = \overrightarrow{OA} \wedge \left(-\vec{F}_B\right) + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B = q\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E}_0$$

Ce qui donne :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_0 = \|\vec{p}\|\left\|\vec{E}_0\right\| \sin\alpha\, \vec{k}$$

Le moment $\vec{\Gamma}_O$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$, tel que le trièdre $\left(\vec{\Gamma}_O, \vec{p}, \vec{E}_0\right)$ soit direct.

Si on libère le dipôle, il tend, sous l'action de $\vec{\Gamma}_O$, à tourner autour de l'axe (OZ) pour atteindre une position d'équilibre $\left(\vec{\Gamma}_O = \vec{0}\right)$, dans laquelle $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$ sont colinéaires $(\alpha = 0, \pi)$:

- Pour $\alpha = 0$:
  Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à le ramener à cette position ; c'est une position d'équilibre stable.
- Pour $\alpha = \pi$:
  Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à l'éloigner de cette position ; c'est une position d'équilibre instable.

Conclusion :

L'action mécanique principale d'un champ électrique uniforme $\vec{E}_0$ sur un dipôle électrostatique est de l'orienter suivant les lignes du champ $\vec{E}_0$.

Exercice 3 :

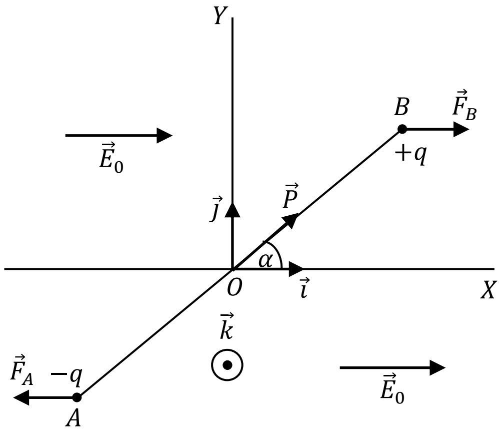
1- L'énergie potentielle E_{p2} du dipôle de moment $\vec{p}_2$ placé dans le champ du dipôle de moment $\vec{p}_1$:

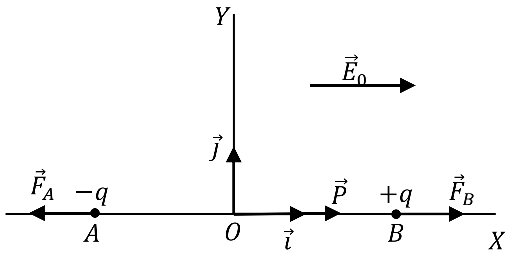
$$E_{p2} = -\vec{p}_2.\vec{E}_1 = -\vec{p}_2.\left[\left(K\frac{2p_1\cos\theta_1}{r^3}\right)\vec{e}_r + \left(K\frac{p_1\sin\theta_1}{r^3}\right)\vec{e}_\theta\right]$$

$$E_{p2} = -\frac{Kp_1p_2}{r^3}\left[2\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)\right] = -\frac{Kp_1p_2}{r^3}[2\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2]$$

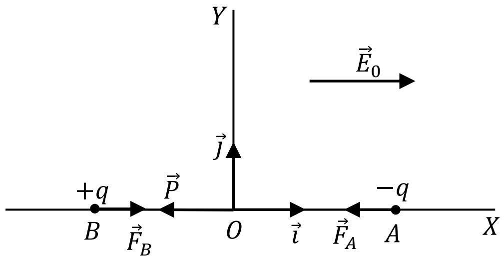
2- La relation entre les angles θ_1 et θ_2 lorsque le dipôle de moment $\vec{p}_2$ est dans une position d'équilibre :

$$\frac{dE_{p2}}{d\theta_2} = 0 \Rightarrow -2\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 = 0 \Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{1}{2}\tan\theta_1$$





Equilibre stable



Equilibre instable