Université A. Mira
Dpt : ST 2ième année licence 20/02/10

Examen du module de Maths 3

**Exercice 1 (1,5 pts) :**

Etudier la convergence de la série suivante :

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots$$

**Exercice 2(4 pts ) :**

Etudier la série de terme général $U_n=\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ .

**Exercice 3 (6 pts ) :**

Etudier la convergence simple, la convergence uniforme de la suite d'applications suivante :

$$f_n(x)=\frac{x}{n+x^2} \quad n\geq 1,\ x\in R$$

**Exercice 4 (7 pts ) :**

Soit $U_n(x)=e^{-x\sqrt{n}} \quad \forall\,(n,x)\in N\text{x}R$

1. Soit a > 0.Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ Sur [a, + ∞[.Cette série est-elle normalement convergente sur $R_+$ ?
2. Soit U, sa limite. Montrer que la fonction U est continue sur $R_+^*$
3. Montrer que la fonction U est dérivable sur $R_+^*$ etque sa dérivée est donnée par :
$$\forall\ x\in R_+^* \qquad u'(x)=-\sum_{n\geq 0}\sqrt{n}\,e^{-x\sqrt{n}}$$
4. Que se passe t-il si $x<0$

**Exercice 5 : (1,5 pts) :** Au choix 1) ou 2)

*1)* Déterminer le domaine de convergence de la série suivante:

$$\sum_{n\geq 0}(n^2+3n+2)x^n$$

2) Etudier la convergence de la série de terme général $U_n$ = Arctang ( $\frac{1}{1+n+n^2}$ ) et calculer sa somme.

Ind : Arctang ( $\frac{a-b}{1+ab}$ ) = Arctang (a) - Arctang (b)

Corrigé de l'examen de Math 3. 2009/2010

**Ex 1**

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\dots=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(2n+1)}$$

$$\frac{1}{n(2n+1)}\sim\frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ CV (série de Riemann pour $\alpha = 2 > 1$)

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)} \text{ CV}$$

**Ex 2**

$$\sum_{n\geq 1} U_n \quad \text{avec} \quad U_n=\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$$

$$U_n=\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin n}{n}}\right)=\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{-1} \quad \frac{\sin n}{n}\to 0 \text{ qd } n\to+\infty$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{-1}=\left(1-\frac{\sin n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow U_n=\frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{\sin n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow U_n=\frac{(-1)^n}{n}-(-1)^n\frac{\sin n}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

* $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ CV (série alternée avec $\frac{1}{n}\searrow 0$)

* $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\sin n}{n^2}$ C.A car $\left|\frac{(-1)^n\sin n}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$ et $\sum\frac{1}{n^2}$ CV. $\Rightarrow$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\sin n}{n^2} \text{ CV}$$

et enfin $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV. $\Rightarrow \sum\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ CV.

Ex3

$$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2} \qquad n \geq 1 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1°] C.S

si $x=0$ $\quad f_n(x)=0 \quad \Longrightarrow \quad f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x)=0 \ \ \forall x\in\mathbb{R}$

si $x\neq 0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$

2°] C.U

$$\left(f_n \xrightarrow{CU} f=0\right) \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq n_0 \quad |f_n(x)-0|<\varepsilon \ ?$$

Etudions les $f_n$ : $f_n$.

$f_n$ est impaire $\Longrightarrow$ on l'étudie sur $[0,+\infty[$.

$$f_n'(x) = \frac{n+x^2-2x^2}{(n+x^2)^2} = \frac{n-x^2}{(n+x^2)^2}$$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{n}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n$ | $0$ | $\nearrow$ | $f_n(\sqrt{n})$ | $\searrow$ | $0$ |

$$f_n'(x)=0 \iff x=\pm\sqrt{n}.$$

$$f_n(\sqrt{n})=\frac{\sqrt{n}}{n+n}=\frac{\sqrt{n}}{2n}=\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad f_n(x) \leq f_n(\sqrt{n})$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq n_0(\varepsilon) \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$

$\Longrightarrow f_n \xrightarrow{CU} 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ex4

1. a) C.N $(a>0)$ sur $[a,+\infty[$

$$x \geq a \Rightarrow x\sqrt{n} \geq a\sqrt{n} \Rightarrow -x\sqrt{n} \leq -a\sqrt{n}$$
$$\Rightarrow e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$$

et $e^{-a\sqrt{n}}$ est le t.g d'une serie cv

en effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \exists M>0$ tq $e^{-a\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ cv $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} e^{-a\sqrt{n}}$ cv $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ cv sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

b) C.N sur $\mathbb{R}_+$

pour $x=0$ $e^{-x\sqrt{n}} = e^0 = 1 \not\to 0 \Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ dv pour $x=0$

$\Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$

2. Soit $U = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-x\sqrt{k}}$

$\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ c.N sur $[a,+\infty[ \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ cu sur $[a,+\infty[$

et $\forall n$ $U_n$ est cont sur $[a,+\infty[ \overset{th}{\Rightarrow} U$ est cont sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

et comme le $\sum$ dv pour $x=0 \Rightarrow$

$U$ est cont sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Etudions la cu de la serie derivée sur $\mathbb{R}_+^*$.

soit $\left(-\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}\right)$ $x>0$, de la même façon que dans (1.a) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\Rightarrow \sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow -\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

on a :

- $\forall n$ $U_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\sum U_n \xrightarrow{CV} U$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\sum U'_n \xrightarrow{CU} U$ " "

$\Rightarrow \left(\sum U_n\right)' = \sum (U'_n)$

ie $U'(x) = -\sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$.

4° si $x<0$ $e^{-x\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty$ $\Rightarrow \sum U_n(x)$ DV.

**Ex 5**

1] $n^2+3n+2 \sim n^2$ et $\frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1$ $\Rightarrow R_c = 1$

si $x = 1$ $\sum (n^2+3n+2)$ DV car $n^2+3n+2 \longrightarrow +\infty$.

si $x=-1$ $\sum (n^2+3n+2)(-1)^n$ DV $(-1)^n(n^2+3n+2) \not\longrightarrow 0$. (Pas de limite !)

$\Rightarrow D_c = ]-1, 1[$.

2°] $U_n = \text{Arctg}\,\frac{1}{1+n^2+n} = \text{Arctg}\,\frac{1}{1+n(n+1)} = \text{Arctg}\, n+1 - \text{Arctg}\, n$

on a : $a = n+1$ et $b = n$.

$\text{Arctg}\,\frac{1}{n^2+n+1} \sim \text{Arctg}\,\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ au $V(+\infty)$ ; $\sum \frac{1}{n^2}$ CV.

$\Rightarrow \sum \text{Arctg}\,\frac{1}{1+n^2+n}$ CV ; Calculons sa somme S.

$S = \lim_{n\to+\infty} (\text{Arctg}\,1 - \text{Arctg}\,0 + \text{Arctg}\,2 - \text{Arctg}\,1 + \cdots + \text{Arctg}(n+1))$

$= \lim_{n\to+\infty} \text{Arctg}(n+1) = \frac{\pi}{2}$