Faculté de la Technologie
Sciences Techniques 2ème Année **Examen de Physique 3 (02 heures) Le 09 Février 2010**

Exercice 1 : On considère le système représenté à la figure 1. La tige OC de masse négligeable est articulée sans frottements en O et porte une masse m à son extrémité C. A l'équilibre statique, la tige est horizontale et les ressorts de raideur k_1 et k_2 sont comprimés respectivement de δ_1 et δ_2. La tige est écartée de sa position d'équilibre horizontale d'un petit angle $\theta_0 = \frac{\pi}{15}$ et on l'abandonne sans vitesse initiale pour la laisser osciller librement de part et d'autre de sa position d'équilibre.

1) Calculer l'énergie potentielle du système à un instant quelconque t quand la tige fait un angle θ avec l'horizontale.
2) Etablir la relation que doivent vérifier k_1, k_2, δ_1 et δ_2 pour que la position $\theta = 0$ soit effectivement une position d'équilibre.
3) Calculer l'énergie cinétique du système.
4) En déduire le Lagrangien du système. Ecrire son expression dans le cas des petites oscillations ($\theta \prec\prec 1$).
5) Etablir l'équation différentielle du mouvement du système. En déduire la période T_0 de ses petites oscillations.
6) En tenant compte des conditions initiales, donner l'expression définitive de $\theta(t)$.

Exercice 2 : On alimente le circuit RLC série entre les bornes A et B par une tension électrique $e(t)$ qui fait circuler le courant électrique $i(t)$ comme indiqué à la figure 2. On recueille la tension de sortie $u(t)$ entre les bornes E et D du condensateur.

1) Déterminer l'équation différentielle que doit satisfaire $u(t)$ en utilisant la loi des mailles (deuxième loi de Kirchoff).
2) On choisit $e(t) = e_0 \sin \omega t$. Déterminer L'amplitude et la phase de $u(t)$ dans le cas où on ne retient que la solution du régime permanent $u(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (Calculer les expressions de U_0 et de φ) en fonction de L, C, R, e_0 et la pulsation ω en utilisant la représentation complexe.
3) Calculer le facteur de qualité du circuit sachant que $C = 10 nF$, $R = 100\Omega$ et $L = 0.25H$.

Exercice 3 : Une machine-outil de masse m est isolée du sol par deux ressorts de raideur $\frac{k}{2}$ et un amortisseur de coefficient d'amortissement visqueux β. Elle est soumise à une force excitatrice harmonique $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Les ressorts et l'amortisseur sont supposés disposés dans le plan vertical de symétrie de la machine. On suppose d'autre part, que la machine est guidée verticalement par un dispositif sans frottements (voir figure 3).

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement vertical de la machine.

2) Déterminer l'expression complète du déplacement $z(t)$ en régime permanent (amplitude A et phase φ) en fonction de ω (pulsation excitatrice), $\lambda = \dfrac{\beta}{2m}$ (constante d'amortissement) et la pulsation propre ω_0 du système.

3) En déduire l'expression de $z(t)$ pour $\omega = \omega_0$.

4) La machine étant en fonctionnement, on supprime l'excitation en conservant le frottement. Dans le cas où $\dfrac{\beta}{2\sqrt{km}} = \delta < 1$ (δ caractérise le degré d'amortissement du système). Donner l'expression de la nouvelle pulsation ω_1 du mouvement du système en fonction de δ et ω_0.

5) On remet le système sous l'action de l'excitation $F(t) = F_0 \sin\omega t$ et on fait varier la pulsation excitatrice ω. Montrer que la pulsation de résonance dépend de ω_0 et de δ.

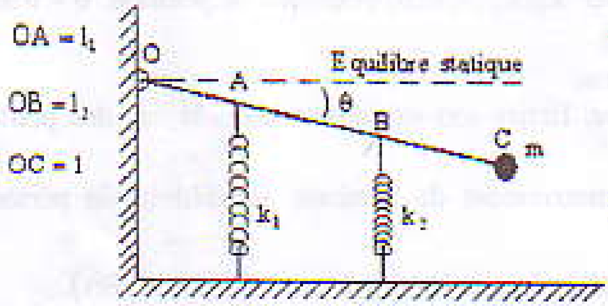


Figure 1

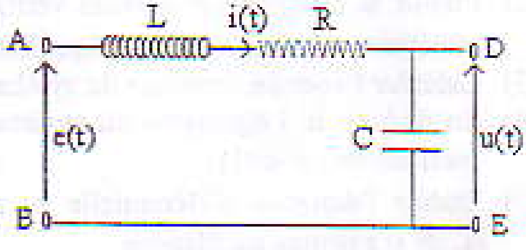
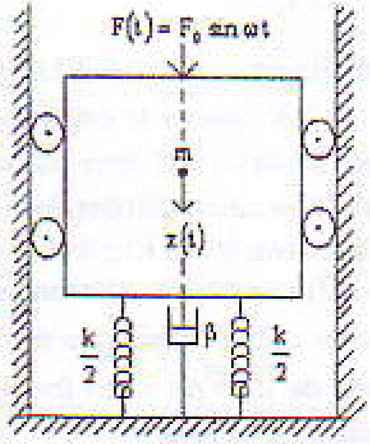


Figure 2

Figure 3



Barème : Exercice 1 : 08 points Exercice 2 : 04points Exercice 3 : 08 points

NB : Tous les résultats démontrés en cours peuvent être exploités sans re-démonstration

Bonne CHANCE

Exercice 1: 8 points

1) La configuration de la figure 1 montre que le ressort de raideur k_1 est comprimé de $\delta_1 + l_1 \sin\theta$ tandis que le ressort de raideur k_2 est comprimé de $\delta_2 + l_2 \sin\theta$.

Energie potentielle du système:

$$V = \frac{1}{2} k_1 (\delta_1 + l_1 \sin\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\delta_2 + l_2 \sin\theta)^2 - mgl \sin\theta \quad 1$$

2) On calcule $\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\theta=0} = 0$ soit: 0,5

$$\left[\frac{1}{2} k_1 \times 2(\delta_1 + l_1 \sin\theta) \times l_1 \cos\theta + \frac{1}{2} k_2 \times 2(\delta_2 + l_2 \sin\theta) \times l_2 \cos\theta - mgl \cos\theta\right]_{\theta=0} = 0$$

ce qui donne: $k_1 \delta_1 l_1 + k_2 \delta_2 l_2 = mgl$ 1

3) $T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$ 1

4) $L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_1 (\delta_1 + l_1 \sin\theta)^2 - \frac{1}{2} k_2 (\delta_2 + l_2 \sin\theta)^2 + mgl \sin\theta$ 0,5

Dans le cas des petites oscillations $\sin\theta \simeq \theta$ d'où:

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_1 (\delta_1 + l_1 \theta)^2 - \frac{1}{2} k_2 (\delta_2 + l_2 \theta)^2 + mgl\,\theta \quad 0{,}5$$

5) Equation de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ 0,5

d'où l'équation différentielle correspondante:

$$m l^2 \ddot{\theta} + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\theta = 0 \quad 1$$

Soit: $\ddot{\theta} + \frac{(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{m l^2}\theta = 0$ d'où: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{m l^2}}$ 0,5

et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m l^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}}$ 0,5

6) Les oscillations du système sont décrites par:

$\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ 0,5

$\theta(t=0) = \frac{\pi}{15} = A \sin\varphi$

$\dot{\theta}(t=0) = A\omega_0 \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $3\pi/2$

Si on prend $\varphi = \pi/2$, on a $A = \pi/15$ et :

$$x(t) = \frac{\pi}{15} \sin(\omega_0 t + \pi/2) = \frac{\pi}{15} \cos\omega_0 t \quad 0{,}5$$

Exercice 2 : 04 points

1) On applique la deuxième loi de Kirchoff.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt - e(t) = 0 \quad 0.5$$

Or $i = \frac{dq}{dt}$ et comme $q = Cu$ on a : $i(t) = C\frac{du}{dt}$ (q est la charge électrique de la capacité). En remplaçant, on obtient

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = e(t) = e_0 \sin\omega t$$

ou bien : $$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{e_0}{LC}\sin\omega t \quad 0.5$$

2.) $e(t) = e_0 \sin\omega t$ et $u(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$

On calcule U_0 et φ à l'aide de la représentation complexe.

$e(t) = e_0 \sin\omega t \rightarrow e_0 e^{j\omega t}$ $\quad u(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$

et $\frac{du}{dt} \rightarrow j\omega U_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\frac{d^2u}{dt^2} \longrightarrow -\omega^2 U_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$ $\quad 0.5$

Ce qui nous ramène à l'équation complexe suivante :

$$\left[\left(-\omega^2 + \frac{1}{LC}\right) + j\omega\frac{R}{L}\right] U_0 \cancel{e^{j\omega t}} e^{j\varphi} = \frac{e_0}{LC}\cancel{e^{j\omega t}}$$ d'où les 2 équations

$$\left.\begin{aligned} U_0\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) &= \frac{e_0}{LC}\cos\varphi \\ U_0\left(\omega\frac{R}{L}\right) &= -\frac{e_0}{LC}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{d'où : } U_0 = \frac{e_0}{LC}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}}$$

Soit $$U_0 = \frac{e_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}} \quad 1$$ et $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-RC\omega}{(1 - LC\omega^2)} \quad 0.5$$

3.) Facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$ 0.5 d'après l'équation différentielle réduite du circuit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $2\lambda = \frac{R}{L}$ d'où $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 50$ $\quad 0.5$

Exercice 8 : 8 p5

1° L'application du PFD conduit à :

$$m\ddot{z} = -\beta\dot{z} - \frac{k}{2}z - \frac{k}{2}z + F(t) + \underbrace{\left(mg - \frac{k}{2}\delta - \frac{k}{2}\delta\right)}_{=0}$$

avec δ = allongement statique des deux ressorts.

On obtient : $m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz = F_0 \sin\omega t$ 1,5

2° En régime permanent : $z(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ 0,5

L'équation différentielle réduite s'écrit :

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \qquad 2\lambda = \frac{\beta}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

En utilisation la méthode de résolution par la représentation complexe, on aboutit à :

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$ 1 et $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$ 0,5

3° Pour $\omega = \omega_0$ $\quad A = \dfrac{F_0}{2\lambda m\omega_0}$ 0,5 $\operatorname{tg}\varphi \to -\infty$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ 0,5

d'où $z(t) = \dfrac{F_0}{2\lambda m\omega_0}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

4° L'excitation $F(t)$ est supprimée, l'équation différentielle devient : $\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ 0,5

$$\frac{\beta}{2\sqrt{km}} = \delta < 1 \Rightarrow \frac{\beta}{2\sqrt{km}} = \frac{2\lambda m}{2\sqrt{km}} = \lambda\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\lambda}{\omega_0} < 1$$ 0,5 d'où

$\lambda < \omega_0$ 0,5 le système est donc faiblement amorti (pseudo-périodique) et ses oscillations s'effectuent avec la nouvelle pulsation :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0\sqrt{1-\delta^2}$$ 0,5 car $\lambda = \omega_0\delta$

5° Pulsation de résonance : Elle est déterminée à partir de l'équation $\dfrac{dA}{d\omega} = 0$ 0,5 soit $\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{F_0}{m}\dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2) + 4\lambda^2\omega^2}}\right) = 0$

La solution est : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{2\lambda^2}{\omega_0^2}} = \omega_0\sqrt{1-2\delta^2}$ 1