Série de TD n° 4
(Théorème de Guass)

Exercice 1 :

Les composantes du champ électrique dans la figure ci-contre sont : $E_x = 800\sqrt{x}$; $E_y = 0$; $E_z = 0$.
Calculer le flux électrique à travers le cube ainsi que la charge à l'intérieur (a = 10 cm).

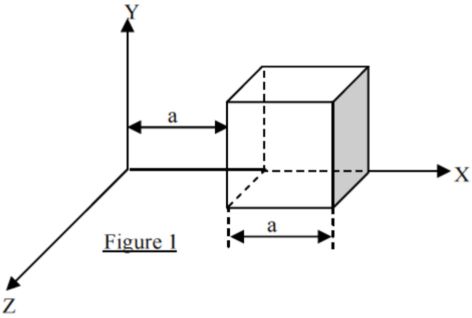


Figure 1

Exercice 2 à traiter en cours

Utiliser le théorème de Gauss pour exprimer le champ électrique en tout point M de l'espace, créé par les distributions de charges suivantes:

- Un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique λ positive ;
- Un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ positive ;
- Une sphère de centre O, de rayon R, chargée avec une densité volumique ρ constante et positive.

Exercice 3 : Compteur de Geiger-Müller

La cellule détectrice (détecteur de radiations) est constituée d'un cylindre creux (rayon R, longueur L), dont la surface latérale métallique est chargée négativement (-Q) et d'un fil central fin (diamètre d) chargé positivement (+Q). L'espace est rempli d'un gaz neutre sous basse pression (figure 2).

Le principe de détection est basé sur l'ionisation du gaz lors du passage d'une particule incidente. Les électrons ainsi créés se dirigent très rapidement (grâce au champ électrique présent dans la cellule) vers le fil central en ionisant sur leur passage, d'autres atomes de gaz. Un signal est ainsi perçu par le compteur.

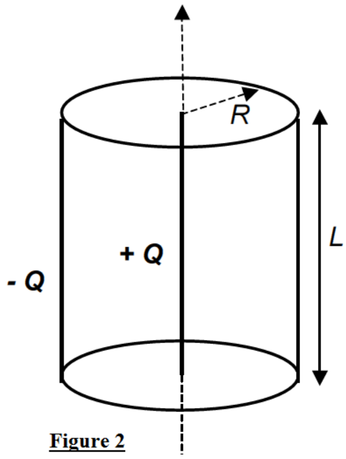


Figure 2

En supposant L >> R, calculer le champ électrique E(r) dans la cellule en fonction de Q, L et r ou r est la distance à l'axe de la cellule (avec r < R). On négligera les effets de bord.

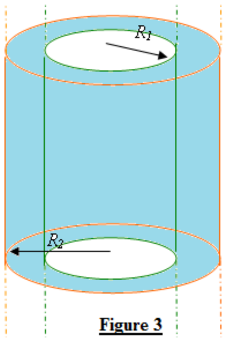


Figure 3

Exercice 4 :

Une distribution de charges électriques de densité volumique uniforme ρ>0, est répartie entre deux cylindres infinis, coaxiaux (même axe OZ) et de rayons $R1$ et $R2$>$R1$ (figure 3).

A l'aide du théorème de Gauss, Calculer le champ en tout point M de l'espace.

Exercice 5 :

Soit une distribution uniforme de charges, de densité volumique ρ>0 répartie entre deux sphères concentriques, $S1$ et $S2$, de centre O, de rayons $R1$ et $R2$ respectivement tel que $R1$<$R2$ (figure 4).

En utilisant le théorème Gauss, calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point M de l'espace, tel que OM=r. Distinguer les régions : r<$R1$, $R1$<r<$R2$, r>$R2$.

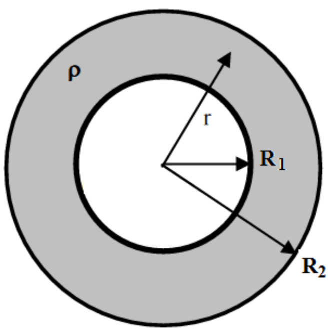
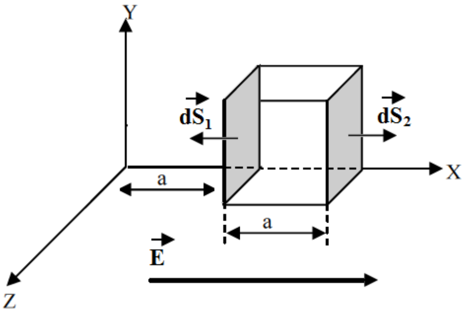


Figure 4

Corrigé Série de TD n° 4

Exercice 1 :

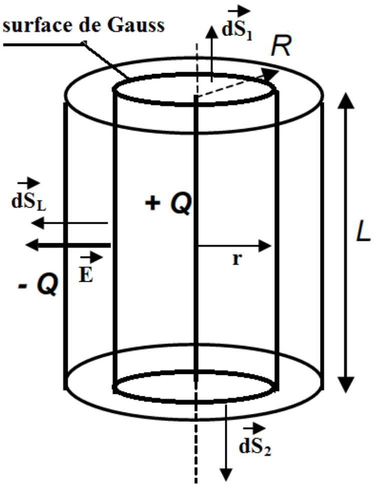
Le champs est parallèle à l'axe OX donc son flux a travers le cube se réduit aux flux a travers les deux faces perpendiculaires a l'axe OX (en gris sur la figure)



$$\varphi_E = \oiint \vec{E}\,\vec{dS} = \int \vec{E}\,\vec{dS_1} + \int \vec{E}\,\vec{dS_2} = -ES_1 + ES_2$$
$$= -\,800\,\sqrt{0{,}1}\ (0{,}1)^2 + \ 800\,\sqrt{0{,}2}\ (0{,}1)^2$$
$$= -\,2{,}53 + \ 3{,}58 = 1{,}05\ [\tfrac{N}{C}\ m^2]$$
$$\varphi_E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{int} = \varphi_E . \varepsilon_0$$
$$\Rightarrow Q_{int} = 1{,}05 \,.\, 8{,}85 \,.\, 10^{-12} = 9{,}3 \,.\, 10^{-12}\ C$$

Exercice 3 : Compteur de Geiger-Müller

D'après la symétrie de l'objet $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$



La surface de Gauss est un cylindre de rayon *r* et hauteur *L*

$$\int \vec{E}\,\vec{dS} = \int_{s_1} \vec{E}\,\vec{dS_1} + \int_{s_2} \vec{E}\,\vec{dS_2} + \int_{s_L} \vec{E}\,\vec{dS_L} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Puisque $\vec{E} \perp \vec{dS_1}\ et\ \vec{dS_2}$ alors

$$\int_{s_L} \vec{E}\,\vec{dS_L} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S_L} = \frac{+Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}$$

Exercice 4 :

D'après la symétrie de l'objet $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$

La surface de Gauss est un cylindre de rayon *r* et hauteur *h*

$$\int \vec{E}\,\vec{dS} = \int_{s_1} \vec{E}\,\vec{dS_1} + \int_{s_2} \vec{E}\,\vec{dS_2} + \int_{s_L} \vec{E}\,\vec{dS_L} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Puisque $\vec{E} \perp \vec{dS_1}\ et\ \vec{dS_2}$ alors

$$\int_{s_L} \vec{E}\,\vec{dS_L} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S_L} = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 r h}$$

1. $r < R_1$: $Q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$
2. $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = \rho\pi h\left(r^2 - {R_1}^2\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho\,(r^2 - {R_1}^2)}{2\varepsilon_0 r}\,\vec{u_r}$
3. $r > R_2$: $Q_{int} = \rho\pi h\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho\,({R_2}^2 - {R_1}^2)}{2\varepsilon_0 r}\,\vec{u_r}$

Exercice 5 :

La distribution de charges est invariante pour toute rotation autour du point O. Par conséquent, le champ électrostatique ne dépend pas de θ et Φ, $\vec{E} = E\vec{e}_r$.

La surface de Gauss est une sphère de centre O et rayon r.

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E.S_G = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \text{ avec } S_G = 4\pi r^2$$

- $r < R_1$

$$Q_{int} = 0 \Longrightarrow E_I = 0$$

- $R_1 < r < R_2$

$$Q_{int} = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - R_1^3)$$

$$E_{II}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{(r^3 - R_1^3)}{r^2} \Longrightarrow \vec{E}_{II}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{(r^3 - R_1^3)}{r^2}\vec{e}_r$$

- $r > R_2$

$$Q_{int} = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)$$

$$E_{III}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r^2} \Longrightarrow \vec{E}_{III}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r^2}\vec{e}_r$$