Université A. Mira –Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil
2ème année Licence Génie Civil

TP METHODE NUMERIQUE

TP N° 01 **Résolution d'équations non linéaires**

Objectif :

Trouver les racines approchées de l'équation non linéaire f(x)=0, en utilisant les 03 méthodes: méthode de la bissection, méthode des points fixes, méthode de Newton.

1) Méthode de la bissection (ou dichotomie)

on suppose f continue sur l'intervalle [a b] , soit a et b tel que f(a) f(b)<0, alors il existe $\alpha \in [a\ b]$, tel que $f(\alpha)=0$ (théorème des valeurs intermédiaires).

Recherche de la racine approchée :

1) on pose $x_b = (a+b)/2$
2) si $f(x_b) = 0$ alors x_b est la racine de l'équation.
3) si $f(x_b) \neq 0$:
   (a) soit $f(x_b)f(a) > 0$ et alors le zéro $\alpha \in]x_b\ \ b[$
   on définit $a = x_b$ et on calcul $x_b = (a + b)/2$ pour ce nouveau a
   (b) soit $f(x_b)f(a) < 0$ et alors $\alpha \in]a\ \ x_b[$
   on pose $b = x_b$ et on calcul $x_b = (a + b)/2$ pour ce nouveau b

Ces étapes (itérations) seront répétées jusqu'à l'approximation de la solution a ε prés : $\left|x_b^k - x_b^{k-1}\right| < \epsilon$

2) Méthode des points fixes

Un procédé général pour trouver les racines d'une équation non linéaire $f(x) = 0$ consiste en la transformer en un problème équivalent $x - g(x) = 0$, où la fonction auxiliaire $g : [a, b] \to R$ doit avoir la propriété suivante : $g(\alpha) = \alpha$ si et seulement si $f(\alpha) = 0$.

Le point α est dit alors point fixe de la fonction g. Approcher les zéros de f se ramène donc au problème de la détermination des points fixes de g.

Idée : On va construire des suites qui vérifient $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $k \geq 0$. En effet, si $x^{(k)} \to \alpha$ et si g est continue dans [a, b], alors la limite α satisfait $g(\alpha) = \alpha$.

3) méthode de Newton

Le principe de la méthode consiste a remplacé l'arc de la courbe représentatif de la fonction *f*(*x*) par sa tangente au point x_0, l'équation de la tangente au point x_0 est donnée par: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

L'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe *ox* est donnée par :

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

x_1 est une meilleure approximation de α que x_0 .

De proche en proche, nous construisons une suite de solution approchées en utilisant la relation:

$$x_{k+1} = x_K - f(x_K)/f'(x_K)$$

Manipulations

Exercice 1 : Soit la fonction $f(x) = 2\sin(x) - 1$. Ecrire un script (programme) Matlab permettant de trouver la racine approchée de cette équation par la méthode de DICHOTOMIE (bissection) si elle existe dans l'intervalle [-1 1], en utilisant l'algorithme suivant :

Algorithme DICHOTOMIE;

```
a=-1,b=1;
eps=0.00001; ecart=|a-b|;iter=0;xa=1;
  SI f(a)*f(b)<0 alors
     TANT QUE iter<=50 et ecart>eps faire
              xb=(a+b)/2;
              ecart=|xa-xb|;
                  SI f(a)*f(xb)<0 alors
                     b=xb; f(b)=f(xb);
                  Sinon
                     a=xb; f(a)=f(xb);
                  finsi;
              iter=iter+1; xa=xb;
     Fait;
       Ecrire("la racine approchee est",xb,"le Nbr d'iteration est=",iter);
  Sinon
       Ecrire("Pas de racine sur l'intervalle");
  Finsi;
```

Exercice 2 : Soit la fonction $f(x) = 3x - 0.2e^{x}$, écrire un script (programme) Matlab permettant de trouver la racine de cette équation sur l'intervalle [0 1]par la méthode du point fixe, en utilisant l'algorithme suivant :

Algorithme POINT FIXE;

```
a=0 ;b=1;
E=0.00001;
  SI f(a)*f(b)<0
     x0=a;
     x1=(0.2).e^{x0}/3;
         TANT QUE |x1-x0|>E
            x0=x1;
            x1=(0.2).e^{x0}/3;
         fait
            ECRIRE('La racine vaut:',x1);
  SINON
      ECRIRE('Pas de racines dans cette intervalle');
  FINSI;
FIN
```

Exercice 3 : Calculer la racine carrée de trois à l'aide de l'équation suivante $f(x) = x^2 - 3$: par la méthode de NEWTON si elle existe dans l'intervalle [1 2] en utilisant l'algorithme suivant :

Algorithme NEWTON;

```
a=1,b=2;x0=(a+b)/2;
eps=0.00001; ecart=|a-b|;iter=0;
  SI f(a)*f(b)<0 alors
     TANT QUE iter<=50 et ecart>eps faire
       x1=x0-f(x0)/f'(x0);
       ecart=|x1-x0|;
       x0=x1;
       iter=iter+1;
     Fait;
       Ecrire("la racine approchee est",x1,"le Nbr d'iteration est=",iter);
  Sinon
       Ecrire("Pas de racine sur l'intervalle");
  Finsi;
```

Solution

Script 1 :

```
f= inline('2*sin(x)-1')
a=-1;b=1;
eps=0.00001;
ecart= abs(a-b) ;
iter = 0;
xa=1;
if f(a)* f(b)<0
    while (iter <=50 & ecart>eps )
       xb=(a+b ) / 2 ;
       ecart= abs( xa-xb ) ;
          if f(a)* f(xb)<0
            b=xb ;
          else
            a=xb ;
          end
       iter = iter +1;
       xa=xb ;
    end
  fprintf('la racine approchée est %f, le nombre d''iteration est=%d\n',xb,iter);
else
  fprintf( 'Pas de racine sur l"intervalle ' ) ;
end
% la racine approchée est 0.523598, le nombre d'itération est=18
```

Script 2 :

```
a=0;
b=1;
eps=0.00001;
   fa=3*a-0.2*exp(a);
   fb=3*b-0.2*exp(b);
     if fa*fb<0
        x0=a;
        x1=0.2*exp(x0)/3;
           while(abs(x1-x0)>eps)
              x0=x1;
              x1=0.2*exp(x0)/3;
           end
        fprintf('la racine vaut: %f',x1);
     else
        fprintf('pas de racines dans cette intervalle');
     end
```

Script 3 :

```
f=inline( 'x^2-3' )
df=inline( '2*x' )
a=1;b=2;
eps=0.00001;
ecart =1;
iter =0;
x0=(a+b ) / 2 ;
   if f( a )* f(b)<0
        while ( iter <=50 & ecart>eps )
           x1=x0-f(x0 )/ df( x0 ) ;
           ecart=abs (x1-x0 ) ;
           iter=iter +1;
           x0=x1 ;
        end
     fprintf('la racine approchee est %f,le nombre d''iteration est=%d\n',x1,iter);
   else
     fprintf('Pas de racine sur l"intervalle') ;
   end
% la racine approchee de 3 est est 1.732051, le nombre d'iteration est=4
```