# Cours De Math I

# Pour

# Les Etudiants De

# 1ere Année

# SEGC-FI

# 2019-2020

Programme

# 1- Les Suites Réelles

Dans ce chapitre, l'objectif qu'on s'est fixé est : 1. la maitrise du diffèrent vocabulaire sur les suites. A savoir : Suite Récurrente, Suite Croissante, Suite Décroissante, Suite Monotone, Suite Majorée, Suite Minorée, Suite Bornée, Suite Convergente, Suite Divergente, Suite Adjacente, Suite Arithmétique, Suite Géométrique… 2. De savoir calculer la limite d'une suite donnée. 3. Savoir les différents critères de convergence qui nous permet de décider si une suite est convergente ou pas.

## 1.1. **Définitions**

■ Une suite est une liste ordonnée et infinie de nombres réels

$$(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Ces nombres sont les **termes** de la suite. Par exemple, la suite

$$(2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots)$$

a pour premier terme $u_1 = 2$, deuxième terme $u_2 = 4$, et le nième terme $u_n = 2n$.

■ Il existe deux moyens pour déterminer les termes d'une suite :

i. On donne $u_n$ en fonction de $n$ (comme une quantité qui dépend de $n$).
ii. On donne $u_n$ en fonction des termes le précédant $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$. Dans ce cas on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **récurrente**.

**Exemple.** Quelques exemples de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donner de $u_n$ :

i. $u_n = \frac{2^n}{n}$, alors $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{4}{2} = 2$; $u_3 = \frac{8}{3}$.
ii. $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$, alors $u_1 = \sqrt{7}$; $u_2 = \sqrt{6+\sqrt{7}}$; $u_3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{7}}}$.

■ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** si

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ pour tout } n = 1,2,3 \dots$$

ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** si

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ pour tout } n = 1,2,3 \dots$$

■ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si

$$u_{n+1} \leq u_n \text{ pour tout } n = 1,2,3 \dots$$

ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ pour tout } n = 1,2,3 \dots$$

■ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

**Exemple.** Etudions la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \frac{n}{2n+1}$ :

On a $u_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$. Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} \geq 0$. Ceci signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

■ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **majorée** par un nombre $M$ si :

$$u_n \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En d'autre terme, tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont inférieurs au nombre $M$.

■ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **minorée** par un nombre $m$ si :

$$u_n \geq m \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En d'autre terme, tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supérieurs au nombre $m$.

■ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **bornée** par les deux nombres $M\ et\ m$ si :

$$m \leq u_n \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En d'autre terme, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est majorée et minorée à la fois.

**Exemple.** On a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

i. $u_n = n^2$. On a $u_n \geq 0$ pour tout $n$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée par $0$, mais n'est pas majorée. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée.

ii. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. On a $u_n \geq -\frac{1}{2}$ et $u_n \leq \frac{1}{4}$, pour tout $n$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée par $-\frac{1}{2}$ et majorée par $\frac{1}{4}$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

### 1.2. **Convergence et divergence des suites :**

Dans l'étude d'une suite, on s'intéresse principalement à son comportement lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsqu'on considère des valeurs de $n$ de plus en plus grande. En d'autre terme, on s'intéresse si la suite est convergente ou divergente.

**Définitions.**

■ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente vers la limite $\boldsymbol{l}$** si pour tout nombre réel $\varepsilon$ positif il existe un entier $N$ tel que l'inégalité $|u_n - l| < \varepsilon$ soit vérifiée par tous les termes $u_n$ qui vient après le terme $u_N$. Et on écrit $\lim u_n = l$.

■ On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente** si elle n'est pas convergente. En d'autre terme, une suite est divergente si $\lim u_n = \pm\infty$ ou $\lim u_n$ n'existe pas.

**Exemple.** Exemples des suites convergentes et divergentes :

i. Si $u_n = \frac{n}{n-1}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1$.
ii. Si $u_n = n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
iii. Si $u_n = -n^2$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

**Remarque.**

1. La Limite d'une suite convergente est unique.
1. Toute suite est convergente ou divergente.
2. Pour déterminer la convergence d'une suite on a deux méthodes :
a. Méthode direct : on calcule simplement la limite de la suite.
b. Méthode indirect : on applique l'un des critères de convergences.

Ce qu'on va voir dans les deux paragraphes suivants.

## 1.3. Calcul de Limites d'une Suite

Pour pouvoir calculer la limite d'une suite il faut connaitre avant tout la limite de certaines suites importantes. Rappelons que dans le cas des suites, il y a qu'une seule limite à calculer à savoir $n \to +\infty$.

### 1.3.1. Limites de suites importantes :

■ $u_n = n^\alpha, \alpha > 0$ : $\lim u_n = \lim n^\alpha = +\infty$.

Par exemple : $\lim n^5 = +\infty, \lim \sqrt{n} = \lim n^{\frac{1}{2}} = +\infty, \lim \sqrt[3]{n} = \lim n^{\frac{1}{3}} = +\infty$.

■ $u_n = a^n, a \in \mathbb{R}$ :

$$\lim u_n = \lim a^n = \begin{cases} +\infty, si\ a > 1 \\ 1, si\ a = 1 \\ 0, si -1 < a < 1 \\ n'existe\ pas, si\ a \leq -1 \end{cases}$$

Par exemple : $\lim e^n = +\infty, \lim \left(\frac{7}{3}\right)^n = +\infty, \lim \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0, \lim (-1)^n\ n'existe\ pas$.

■ $u_n = n^\alpha a^n, \alpha > 0, a \in \mathbb{R}$ :

$$\lim u_n = \lim n^\alpha a^n = \begin{cases} +\infty, si\ a > 1 \\ +\infty, si\ a = 1 \\ 0, si -1 < a < 1 \\ n'existe\ pas, si\ a \leq -1 \end{cases}$$

Par exemple : $\lim n^2 \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty, \lim \sqrt{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0, \lim n(-1)^n\ n'existe\ pas$.

■ $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}, \alpha > 0, a \in \mathbb{R}$ :

$$\lim u_n = \lim \frac{a^n}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty, si\ a > 1 \\ 0, si\ -1 \leq a \leq 1 \\ n'existe\ pas, si\ a < -1 \end{cases}$$

Par exemple : $\lim \frac{e^n}{n^3} = +\infty, \lim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0, \lim \frac{(-3)^n}{n}\ n'existe\ pas.$

■$u_n = n^\alpha \ln n, \alpha \geq 0$: On a $\lim n^\alpha \ln n = +\infty$.

Par exemple: $\lim n^3 \ln n = +\infty$.

■$u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}, \alpha > 0$: On a $\lim \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$.

Par exemple: $\lim \frac{\ln n}{n^2} = 0$.

Maintenant, on est à même de calculer la limite de toute sorte de suite et ça en appliquant les règles suivantes.

### 1.3.2. **Règles de Calculs des limites :**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Alors, on a :

■ $\lim(u_n + v_n)$: La règle de calcul de la limite est donnée par le tableau suivant :

| $\lim u_n$ | $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n$ | $l'$ | $l'$ | minorée | $l'$ | majorée | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim(u_n + v_n)$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I. |

■ $\lim(u_n v_n)$: Pour simplifier, on s'intéresse qu'au limite positive :

| $\lim u_n$ | $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n$ | $l'$ | $l' > 0$ | minorée$> 0$ | $+\infty$ | $0$ |
| $\lim(u_n v_n)$ | $ll'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | F.I. |

■ $\lim(u_n/v_n)$: Pour simplifier, on s'intéresse qu'au limite positive :

| $\lim u_n$ | $l$ | $l > 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | majorée | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n$ | $l' \neq 0$ | $0^+$ | $l' > 0$ | majorée$> 0$ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $\lim(u_n/v_n)$ | $l/l'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $0$ | F.I. | F.I. |

F.I. signifie forme indéterminée.

### 1.3.3. **Limites de suites particulières** : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

■ $\boldsymbol{u_n = a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_s n^{\alpha_s}}$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, s$. Supposons aussi $\alpha_1 > \alpha_i$ pour tout $i = 2, \dots, s$. Alors :

$$\lim(a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_s n^{\alpha_s}) = \lim a_1 n^{\alpha_1} = a_1(+\infty).$$

Par exemple :$\lim(-2n^5 + n^2 - 4) = \lim -2n^5 = -2(+\infty) = -\infty$.

■ $\boldsymbol{u_n = \frac{a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_s n^{\alpha_s}}{b_1 n^{\beta_1} + b_2 n^{\beta_2} + \cdots + b_t n^{\beta_t}}}$, avec $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i, \beta_j > 0$ pour tout $i = \overline{1,s}$ et $j = \overline{1,t}$.

On suppose aussi $\alpha_1 > \alpha_i, \beta_1 > \beta_j$ pour tout $i = 2, \dots, s \; et \; j = 2, \dots, t$. Alors :

$$\lim \left(\frac{a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_s n^{\alpha_s}}{b_1 n^{\beta_1} + b_2 n^{\beta_2} + \cdots + b_t n^{\beta_t}}\right) = \lim \left(\frac{a_1 n^{\alpha_1}}{b_1 n^{\beta_1}}\right) = \frac{a_1}{b_1} \lim n^{\alpha_1 - \beta_1} = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1}(+\infty), si \; \alpha_1 > \beta_1 \\ \quad \frac{a_1}{b_1}, si \;\; \alpha_1 = \beta_1 \\ \quad 0, si \;\; \alpha_1 < \beta_1 \end{cases}$$

Par exemple : $\lim \left(\frac{-3n^3+n}{2n^2+n}\right) = \lim \frac{-3n^3}{2n^2} = \frac{-3}{2} \lim n = -\infty$ ■ $\lim \frac{-4n^2}{3n^2-1} = \lim \frac{-4n^2}{3n^2} = \frac{-4}{3}$.

Maintenant, on passe à la deuxième méthode pour déterminer la convergence d'une suite à savoir : critères de convergence.

### 1.4. <u>**Les Critères de Convergences d'une Suite :**</u>

Généralement, on applique ces critères de convergences pour des suites dont on ne sait pas calculer directement la limite. Par exemple : les suites récurrentes.

#### 1.4.1. <u>**Critère de Convergence des Suites Monotones :**</u>

Etant donné la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, on a :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** et **majorée**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente.**
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** et **non majorée**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** vers $+\infty$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** et **minorée**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente.**
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** et **non minorée**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** vers $-\infty$.

<u>**Exemple.**</u> Etudions la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Remarquons tout d'abord qu'on ne peut pas calculer directement la limite de cette suite, donc on va essayer d'appliquer le critère ci-dessus. On a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+(n+1)}$$

Ou bien :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geq 0$$

Ceci signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour pouvoir conclure, il reste à vérifier si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ou pas. On peut remarquer que :

$$u_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leq 1$$

Ce qui signifie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle est convergent.

1.4.2. **Critère du Théorème de L'Encadrement :**

Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

i. $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadré par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$)
ii. $\lim v_n = \lim w_n = l$. ($(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $l$.)

Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers la limite $l$.

**Exemple.** Etudions la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Dans ce cas aussi, on ne peut pas calculer directement la limite. Appliquons le théorème de l'encadrement. Premièrement, on doit encadrer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (l'étape la plus difficile). Pour cela, on peut remarquer que $u_n$ s'écrit comme somme de $n$ termes, chacun de la forme $\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ avec $k = 1, \ldots, n$. Par conséquent on a l'encadrement :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Ou bien : $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec $v_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ et $w_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. D'où l'encadrement.

De plus $\lim v_n = \lim w_n = 1$.En effet :

$$\lim v_n = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim w_n = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

Et du théorème de l'encadrement, on peut déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim u_n = 1$.

### 1.4.3. **Critère de Comparaison :**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que:

- Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

**Exemple.** Calculons $\lim(n^2 + (-1)^n)$. On a $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$, et de plus $\lim(n^2 - 1) = +\infty$, alors $\lim(n^2 + (-1)^n) = +\infty$.

### 1.4.4. **Critère des Suites Adjacentes :**

**Définition.** Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si elles vérifient les deux conditions suivantes :

i. L'une des suites est **croissante** et l'autre est **décroissante.**
ii. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

**Théorème.** Deux suites **adjacentes** convergent vers la même limite.

**Exemple.** Appliquons le critère des suites adjacentes à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

Tout d'abord, on étudie la monotonie des deux suites. On a:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Donc,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0.$$

D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Montrons alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour cela, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Donc,

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right).$$

Ceci nous amène à :

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right).$$

Ce qui nous donne :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} < 0$$

D'où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$, on a : $\lim(v_n - u_n) = 0$.Par consequent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc, elles convergent vers la même limite $l$.

## 1.5. **Suites Arithmétiques et Géométriques :**

### 1.5.1. **Suites Arithmétiques :**

**Définition.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Ou bien

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Où $r$ est une constante appelée la **raison** de la suite.

■ Par exemple, si le terme général $u_n = 2n$. On a : $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 2n = 2$. D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et de raison $r = 2$.

Par contre, si le terme général $u_n = n^2$. On a : $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$. Comme $2n + 1$ n'est pas une constante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.

■ Dans une suite arithmétique, on a les propriétés suivantes :

1. **Expression de $u_n$ en fonction de $n$:**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$, alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

■ Comme conséquence, on a : Toute suite arithmétique est déterminée par son 1er terme et sa raison ou par deux de ses termes.

2. **Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :**

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$S = nombre\ de\ termes\ de\ la\ somme \times \left(\frac{Premier\ terme + Dernier\ terme}{2}\right)$$

Ainsi, si : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, on a :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

1.5.2. **Suites Géométriques :**

**Définition.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Ou bien

$$u_{n+1}/ u_n = q$$

Où $q$ est une constante appelée la **raison** de la suite.

■ Par exemple, si $u_n = 2^n$. On a : $u_{n+1}/ u_n = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$. D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et de raison $q = 2$.

■ Dans une suite géométrique, on a les propriétés suivantes :

1. **Expression de $u_n$ en fonction de $n$:**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$, alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

■ Comme conséquence, on a : Toute suite géométrique est déterminée par son 1er terme et sa raison ou par deux de ses termes.

2. **Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :**

La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est :

$$S = 1^{er}\ terme \times \frac{1 - (raison)^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}$$

Ainsi, si : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, on a :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 + q^n}{1 - q}$$

**Exercice.** Soit la suite $(u_n)$ telle que $u_n = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, a \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que $(u_n)$ est une suite géométrique.
2. Calculer la limite de $(u_n)$.
3. Calculer la somme suivante $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

# 2- Fonctions D'Une Seule Variable Réelle

Dans ce chapitre nous présentons les trois outils essentiels à l'étude des fonctions– la limite, la dérivée et l'intégral – et leurs applications pour résoudre les différents problèmes liés aux fonctions, à savoir : la recherche des asymptotes, le sens de variation, l'équation de la tangente, les extremums, les points d'inflexion, le domaine de convexité, le calcul des aires… Ainsi dans ce chapitre, on s'est réduit à développer seulement les notions et les outils nécessaire pour cette étude. Aussi dans cette étude, on s'intéresse seulement aux fonctions élémentaires de types : la fonction puissance, la fonction exponentielle, la fonction logarithme népérien, la fonction polynomiale, la fonction rationnelle et irrationnelle… Chaque notions et théorèmes introduits dans ce chapitre est accompagné par des exemples d'applications. Comme la dérivée est l'outil par excellence dans l'étude d'une fonction, on s'est étendu longuement sur les techniques de dérivations des différentes fonctions. Nous terminons ce chapitre par le calcul des intégrales et leurs applications au calcul des aires.

## 2.1. **Définitions et Généralités :**

1. **Fonction.** Une fonction $f$ définie sur une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une loi, à chaque nombre $x$ dans $\mathcal{D}_f$, associe un unique nombre $f(x)$. On la note :

$$f: \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$$

Où $\mathcal{D}_f$ est le domaine de définition de $f$. Comme exemple de fonctions : $\frac{x^2+2}{x}$.

2. **Domaine de Définition.** Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$ est l'ensemble de tous les nombres réels $x$ tel que $f(x)$ existe. Ou bien, c'est l'ensemble de tous les nombres réels qu'on peut calculer par $f$.

■ Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est soit un intervalle ou réunion d'intervalles.

3. **Intervalle.** Une partie $I$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tout $x, y$ dans $I$, $I$ contient tous les nombres compris entre les deux nombres $x$ et $y$.

■ Si $a, b$ deux réels tels que $a < b$, alors un intervalle d'extrémités $a$ et $b$ peut être désigné par l'une des formes suivantes :

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ L'intervalle fermé borné (contient les deux extrémités).

$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ L'intervalle ouvert borné (ne contient pas les extrémités).

$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ L'intervalle semi-ouvert.

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ L'intervalle semi-ouvert.

$[a,+\infty[ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ L'intervalle fermé non borné.

$]a,+\infty[ = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ L'intervalle ouvert non borné.

$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$ L'intervalle fermé non borné.

$]-\infty,a[ = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$ L'intervalle ouvert non borné.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est lui-même un intervalle. On peut l'écrire $\mathbb{R} = ]-\infty,+\infty[$.

**Exemple.** Quelques domaines de définitions de certaines fonctions :

■ Fonction Monôme : $f(x) = x^n, n$ est un entier naturel, est définie sur $\mathbb{R}$.

■ Fonction Racine Carrée : $f(x) = \sqrt{x}$, est définie sur $[0,+\infty[$.

■ Fonction Racine Cubique : $f(x) = \sqrt[3]{x}$, est définie sur $\mathbb{R}$.

■ Fonction Exponentielle : $f(x) = e^x$, est définie sur $\mathbb{R}$.

■ Fonction Logarithmique : $f(x) = \ln x$, est définie sur $]0,+\infty[$.

**Remarque.** Une règle pratique dans la recherche du domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est, si les opérations Racine Carrée $(\sqrt{.})$, La Division $(\div)$ et logarithme $(\ln\cdot)$ n'apparaissent pas dans l'expression de $f$, alors $D_f = \mathbb{R}$.

4. **Parité.**

■ Une fonction $f$ définie sur $\mathcal{D}_f$ est dite **paire** si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f \; et \; f(-x) = f(x)$$

■ Une fonction $f$ définie sur $\mathcal{D}_f$ est dite **impaire** si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f \; et \; f(-x) = -f(x)$$

**Exemple.**

■ La fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire, car

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

■ La fonction $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire, car

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

■ Par contre la fonction $f(x) = \ln x$ définie sur $]0,+\infty[$ est ni paire ni impaire, car on a $x \in ]0,+\infty[$ mais $-x \notin ]0,+\infty[$.

**Remarque.**

1. Dans l'étude de la parité de $f$, il faut toujours vérifier si la partie positive de son $\mathcal{D}_f$ égale à moins $(-)$ sa partie négative.

2. La parité de $f$ permet de réduire l'étude de $f$ seulement sur la partie positive de son $\mathcal{D}_f$ et par symétrie, on déduit les valeurs de $f$ sur sa partie négative.

5. **Sens de Variation.** Le sens de variation de $f$ nous permet de voir sur quelle partie $f$ est croissante et décroissante. D'où les définitions suivantes :

■ Une fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $I$ si :

$$\forall x_1 \in I, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

■ Une fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $I$ si :

$$\forall x_1 \in I, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

■ Une fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $I$ si :

$$\forall x_1 \in I, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

■ Une fonction $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $I$ si :

$$\forall x_1 \in I, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

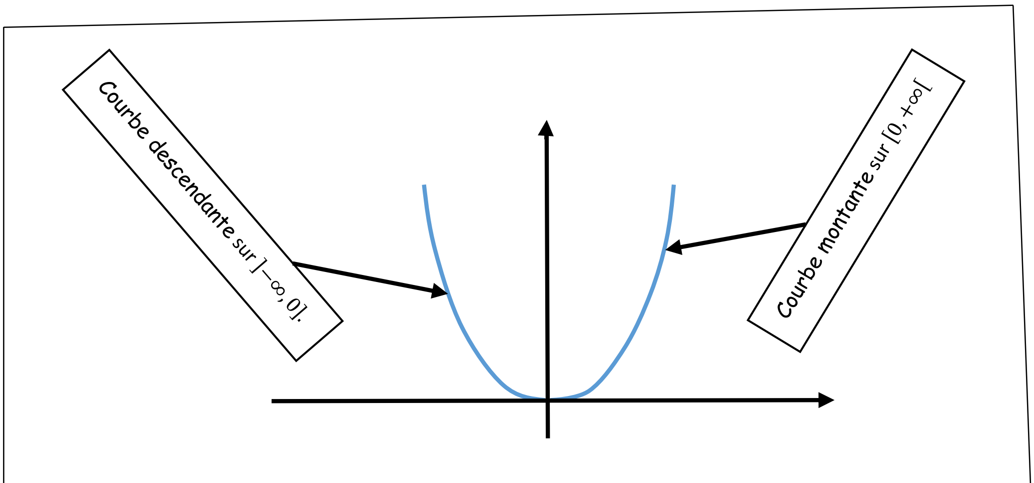
■ Une fonction $f$ est monotone sur $I$ si elle est croissante sur $I$, ou si elle est décroissante sur $I$.

■ Une fonction $f$ est strictement monotone sur $I$ si elle est strictement croissante sur $I$, ou si elle est strictement décroissante sur $I$.

■ Géométriquement, la croissance se traduit par une courbe qui monte, et la décroissance se traduit par une courbe qui descend.

**Exemple.**

La fonction $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$, et décroissante sur $]-\infty, 0]$.




Graphe de la fonction $f(x) = x^2$

## 2.2. Limite d'une Fonction :

### 2.2.1. Définitions.

■ **Limite d'une fonction en $x_0$ :**

Soit $x_0$ un point appartenant à l'intervalle $I$. On dit que $\boldsymbol{f}$ admet une **limite** finie $\boldsymbol{l}$ en $\boldsymbol{x_0}$, et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ tel\ que\ (\forall x \in I\ et\ |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

**Remarque.**

- Intuitivement, cette définition nous dit qu'on peut approcher autant qu'on veut la valeur $l$ par $f(x)$ pourvu qu'on permet à $x$, tout en restant diffèrent de $x_0$, de s'approcher de plus en plus de $x_0$.
- Cette définition n'est pas opérationnelle, c'est-à-dire elle ne montre pas comment calculer ou trouver la limite $l$. Généralement, la définition de la limite est utilisé pour prouver si un nombre donné $l$ est la limite ou pas d'une fonction $f$.
- La limite en $x_0$ peut exister même si $f$ n'est pas définie en $x_0$. Par exemple, on a : $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ alors que $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ n'est pas définie en $x_0 = 1$. Aussi même si $f$ est définie en $x_0$, on peut avoir $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Par exemple, si on considère la fonction $f$ telle que :
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & si\ x \neq 1 \\ -1 & si\ x = 1 \end{cases}$$
Alors, on a : $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, et $f(1) = -1$. Ainsi : $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.
- Si une fonction admet une limite $l$ en $x_0$, cette limite est unique.

■ **Limite à gauche, limite à droite :**

- $\mathrm{f}$ admet une limite à droite $\mathrm{l}$ en $x_0$ si la restriction de $\mathrm{f}$ à $\mathrm{I}\ \cap\ ]\mathrm{x}_0, +\infty[$ admet pour limite $l$ en $\mathrm{x}_0$. On note : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$.
- $\mathrm{f}$ admet une limite à gauche $\mathrm{l}$ en $x_0$ si la restriction de $\mathrm{f}$ à $\mathrm{I}\ \cap\ ]-\infty, \mathrm{x}_0[$ admet pour limite $l$ en $\mathrm{x}_0$. On note : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

■ **Limite infinie en $x_0$ :**

- On dit que $f$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $x_0$ si :
$$\forall\ A > 0\ \exists \delta > 0\ tel\ que\ (\forall x \in I\ et\ |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow f(x) > A$$
On note : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

- On dit que $f$ tend vers $-\infty$ quand $x$ tend vers $x_0$ si :
$$\forall\, A < 0\ \exists\delta > 0\ tel\ que(\forall x \in I\ et\ |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow f(x) < A$$
On note : $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

■ **<u>Limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ :</u>**

- On dit que $f$ a pour limite $l$ quand $x$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists B > 0\ tel\ que\ \forall x > B \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On note : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

On définit de manière analogue $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

- On dit que $f$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0\ \exists B > 0\ tel\ que\ \forall x > B \Longrightarrow f(x) > A$$

On note : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On définit de manière analogue $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$…

2.2.2. **<u>Calcul Pratiques d'une Limite :</u>**

Quand on calcule une limite, on a affaire à des fonctions qui s'écrit comme somme (+), produit(×), rapport (÷) ou composition d'autres fonctions, les fonctions usuelles. Ceci nous amène à introduire les limites de ces fonctions usuelles et à donner les règles pour calculer la limite de la somme, produit, rapport ou composition de deux fonctions.

**1. <u>Limites de fonctions Usuelles :</u>**

- **<u>La Fonction Puissance $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.</u>**

<u>Si $\alpha > 0$ :</u> $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$. Par exemple, $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
<u>Si $\alpha < 0$ :</u> $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}} = 0$. Par exemple, $\lim_{x\to+\infty} x^{-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

<u>Cas particulier.</u> si $\alpha$ est un entier, c'est-à-dire $\alpha = n$, dans ce cas on peut calculer la limite $x$ tend vers $-\infty$. On distingue deux cas :

a. <u>Si $n$ est paire :</u> $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$. Par exemple : $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.
b. <u>Si $n$ est impaire :</u> $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$. Par exemple : $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Cas particulier. si $\alpha$ est une fraction de la forme $\alpha = \frac{1}{n}$, dans ce cas on peut calculer la limite, quand $x$ tend vers $-\infty$, seulement dans le cas où $\boldsymbol{n}$ est **impair**.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to-\infty} = \sqrt[n]{x} = -\infty$. Par exemple, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} = -\infty$.

- **La Fonction Exponentielle $e^x$ :**

■ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ■ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ■ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

- **Fonctions Puissance et Exponentielle Comparées :**

■ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^x = +\infty$.

Cas particulier : si $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha$ existe, comme dans le cas $\alpha = n$, alors on a :

■ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = 0$ ■ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$. Par exemple : ■ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^3} = 0$ ■ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{3}} e^x = 0$.

- **La Fonction Logarithme $\ln x$ :**

■ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ■ $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ ■ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

- **Fonctions Puissance et Logarithme Comparées :**

Si $\alpha$ et $\beta$ des nombres réels positifs, alors on a :

■ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ ■ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\beta (\ln x)^\alpha = 0$.

Par exemple : ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$ ■ $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^4 = 0$.

## 2. Opérations sur les Limites :

Dans cette section, on s'intéresse aux règles de calculs d'une limite d'une fonction qui s'écrit comme combinaison par opérations algébriques d'autre fonctions. Dans tout ce qui suit $x_0$ peut désigner un nombre réel ou $\pm\infty$.

- **Somme de Deux Fonctions :**

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big)$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I. |

F.I. signifie Forme Indéterminée. Donc, on n'a pas le droit d'écrire dans ce cas : $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

- **Produit de Deux Fonctions :**

| $\lim_{x\to x_0} f(x)$ | $l$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to x_0} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big)$ | $ll'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I. |

- **Quotient :**

| $\lim_{x\to x_0} f(x)$ | $l$ | $l$ | $+\infty(\text{resp.} -\infty)$ | $+\infty(\text{resp.} -\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to x_0} g(x)$ | $l' \neq 0$ | $\pm\infty$ | $l'>0$ | $l'<0$ |
| $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $+\infty(\text{resp.} -\infty)$ | $-\infty(\text{resp.} +\infty)$ |

| $\lim_{x\to x_0} f(x)$ | $l>0$ ou $+\infty$ | $l>0$ ou $+\infty$ | $l<0$ ou $-\infty$ | $l<0$ ou $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to x_0} g(x)$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ |
| $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

## 3. La Fonction Polynôme :

- La fonction polynôme est une fonction de la forme :

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, \ldots, n$ et $a_n \neq 0$. Alors :

- La fonction polynôme a même limite en $+\infty$ (ou $-\infty$) que son monôme de plus haut degré, c'est-à-dire : $\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$.

Par exemple : ■ $\lim_{x\to\pm\infty}(2x^3 - 4x^2 + 1) = \lim_{x\to\pm\infty}(2x^3) = \pm\infty$.

## 4. La Fonction Rationnelle :

- La fonction Rationnelle est une fonction de la forme : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions polynômes. En d'autre terme :

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

- Une fonction rationnelle a même limite en $+\infty$ (ou $-\infty$) que le quotient de ses monômes de plus haut degré (celui du numérateur et du dénominateur), c'est-à-dire : $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$

Par exemple :

■ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2}{x^2-2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^2}{x^2}=-3$ ■ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2}{2x^4-x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{2x^2}=0.$

## 5. Fonctions Composées

Soit à calculer $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))$, ou $f$ et $u$ deux fonctions. Supposons qu'on a :

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ($x_0, a$ et $b$ peuvent être finis ou infinis ). Alors,

$$\lim_{x\to x_0} f(u(x))=b$$

Par exemple, On calcule $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}$. On a $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}=0.$

## 2.3. Les Asymptotes :

Dans cette section, nous allons donner des interprétations géométriques au comportement de la fonction $f$ quand $x$ ou $f(x)$ tend vers $\infty$, c'est-à-dire lorsque on a affaire à l'une de ces limites: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

- **Une Droite Asymptote** à une courbe est une droite telle que, lorsque $x$ ou $f(x)$ tend vers $\infty$, la distance de la courbe à la droite tend vers $0$.
- Les asymptotes sont à rechercher lorsque $x$ ou $f(x)$ tend vers l'infini.
- Il existe trois asymptotes : Asymptote Verticale, Asymptote Horizontale et Asymptote Oblique.
- Dans tout ce qui suit $C_f$ désigne la courbe représentative de $f$.

### ■ Asymptote Verticale.

La droite $\mathfrak{D}$, d'équation $\boldsymbol{x=a}$, est dite **asymptote verticale** à la courbe représentative $C_f$ de $f$ lorsque $x$ tend vers $a$ si :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$$

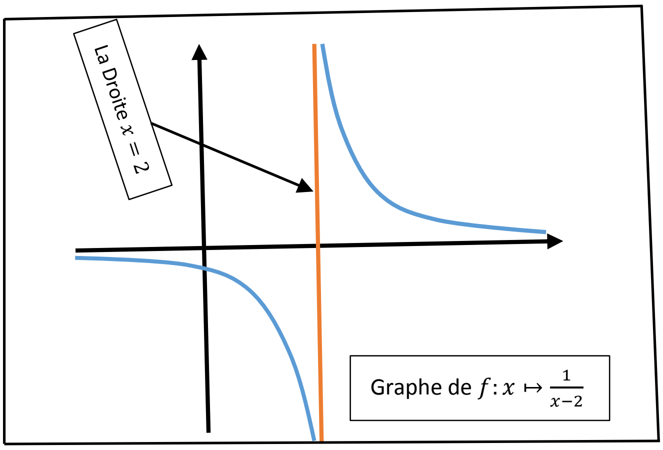
**Exemple.**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{1}{x-2}$. On a:

■ $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ ■ $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty.$

Donc $f$ possède une asymptote verticale

D'équation : $x=2$.



## ■ Asymptote Horizontale.

La droite $\mathfrak{D}$, d'équation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, est dite **asymptote horizontale** à la courbe représentative $C_f$ de $f$ lorsque $x$ tend vers $\infty$ si :

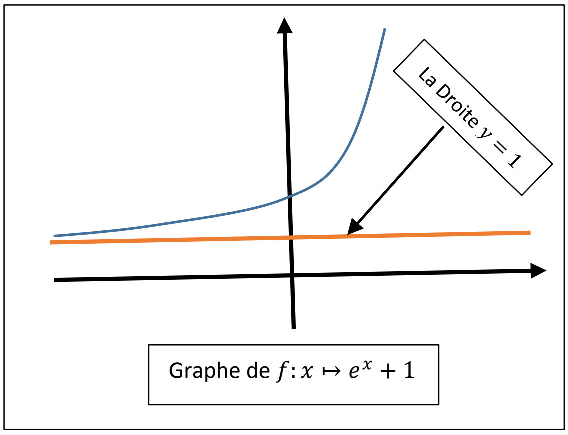
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

**Exemple.**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + 1$. On a:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1.$

Donc $f$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.




## ■ Asymptote Oblique.

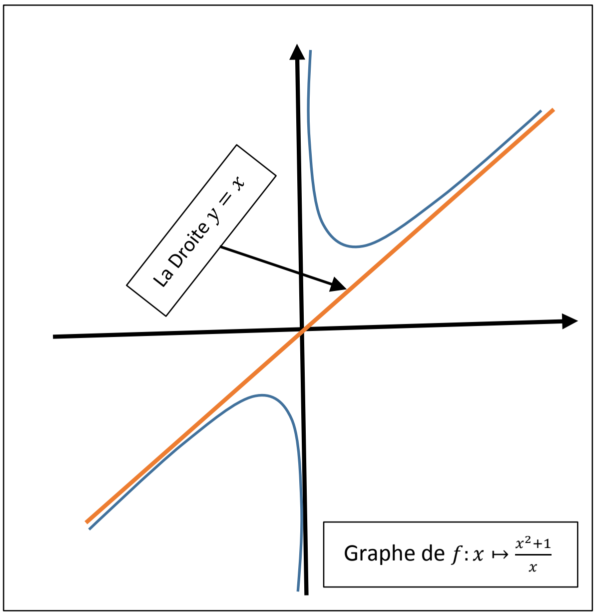
La droite $\mathfrak{D}$, d'équation $y = a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, où $a \neq 0$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est dite **asymptote oblique** à la courbe représentative $C_f$ de $f$, si :

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0 \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$$

**Exemple.**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. La droite d'équation $y = x$ est L'asymptote oblique. En effet, on a :

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$




**Remarque.**

Une définition équivalente de la définition ci-dessus est la suivante :

■ La droite $\mathfrak{D}$, d'équation $y = a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, où $a \neq 0$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est une **asymptote oblique** à la courbe représentative $C_f$ de $f$, si et seulement les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \text{avec } a \neq 0$.
3. $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b, \text{avec } b \neq \infty$.

Le même principe reste valable pour $x \to -\infty$.

**Exemple.**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$. On se propose de chercher d'éventuels asymptotes obliques. Pour cela, il suffit de vérifier les trois conditions ci-dessus. On a:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{e^x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{e^x(1+1/e^x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(1+1/e^x)} = +\infty.$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x(e^x+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1 = a, \text{avec } a \neq 0.$
- $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{xe^x}{e^x+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x+1} = 0 = b, \text{avec } b \neq \infty.$

D'où la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à droite.

Par contre, on a : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{e^x+1} = 0$. Donc, il n'existe pas d'asymptote oblique à gauche.

2.4. **La Continuité :**

Dans cette section, nous intéressons à deux propriétés des fonctions continues, qui jouent un rôle très important dans l'étude d'une fonction, à savoir :

- Le théorème des valeurs intermédiaire.
- L'étude du signe de $f$ sur un intervalle.

Nous commençons par quelques définitions.

**Définition.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ contenant $x_0$.

- On dit que $f$ est continue au point $x_0$ si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que $f$ est continue sur l'intervalle $I$ si $f$ est continue en tout point de $I$.
- Graphiquement cela signifie que l'on peut tracer la courbe représentative de $f$ sur $I$ « sans lever le crayon ».

**Exemple.**

Soit la fonction $f$ telle que : $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \neq 1 \\ -1 & si\ x = 1 \end{cases}$

Ainsi définie, $f$ n'est pas continue au point $x_0 = 1$, En effet, on a :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, et $f(1) = -1$. Donc : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$.

### 2.4.1. **Quelques Exemples de Fonctions Continues :**

■ Toutes les fonctions usuelles (Elémentaires Principales), c'est-à-dire :

- Les foncions puissances $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$,
- La fonction exponentielle $e^x$,
- La fonction Logarithme $\ln x$,

sont continues sur tout leur domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

■ Toutes les fonctions élémentaires, c'est-à-dire les fonctions construites à partir des fonctions usuelles par opérations algébriques $(+), (-), (\times)$ et $(\div)$ et composition sont continues sur tout leur domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

■ En particulier :

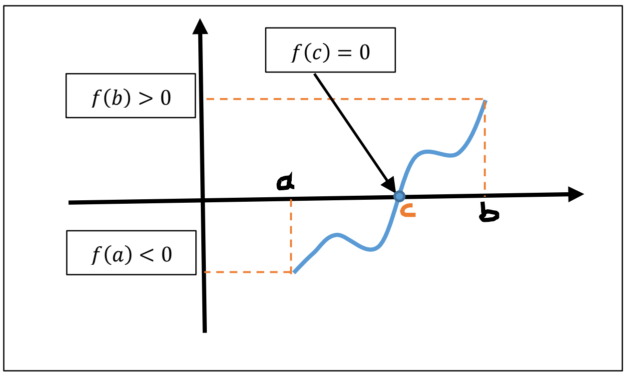
- La fonction Polynôme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonctions Rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions polynômes) est continue en tout point où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.

### 2.4.2. **Théorème des Valeurs Intermédiaires :**

Il existe plusieurs variantes du théorème des valeurs intermédiaires. On donne ici la plus connue.

■ **Théorème (TVA) :**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux nombres réels de $I$ tels que $f(a) \times f(b) < 0$ (c'est-à-dire : $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ ou $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$) alors, il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



**Exemple.**
Soit la fonction $f$ tel que $f(x) = x^3 - 2x - 3$. Vérifions qu'il existe $c \in ]1,2[$ tel que $f(c) = 0$. On a $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et $f(1) = -4$ et $f(2) = 1$, donc qu'il existe $c \in ]1,2[$ tel que $f(c) = 0$.

■ Comme conséquence du théorème (TVA), on a le corollaire suivant :

■ **Corollaire.**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ telle que : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.

Alors : soit $f(x) > 0$, pour tout $x \in I$ ou soit $f(x) < 0$, pour tout $x \in I$.

Et le signe de $f$ égale au signe de $f(x_0)$ où $x_0$ un nombre quelconque dans $I$.

■ Le corollaire dit si on a une fonction $f$ continue et ne s'annulant pas sur un intervalle, alors $f$ garde le même signe sur cet intervalle et pour déterminer le signe de $f$, il suffit de calculer la valeur de $f(x_0)$ qui sera le signe de $f$.

■ L'utilité de ce corollaire réside de son application à l'étude du signe de toute fonction continue.

### 2.4.3. Etude du Signe d'une Fonction Continue :

Dans cette section, on va donner la démarche à suivre pour déterminer le signe d'une fonction. Cette démarche se base sur le principe suivant :

■ Une fonction $f$ change de signe aux points sur lesquels n'est pas définie et aux points qui l'annulent. En d'autre terme, Le signe d'une fonction $f$ dépend de la position de $x$ par rapport aux bornes de son domaine de définition et les points qui l'annulent.

■ Les étapes suivantes, nous donne la démarche à suivre pour déterminer le signe d'une fonction $f$:

- Déterminer le domaine de définition de $f$.
- Déterminer d'éventuels points qui annulent $f$, c'est-à-dire $a \in \mathcal{D}_f, f(a) = 0$.
- Les points $a$ ainsi trouvés subdivisent le domaine $\mathcal{D}_f$ en famille d'intervalles ouverts disjoints (dont les bornes sont les points $a$ et les bornes de $\mathcal{D}_f$) sur lesquels $f$ sera continue et ne s'annule pas. Donc, $f$ est positive ou négative sur chacun de ces intervalles.

- Si $f$ ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$, dans ce cas-là, le signe de $f$ est soit positive ou négative sur les différents intervalles qui forment $\mathcal{D}_f$.

**Exemple.**

Si $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ : on a $\mathcal{D}_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ et $f(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathcal{D}_f$.

Alors, le signe de $f$ sur $\mathcal{D}_f$ est : soit $x_0 = 0 \in ]-\infty, 1[$ et $f(x_0) = f(0) = \frac{1}{-1} = -1$. Donc, le signe de $f$ sur $]-\infty, 1[$ égale au signe de $f(x_0) = -1$, c'est-à-dire négative. De même sur $]1, +\infty[$, on trouve le signe de $f$ égale au signe de $f(x_0) = f(2) = 5$, c'est-à-dire positive.

**Exemple.**

Déterminons le signe de $f(x) = \frac{4(x-1)}{x^{2/3}}$. On suit les étapes ci-dessus :

- On a $f$ est définie si $x^{2/3} \neq 0$, c'est-a-dire $x \neq 0$. Donc, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
- De plus $f(x) = 0$ si $4(x-1) = 0$, ce qui donne $x = 1$.
- Pour conclure, on a besoin du tableau suivant :

| $x$ | $-\infty \quad 0$ | | $1 \quad +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | $-1$ | $1/2$ | $2$ |
| $f(x_0)$ | $-8$ | $-2\sqrt[3]{4}$ | $4/\sqrt[3]{4}$ |
| $f(x)$ | $-$ | $-$ | $+$ |

■ En appliquant cette méthode, on peut déterminer le domaine de définition des fonctions Racine Carrée $(\sqrt{\cdot})$ et Logarithme $(\ln\cdot)$.

**Exemple.**

Essayons de donner le domaine de définition de la fonction $f$ telle que :

$$f(x) = \ln\left(\frac{4(x-1)}{x^{2/3}}\right).$$

On a $f$ est définie si et seulement si $\frac{4(x-1)}{x^{2/3}} > 0$. Du tableau ci-dessus on déduit que $f$ est définit si et seulement si $x \in ]1, +\infty[$. Ce qui signifie que le domaine de définition est $\mathcal{D}_f = ]1, +\infty[$.

2.5. **La Dérivée :**

La dérivée est l'outil le plus important dans l'étude de fonction. Elle nous permet de déterminer : l'équation de la tangente à la courbe, la levée des formes d'indéterminations, le sens de variation, les extremums, les domaines de convexités, les points d'inflexion…

Avant d'en arriver aux applications, nous donnons les règles de calculs de la dérivée des différentes fonctions élémentaires. Nous commençons tout d'abord par donner certaines notions sur la dérivée.

### 2.5.1. **Définitions :**

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

#### ■ **La Dérivée en un Point :**

- On dit que $f$ est **dérivable** au point $x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe.
  Cette limite appelée **dérivée** en $x_0$ ; on la note $\boldsymbol{f'(x_0)}$.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe on dit que $f$ est dérivable à droite en $x_0$, et cette limite est appelée dérivée à droite de $f$ en $x_0$, et notée $f_d(x_0)$.
- On définit de même la dérivée à gauche en $x_0$, notée $f_g(x_0)$.
- $f$ est dérivable en $x_0$ si, et seulement si $f$ admet en $x_0$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche égales.

**Exemples.**

- Si $f$ est constante sur $I$, alors $f$ est dérivable en tout $x_0 \in I$ et $f'(x_0) = 0$.
  En effet, pour $x$ et $x_0 \in I$ avec $x \neq x_0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{0}{x-x_0} = 0$.
- Soit $f$ telle que $f(x) = x^2$, alors $f$ est dérivable en $x_0 = 2$ et $f'(2) = 4$.
  En effet, on a $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4$.
- Par contre, si $f$ est définie par $f(x) = \sqrt[3]{x}$, alors $f$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.
  En effet, on a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$.

#### ■ **La Fonction dérivée :**

On dit que $f$ est dérivable sur l'intervalle $I$ si $f$ est dérivable en tout $x_0 \in I$, et on appelle **Fonction dérivée** de $f$, notée $f'$, la fonction définie sur $I$ par $x \mapsto f'(x)$.

#### ■ **Les Dérivées Successives :**

- Soit $f$ une fonction dérivable sur $I$ et soit $f'$ sa dérivée. Si la fonction $f'$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de $f$. Plus généralement on note : $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$ et $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

- Une fonction $f$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ si, $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et si, sa dérivée $n^{\text{ième}}$, $f^{(n)}$, est continue sur $I$.
- Une fonction $f$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ si, pour tout entier $n$ $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$.
- Toute les fonctions élémentaires sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition, bornes exclues.

2.5.2. **Calcul de la Dérivée :**

Le calcul de la dérivée d'une fonction $f$ dépend de l'expression de la fonction $f$, à savoir si : ■ $f$ est une fonction usuelle ■ $f$ est une fonction composée ■ $f$ est combinaison par opérations algébriques $(+), (-), (\times)$ et $(\div)$ des fonctions usuelles et des fonctions composées.

■ **Dérivée des Fonctions Usuelles :**

On s'intéresse seulement aux dérivées des fonctions usuelles suivantes :

■ La Fonction Puissance ■ La Fonction Exponentielle ■ La Fonction Logarithme.

1. **La Dérivée de la Fonction Puissance $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$:**

La dérivée : $(\boldsymbol{x^\alpha})' = \boldsymbol{\alpha x^{\alpha-1}}$.

Si $\alpha = n$ : $(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{n x^{n-1}}$. Par exemple : $(x)' = 1, (x^2)' = 2x, (x^3)' = 3x^2, \ldots$

Si $\alpha = \frac{1}{n}$ : $\left(\boldsymbol{x^{1/n}}\right)' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n x^{n-1}}}$. En effet, $\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{-\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n x^{n-1}}$.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ : $\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\sqrt{x}}}$. Sachant que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Si $\alpha = \frac{1}{3}$ : $\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}\right)' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3x^{2/3}}}$. Sachant que $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

La dérivée : $\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^\alpha}}\right)' = \frac{\boldsymbol{-\alpha}}{\boldsymbol{x^{\alpha+1}}}$. En effet, $\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)' = (x^{-\alpha})' = -\alpha x^{-\alpha-1} = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$.

2. **La Dérivée de la Fonction Exponentielle $e^x$:**

La dérivée : $(\boldsymbol{e^x})' = \boldsymbol{e^x}$.

3. **La Dérivée de la Fonction Logarithme $\ln(x)$:**

La dérivée : $(\ln \boldsymbol{x})' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}$.

■ **Dérivée des Fonctions Composées :**

**Une fonction composée** est une fonction de la forme : $\boldsymbol{f(u(x))}$, où $f(x)$ est une fonction usuelle, $u(x)$ une autre fonction telle que $u(x) \neq x$.

En d'autre terme, une fonction composée est une fonction obtenue en remplaçant, dans la fonction usuelle $f(x)$, la variable $x$ par une autre fonction $u(x)$ différente de $x$.

**Sa Dérivée.** La formule de dérivation d'une fonction composée est :

$$[f(u(x))]' = u'(x)f'(u(x))$$

**Exemple.** Quelques exemples de fonctions composées :

■ $(x^2+3x+1)^6$ est une fonction composée de la forme $f(u(x))$ où $f$ est la fonction usuelle avec $f(x)=x^6$ et $u(x)=x^2+3x+1$.

■ $e^{-x^2}$ est une fonction composée de la forme $f(u(x))$ où $f$ est la fonction usuelle avec $f(x)=e^x$ et $u(x)=-x^2$.

■ $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est une fonction composée de la forme $f(u(x))$ où $f$ est la fonction usuelle avec $f(x)=\ln x$ et $u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

1. **Dérivée de la Fonction Puissance Composée $(u(x))^\alpha$ :**

- $[(u(x))^\alpha]' = \alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$.

Par exemple, $[(x^2+3x+1)^6]' = 6(2x+3)(x^2+3x+1)^5$.

Cas Particuliers :

- $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Par exemple, $\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

- $\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)' = \frac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}}$.
- $\left(\frac{1}{(u(x))^\alpha}\right)' = \frac{-\alpha u'(x)}{(u(x))^{\alpha+1}}$.

Par exemple ■ $\left(\frac{1}{(x^2+1)^{2/3}}\right)' = \frac{-\frac{2}{3}(2x)}{(x^2+1)^{5/3}} = \frac{-4x}{3(x^2+1)^{5/3}}$ ■ $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$.

2. **Dérivée de la Fonction Exponentielle Composée $e^{u(x)}$:**

- $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$.

Par exemple : ■$\left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$ ■ $(e^{-x})' = -e^{-x}$ ■ $\left(e^{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}}$.

## 2. **Dérivée de la Fonction Logarithme Composée $\ln(u(x))$:**

- $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Par exemple ■$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Nous résumons ce qu'on vient de voir sous forme d'un tableau :

**Tableau Des Dérivées De Quelques Fonctions Elémentaires Et De leurs Composées**

| **Dérivées des Fonctions Usuelles** | | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $f'(x)$ | **Exemple** |
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $(x^2)' = 2x$ |
| | | $(x^n)' = nx^{n-1}$ |
| | | $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| | | $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{-1}{2x^{3/2}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | |
| $\ln x$ | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | |
| **Dérivées des Fonctions composées** | | |
| $f(u(x))$ | $[f(u(x))]' = u'(x)f'(u(x))$ | **Exemple** |
| $(u(x))^\alpha$ | $\alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$ | $\left[\left(x^3+\sqrt{x}\right)^5\right]' = 5(3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}})\left(x^3+\sqrt{x}\right)^4$ |
| | | $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$<br>$\left(\sqrt{x^2+e^x}\right)' = \frac{2x+e^x}{2\sqrt{x^2+e^x}}$ |
| $\frac{1}{(u(x))^\alpha}$ | $\frac{-\alpha u'(x)}{(u(x))^{\alpha+1}}$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{u(x)}}\right)' = \frac{-u'(x)}{2(u(x))^{3/2}}$<br>$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+e^x}}\right)' = \frac{-(2x+e^x)}{2(x^2+e^x)^{3/2}}$ |
| $e^{u(x)}$ | $u'(x)e^{u(x)}$ | $\left(e^{-(x^2+x)}\right)' = -(2x+1)e^{-(x^2+x)}$ |
| $\ln u(x)$ | $\frac{u'(x)}{u(x)}$ | $(\ln(x^3+x))' = \frac{3x^2+1}{x^3+x}$ |

■ **Operations sur les Dérivées :**

Dans ce paragraphe, nous donnons les règles de calculs de la dérivée d'une fonction qui s'écrit comme combinaison par opérations algébriques d'autre fonctions.

- $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$.

Par exemple : $(x^2+e^{-3x})' = 2x-3e^{-3x}$.

- $\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

Par exemple : $\left(x^2e^{-x^2}\right)' = 2xe^{-x^2}+x^2\left(-2xe^{-x^2}\right) = -2(x^3-x)e^{-x^2}$.

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$.

Par exemple : $\left(\frac{x^2+1}{x^3+x}\right)' = \frac{2x(x^3+x)-(x^2+1)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \frac{-3x^4+2x^3-4x^2+2x-1}{(x^3+x)^2}$.

2.6. **Applications de la Dérivée :**

Dans cette section, nous allons voir les différentes applications de la dérivée, à savoir : à déterminer les intervalles de croissance et de décroissance, les extremums, les intervalles de concavité, les points d'inflexion, …

La plus part des applications de la dérivée se déduit du signe de $f'$ ou du signe de $f''$. On a vu comment faire une étude du signe d'une fonction (voir section 2.4.3.), on va le rappeler ici pour $f'$. Pour cela on a besoin de la définition suivante :

**1. Point Critique.**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, et $f'$ sa dérivée.

On dit qu'un point $x_0 \in \mathcal{D}_f$ est un **point critique** de la fonction $f$, si :

1. $f'(x_0)=0$, ou

2. $f'(x_0)$ n'est pas définie.

**Exemple.** La recherche des points critiques :

■ Soit $f(x)=x^2$, on a $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ et $f'(x)=2x$.
On a $f'$ est définie sur $\mathbb{R}$, et $f'(x)=0$, si $x=0$.

D'où, $x = 0$ est le seul point critique.

■ Soit $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}}$.
On a $f'$ n'est pas définie en $x = 1$, et $f'(x) \neq 0$, sur $\mathbb{R}$.
D'où, $x = 1$ est le seul point critique.

■ Soit $f(x) = x^3 + x$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 1$.
On a $f'$ est définie sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.
D'où, $f$ n'admet pas de points critiques.

2. **Etude du signe de la Dérivée $f'$:**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, et $f'$ sa dérivée. Alors l'étude du signe de $f'$ sur $\mathcal{D}_f$ se fait comme suit :

■ On cherche les points critiques de $f$, c'est-à-dire :

1. Chercher les $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f'(x)$ n'est pas définie.

2. Chercher les $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f'(x) = 0$.

■ Les points critiques (les points trouvés en (1.) et (2.)) subdivisent $\mathcal{D}_f$ en famille d'intervalles ouverts et disjoints.

Alors $f'$ est positive ou négative sur chacun de ces intervalles.

2.6.1. **Croissance et Décroissance des Fonctions :**

**Théorème.**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors :

- Si $f'(x) \geq 0$, pour tout $x$ dans $]a,b[$, alors $f$ est croissante sur $[a,b]$.
- Si $f'(x) \leq 0$, pour tout $x$ dans $]a,b[$, alors $f$ est décroissante sur $[a,b]$.
- Si $f'(x) = 0$, pour tout $x$ dans $]a,b[$, alors $f$ est constante sur $[a,b]$.
- Si $f'(x) > 0$, pour tout $x$ dans $]a,b[$, alors $f$ est strictement croissante.
- Si $f'(x) < 0$, pour tout $x$ dans $]a,b[$, alors $f$ est strictement décroissante.

**Remarque.**

Le théorème nous informe que pour déterminer les intervalles de croissance ou de décroissance d'une fonction $f$, il suffit de déterminer les intervalles sur lesquels la dérivée est positive ou négative. Donc revient à étudier le signe de la dérivée $f'$.

**<u>Exemple.</u>** Déterminer les intervalles de croissance ou de décroissance de $f$ :

Où $f(x) = x^3 - 12x - 5$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

On cherche les points critiques de $f$ . Tout d'abord, on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Ainsi $f'$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus $f'(x) = 0$ si, et seulement si : $3x^2 - 12 = 0$.

Ce qui nous donne $x^2 = 4$, et par conséquence : $x = 2$ ou $x = -2$.

Donc $f$ admet deux points critiques : $x = 2$ ou $x = -2$.

Ces points critiques subdivisent le domaine ce définition $\mathbb{R}$ en trois intervalles

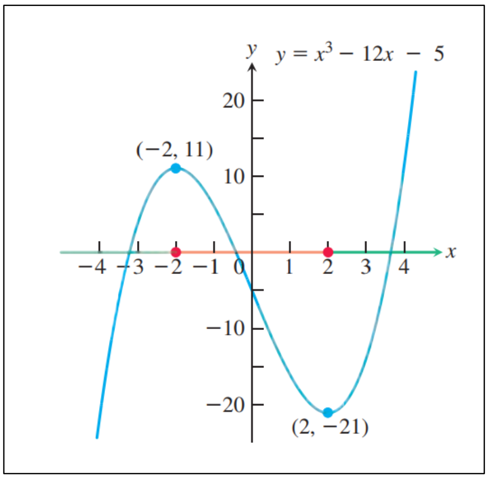
$$]-\infty, -2[, ]-2,2[ \text{ et } ]2, +\infty[$$

Et le signe de $f'$ sera donné par le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $-$ | $+$ | |

Du tableau, on déduit facilement que $f$ est croissante sur les intervalles $]-\infty, -2], [2, +\infty[$. Et $f$ est décroissante sur l'intervalle $[-2,2]$.

Ci-contre, on a la représentation graphique de $f$. Sur le graphe, on peut voir que la courbe est montante ($f$ est croissante) sur $]-\infty, -2], [2, +\infty[$, et la courbe est descendante($f$ est croissante) sur $[-2,2]$.



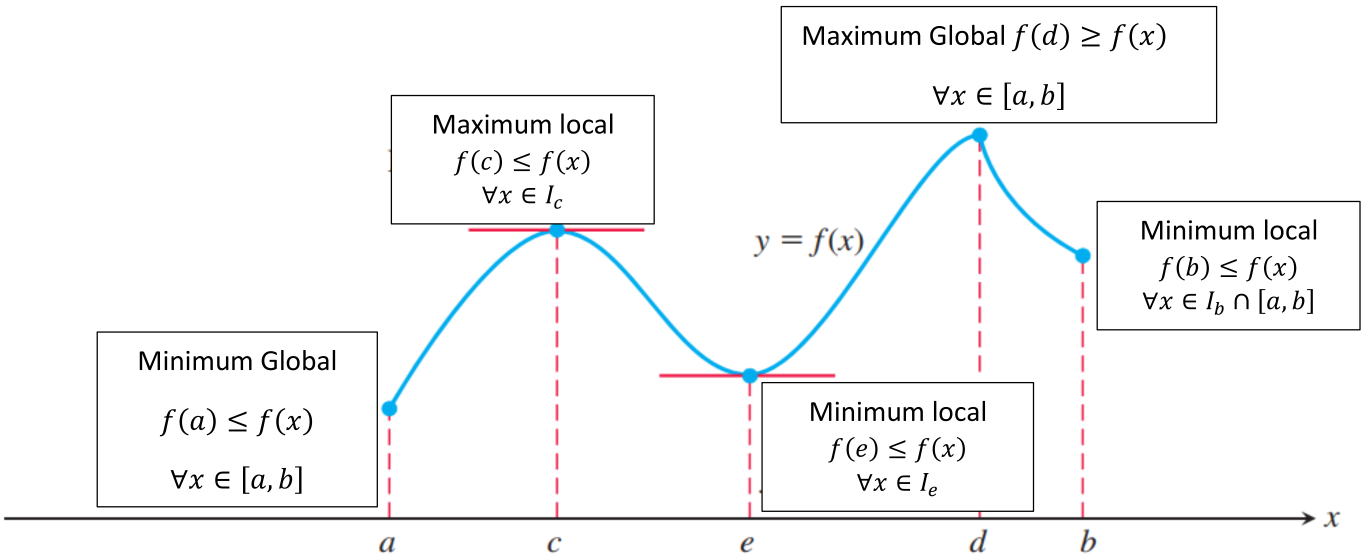
2.6.2. **Les Extremums :**

Dans cette section, on va voir comment localiser et identifier un extremum (maximum, minimum) d'une fonction à partir de sa première dérivée.
Tout d'abord, on introduit quelques définitions. Dans ce qui suit, on désigne par $I_{x_0} \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle ouvert contenant $x_0$.

**1. Definitions.**

- On dit que $f$ admet un **maximum global** en $x_0$ dans son domaine $\mathcal{D}_f$, si
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}_f$$
- On dit que $f$ admet un **minimum global** en $x_0$ dans son domaine $\mathcal{D}_f$, si
$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}_f$$
- On dit que $f$ admet un **extremum global** en $x_0$, si $f$ admet un maximum global ou un minimum global en ce point.
- On dit que $f$ admet un **maximum local** en $x_0$ dans son domaine $\mathcal{D}_f$, si
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{pour tout } x \in I_{x_0}$$
- On dit que $f$ admet un **minimum local** en $x_0$ dans son domaine $\mathcal{D}_f$, si
$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{pour tout } x \in I_{x_0}$$
- On dit que $f$ admet un **extremum local** en $x_0$, si $f$ admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

Le graphe suivant illustre les différents cas d'extremums de $f$ sur l'intervalle $[a, b]$.




Dans ce qui suit, on donne la démarche à suivre pour déterminer les extremums d'une fonction. Dans le premier cas, on fait la cherche des extremums sur le domaine de définition tout entier. Dans le deuxième cas, on restreint la recherche des extremums sur un intervalle fermé borné.

## 2. La Recherche D'Extremums Locaux sur le Domaine de Définition de $f$:

Le problème qui se pose est de déterminer, parmi tous les points du domaine de définition de $f$, un point qui sera un extremum local. La détermination des extremums se fait en deux étapes :

**La 1ere étape** consiste à déterminer quels sont les points candidats aux extremums.

**La 2eme étape** consiste à faire passer un test aux points candidats. Ce test permet de donner quel point est un extremum et celui qui ne l'est pas.

### ■ Les Points Candidats.

Les points candidats aux extremums sont déterminés par le théorème suivant :

**Théorème.**

Soit $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle ouvert $I$. Si $f$ admet un **extremum local** en $x_0$, alors $x_0$ est **un point critique** de $f$.

■ Le théorème nous assure que les seuls points candidats aux extremums sont les points critiques de $f$, a savoir :

- Les $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f'(x) = 0$ ou,
- Les $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f'(x)$ n'est pas définie ( n'est pas dérivable ).

■ Donc, pour chercher les extremum de $f$, il faut commencer par déterminer les points critiques de $f$.

■ Si $f$ n'admet pas de points critiques, on dit que $f$ n'admet pas d'extremums.

### ■ Le 1er Test - Le Test par la Première Dérivée.

Le théorème suivant nous donne le test à faire passer aux points critiques pour distinguer ceux qui sont des extremums et ceux qui ne le sont pas. De plus le théorème nous donne la nature de chaque extremum : maximum ou minimum.

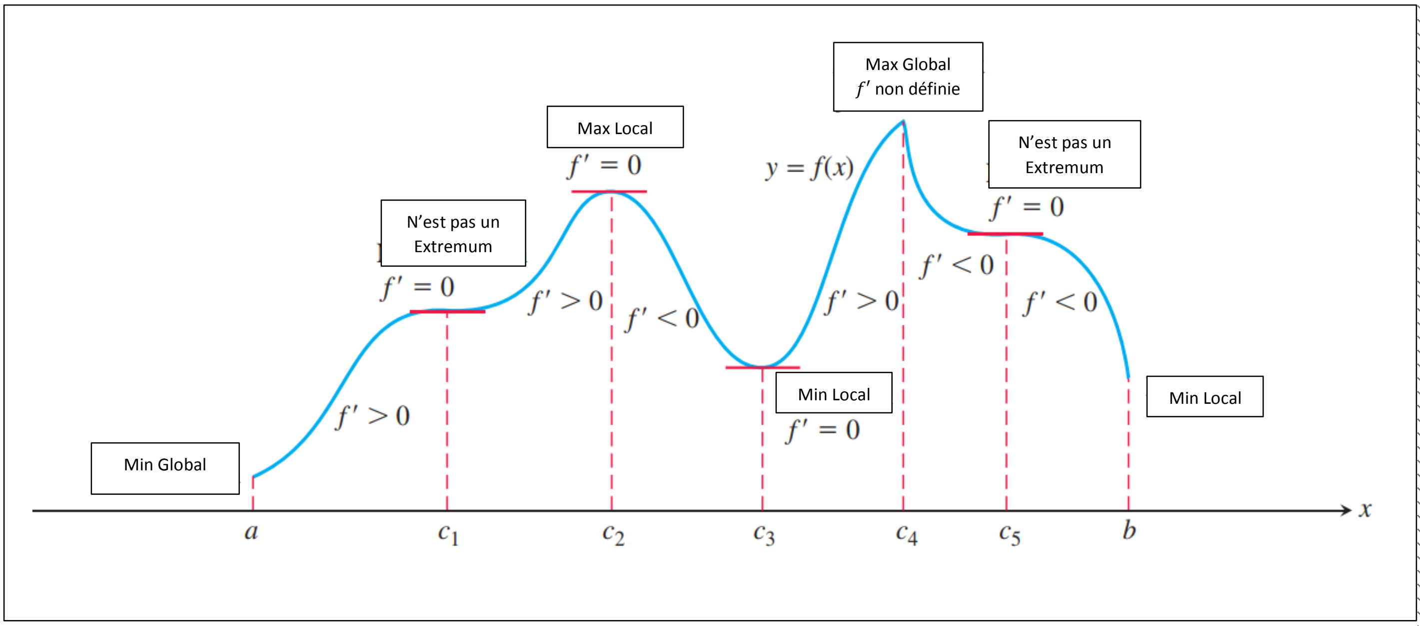
### ■ Théorème - Le Test par la Première Dérivée.

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $I$. Et $x_0 \in I$ un point critique de $f$. Si, en allant de gauche à droite du point critique $x_0$, la dérivée :

- $f'$ change de signe en passant du signe $(-)$ vers le signe $(+)$, $f$ admet un minimum local en $x_0$.

- $f'$ change de signe en passant du signe $(+)$ vers le signe $(-)$, $f$ admet un maximum local en $x_0$.
- $f'$ ne change pas de signe, $f'$ passe du signe $(-)$ vers le signe $(-)$ ou du signe $(+)$ vers le signe $(+)$, $f$ n'admet pas d'extremum en $x_0$.

■ La représentation graphique illustrant le théorème ci-dessus.




**<u>Exemples.</u>** Trouver les extremums de $f$ dans les cas suivants :

- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Premièrement, on détermine les points critiques de $f$. On a :

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$= (x-1)(x-3).$$

La première dérivée $f'$ est bien définie et de plus $f'(x) = 0$ si

$$x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Ainsi, $f$ admet deux points critiques : $x = 1$ et $x = 3$.

Ces points critiques subdivisent l'ensemble de définition $\mathbb{R}$ en trois intervalles ouverts $]-\infty, 1[, ]1,3[$ et $]3, +\infty[$ sur lesquels $f'$ ne change pas de signe.

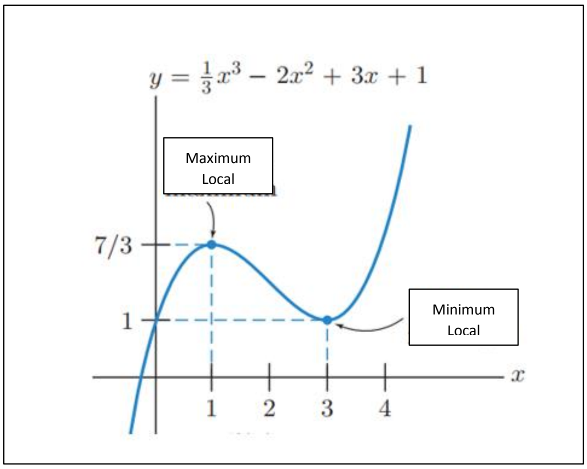
Le signe de $f'$ est donné par le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $-$ | $+$ | |

Du tableau, $f'$ passe du signe $(+)$ au signe $(-)$ au point $x = 1$. Donc $f$ admet un maximum local en $x = 1$, sa valeur $f(1) = \frac{7}{3}$. Aussi, $f'$ passe du signe $(-)$ au signe $(+)$ au point $x = 3$. Donc $f$ admet un minimum local en $x = 3$, sa valeur $f(3) = 1$.

Ci-contre, la représentation graphique de $f$ :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$




- $f(x) = (3x-1)^3$. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Premièrement, on détermine les points critiques de $f$. On a :

$$f'(x) = 9(3x-1)^2.$$

La première dérivée $f'$ est bien définie et de plus $f'(x) = 0$ si

$$9(3x-1)^2 = 0 \Rightarrow 3x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, $f$ admet un seul point critique : $x = \frac{1}{3}$.

Ce point critique subdivise l'ensemble de définition $\mathbb{R}$ en deux intervalles ouverts $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ et $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ sur lesquels $f'$ ne change pas de signe. De l'expression de $f'(x) = 9(3x-1)^2$, on déduit que $f'$ est positive sur les deux intervalles, donc ne change pas de signe en passant par le point $x = \frac{1}{3}$ et par conséquent, $f$ n'admet pas d'extremum local.

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

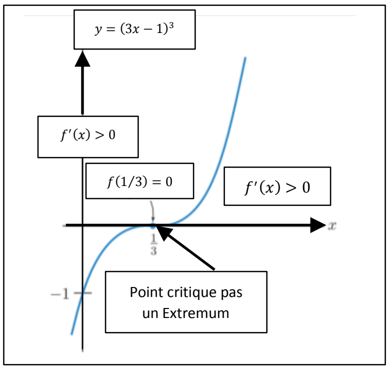
Premièrement, on détermine les points critiques de $f$. On a :

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

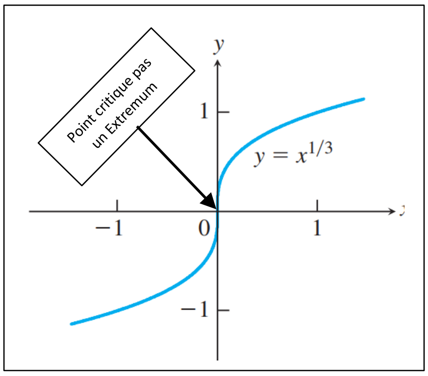
La première dérivée $f'$ n'es pas définie en $x = 0$ et de plus $f'(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $f$ admet un seul point critique : $x = 0$.

Ce point critique subdivise l'ensemble de définition $\mathbb{R}$ en deux intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ sur lesquels $f'$ ne change pas de signe. De l'expression de $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$, on déduit que $f'$ est positive sur les deux intervalles, donc ne change pas de signe en passant par le point $x = 0$ et par conséquent, $f$ n'admet pas d'extremum local.




Graphe de $f$
$f(x) = (3x-1)^3$




Graphe de $f$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$

## ■ Le 2^eme Test - Le Test par la Deuxième Dérivée.

Ce deuxième test permet seulement de tester les points critiques qui annulent la première dérivée, c'est-à-dire : $x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = 0$. Le théorème suivant montre comment appliquer ce deuxième test.

## ■ Théorème - Le Test par la Deuxième Dérivée.

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $I$. Et $x_0 \in I$ de $f$. Alors :

- Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors $f$ admet un minimum local en $x_0$.
- Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, alors $f$ admet un maximum local en $x_0$.
- Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$, alors le test ne peut rien conclure.

**Exemple.** Trouver les extremums de $f$ dans le cas suivant :

- $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Premièrement, on détermine les points critiques de $f$. On a :

$$f'(x) = 3x^2 - 18x - 48.$$

La première dérivée $f'$ est bien définie et de plus $f'(x) = 0$ si

$$3x^2 - 18x - 48 = 0.$$

En factorisant, on obtient :

$$3(x+2)(x-8) = 0, \text{donc } x = -2 \text{ ou } x = 8.$$

Ainsi, $f$ admet deux points critiques : $x = -2$ et $x = 8$. De plus, on a :

$$f''(x) = 6x - 18.$$

Ainsi, on a le test suivant :

$f''(-2) = 6(-2) - 18 = -30 < 0$, donc $f$ admet un maximum local en $x = -2$.
Aussi, $f''(8) = 6(8) - 18 = 30 > 0$, donc $f$ admet un minimum local en $x = 8$.

**Remarques.**

- Le Test par la Deuxième Dérivée ne peut tester que les $x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = 0$.
- Le Test par la Deuxième Dérivée ne permet pas de conclure dans le cas $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$. Par exemple, $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^4$, les deux vérifient $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ et $g'(x) = g''(x) = 0$. Cependant $x = 0$ est un minimum pour $g$, mais n'est pas un extremum pour $f$.
- Le Test par la Première Dérivée est plus approprié, il permet de conclure dans tous les cas.

3. **La Recherche D'Extremums Globaux sur Un intervalle Fermé Borné $[a, b]$:**

Dans la section précédente, on a vu comment chercher les extremums locaux, et deux situations peuvent se présenter dans la recherche des extremums de $f$:

- La fonction $f$ peut n'admettre aucun extremum global.
- La fonction $f$ peut n'admettre aucun extremum.

Par contre, dans cette section, on va voir que si on réduit le domaine de $f$ à un intervalle $[a, b]$, $f$ va admettre toujours au moins deux extremums : un minimum global et un maximum global.

Dans ce qui suit, on va présenter deux résultats :

- Le premier résultat nous assure l'existence de deux extremums globaux.
- Le deuxième résultat nous donne la méthode pour chercher ces extremums.

On commence par énoncer le premier résultat :

**Théorème – Existence D'Extremums Globaux :**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors $f$ admet un minimum global $m$ et un maximum global $M$. En d'autre terme : Il existe deux nombres $x_1$ et $x_2$ dans $[a, b]$ tels que, $f(x_1) = m, f(x_2) = M$ et $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$.

■ Le théorème nous assure seulement l'existence des extremums. On ne connait pas les valeurs de $x_1$ et de $x_2$. Dans ce qui suit, on va donner la méthode pour chercher les valeurs de $x_1$ et de $x_2$.

### ■ Méthode Pratique de Recherche des Extremums Globaux :

La recherche d'extremums globaux d'une fonction $f$ sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ se fait en trois étapes :

**<u>Etape 1 :</u>** Déterminer les points candidats à l'extremum, à savoir :

1. Les points critiques de $f$ sur $[a, b]$ :

- $x \in [a, b], f'(x) = 0.$
- $x \in [a, b]$ tel que $f'(x)$ n'est pas définie.

2. Les extrémités de L'intervalle $[a, b]$, $a$ et $b$.

**<u>Etape 2 :</u>** Calculer La valeur de $f$ en chacun des points candidats.

**<u>Etape 3 :</u>** Parmi les valeurs de $f$ calculées dans l'étape 2 :

- La plus grande valeur est le maximum global.
- La plus petite valeur est le minimum global.

**<u>Exemples.</u>** Déterminer le maximum global et le minimum global de $f$ sur $[a, b]$ dans les cas suivant :

- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ et $[a, b] = [0,4]$.

Premièrement, on détermine les points critiques de $f$ sur $[0,4]$. On a :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2).$$

La première dérivée $f'$ est bien définie et de plus $f'(x) = 0$ si

$$6(x^2 - x - 2) = 0.$$

En factorisant, on obtient :

$$6(x - 2)(x + 1) = 0, \text{donc } x = 2 \text{ ou } x = -1.$$

Comme $-1 \notin [0,4]$, $f$ admet un seul point critique sur $[0,4], x = 2$.

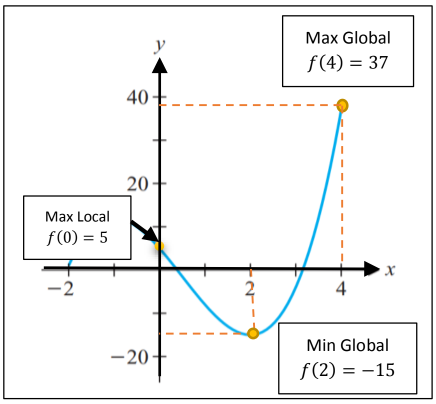
Les valeurs de $f$ au point critique $x = 2$ et aux extrémités $x = 0$ et $x = 4$, sont :

| $x$ | $2$ | $0$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-15$ | $5$ | $37$ |

Du tableau, on déduit :

- $f(2) = -15$, le minimum global.
- $f(4) = 37$, le maximum global.

Ci-contre, le graphe de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.



2.6.3. **Concavité et Points D'inflexion :**

Nous avons vu, dans les sections précédentes, comment la première dérivée peut nous aider à déterminer où la fonction $f$ est croissante, où elle est décroissante, et quel point critique de $f$ est un maximum local ou un minimum local. Dans cette section, nous allons voir que la deuxième dérivée nous donne des informations sur la courbure (concavité ) de la courbe de $f$, et les points où la courbe change de courbure.

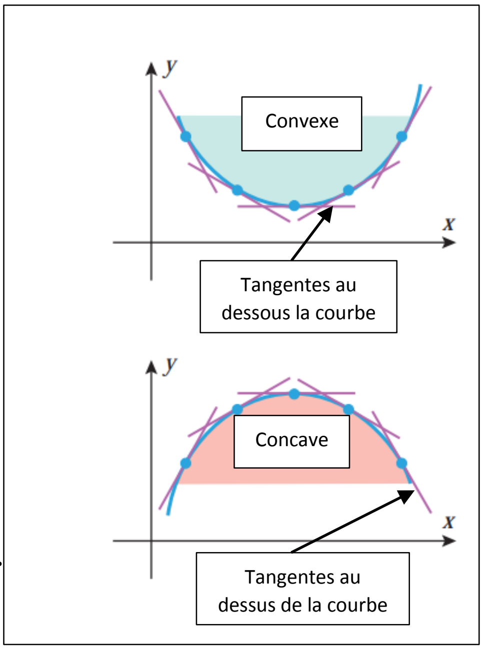
1. **Concavité :**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$.

- Une fonction $f$ est dite **convexe** sur l'intervalle ouvert $I$ si la fonction dérivée $f'$ est croissante sur l'intervalle $I$.
- Une fonction $f$ est dite **concave** sur l'intervalle ouvert $I$ si la fonction dérivée $f'$ est décroissante sur l'intervalle $I$.

■ Géométriquement, une fonction $f$ est **convexe** sur un intervalle ouvert $I$ si ses tangentes sont au-dessous de sa courbe et elle est **concave** si ses tangentes sont au-dessus de sa courbe.

■ De façon générale, une fonction est convexe si sa courbe présente une bosse vers le bas et elle est Concave si sa courbe présente une bosse vers le haut. Comme le montre la figure ci-contre.




■ Dans ce qui suit, on va voir comment, à l'aide de la deuxième dérivée d'une fonction $f$, on peut déterminer les intervalles sur lesquels $f$ est convexe ou concave.

2. **Test de la Concavité par la Deuxième Dérivée :**

**Théorème sur la Concavité.**

Soit $f$ une fonction deux fois dérivables sur un intervalle ouvert $I$.

- Si $f''(x) > 0$ pour tout $x$ dans $I$, alors $f$ est convexe sur $I$.
- Si $f''(x) < 0$ pour tout $x$ dans $I$, alors $f$ est concave sur $I$.

■ Ce théorème nous donne le moyen pour déterminer les intervalles sur lesquels $f$ est convexe ou concave. Pour cela, il suffit de déterminer les intervalles sur lesquels $f''$ est positive ou négative, donc à étudier le signe de $f''$.

3. **Point d'inflexion :**

■ Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $I$, et soit $c$ un élément appartenant à l'intervalle $I$. On dit que le point $(c, f(c))$ est un **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}_f$ de $f$ lorsque la concavité de $f$ passe de concave au convexe (ou du convexe au concave) en ce point.

■ Pour déterminer les points d'inflexion, on suit deux étapes :

- **Etape 1 :** On détermine les points candidats aux points d'inflexion.
- **Etape 2 :** On fait le test par la deuxième dérivée aux points candidats qui déterminera les points d'inflexion de ceux qui ne le sont pas.

■ **Points Candidats aux Points D'Inflexion**

Les points candidats aux points d'inflexion sont déterminés par ce théorème :

**Théorème.**

Si $(c, f(c))$ est un point d'inflexion, alors $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ est indéfinie.

■ Le théorème nous assure que les seuls points candidats aux points d'inflexion sont les points qui annulent $f''$ et les points sur les quels $f''$ est indéfinie.

■ Donc, pour chercher les points d'inflexion, il faut commencer par déterminer les points candidats aux points d'inflexion.

■ Si $f$ n'admet pas de points candidats aux points d'inflexion, on dit que $f$ n'admet pas de points d'inflexion.

■ **Le Test - Le Test par la Deuxième Dérivée.**

Le théorème suivant nous donne le test à faire passer aux points candidats pour distinguer ceux qui sont des points d'inflexion et ceux qui ne le sont pas.

■ **Théorème - Le Test par la Deuxième Dérivée.**

Soit $f$ une fonction deux fois dérivables sur un intervalle ouvert $I$. Et soit $c \in I$, tel que $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ est indéfinie. Alors,

- Si $f''$ change de signe en $c$, $(c, f(c))$ est un point d'inflexion.
- Si $f''$ ne change pas de signe en $c$, $(c, f(c))$ n'est pas un point d'inflexion.

**Exemples** Déterminer la concavité, les points d'inflexion dans les cas suivants :

- $f(x) = x^4 - 4x^3$. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, on détermine la deuxième dérivée :

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Longrightarrow f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$.

On a : $f''$ est bien définie et $f''(x) = 0$ si

$$x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Ainsi, $x = 0$ et $x = 2$ sont les seuls points candidats aux points d'inflexion. De plus, ils subdivisent le domaine de $f$ en trois intervalles $]-\infty, 0[, ]0,2[$ et $]2, +\infty[$ sur lesquels $f''$ ne change pas de signe. Le signe de $f''$ est donné par le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''$ | $+$ | | $-$ | $+$ |

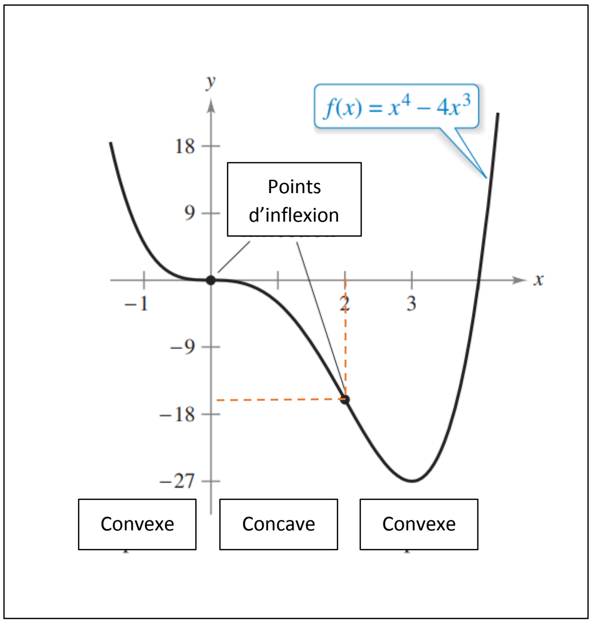
Du tableau, on déduit :

- $f$ est convexe sur $]-\infty, 0]$ et $[2, +\infty[$.
- $f$ est concave sur $[0,2]$.

De plus $f$ admet deux points d'inflexion :

- $(0, f(0)) = (0,0)$ et $(2, f(2)) = (2, -16)$.

Ci-dessous la représentation graphique de $f$.



2.6.4. **Formes Indéterminées :**

Dans cette section, on va voir comment lever les formes indéterminées du type :

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ 0\infty, \ \ +\infty-\infty.$$

1. **Formes indéterminées.** $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ :

La règle pour lever ce type d'indétermination est la **Règle de l'Hôpital :**

**Règle de l'Hôpital.**

Supposons que $f$ et $g$ deux fonctions dérivables et $g(x) \neq 0$ pour tout $x$ proche de $x_0$ (sauf peut être en $x_0$). Supposons que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Ou bien

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \ (\text{ou} = \infty)$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \ (\text{ou} = \infty)$.

**Remarque.**

- La Règle de l'Hôpital s'applique aussi pour $x \to \infty$.
- Pour trouver $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ par la Règle de l'Hôpital, on doit continuer de calculer les dérivées (successives) de $f$ et $g$ tant que on obtient encore la forme $\frac{0}{0}$ $\left(\text{ou} \frac{\infty}{\infty}\right)$. Mais dès que l'une ou les deux de ces dérivées (successives) est $\neq 0 (\text{ou } \neq \infty)$ quand $x \to x_0 (\text{ou } x \to \infty)$ on arrête le processus de dérivation.

**Exemples.** Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$. On a: $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} (x-1) = 0$

Donc on peut appliquer l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$. On a: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

Donc on peut appliquer l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}}{2x}$$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$

Donc on peut appliquer encore l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{4(1+x)^{3/2}}}{2}=-\frac{1}{8}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2}$. On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

Donc on peut appliquer l'Hôpital :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x^2}\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{x^2}}{2x}=\lim_{x\to+\infty} e^{x^2}=+\infty$$

2. **Formes indéterminées.** $0\infty$ (ou $\infty 0$):

Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Alors la limite

$$\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)$$

est une forme indéterminée du type $0\infty$. Dans ce cas, on écrit le produit $fg$ comme un quotient :

$$fg=\frac{f}{1/g}\ \text{ou}\ fg=\frac{g}{1/f}$$

Ceci transforme $0\infty$ en une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ donc on peut appliquer l'Hôpital.

**Exemple.** Calculons la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ est une indéterminée de la forme $0\infty$. En Ecrivant $x=1/(1/x)$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, donc la règle de l'Hôpital nous donne :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

3. **Formes indéterminées.** $+\infty-\infty$ (ou $-\infty+\infty$):

Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, alors la limite

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)$$

est une forme indéterminée du type $+\infty-\infty$. Dans ce cas, on écrit la différence $f-g$ comme un quotient (par exemple, en utilisant le commun dénominateur, ou en factorisant… )

**Exemple.** Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{(e^x-1)+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x\right)\left[\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)-1\right]$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty} x\right)\left[\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)-1\right]=\left(\lim_{x\to+\infty} x\right)\left[\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)-1\right]=-\infty.$$

## 2.7. **Calcul des Intégrales :**

La notion d'intégrale a été développée pour définir et calculer l'aire d'une surface délimitée par la courbe d'une fonction. Pour construire l'intégrale, on commence par la définir pour les fonctions simples dont on sait calculer l'aire, à savoir les fonctions en escalier. Par la suite, on donne la définition de l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ comme limite de l'intégrale des fonctions en escaliers.

Après avoir définie l'intégrale des fonctions continues et donnée ces différentes propriétés, on s'attèle aux méthodes de calculs des intégrales.

Dans cette section, nous abordons les notions suivantes :

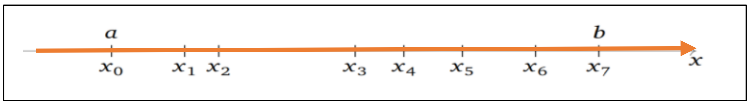
- Intégrale Définie.
- Fonction en escalier.
- Intégrale Indéfinie.
- Les fonctions Primitives
- Théorème Fondamental du Calcul Intégrale.

### 2.7.1. **Intégrale Définie :**

#### 1. **Intégrale Définie des Fonctions en Escaliers :**

**Définition - Subdivision.**

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle une **subdivision** de $[a, b]$ une famille de réels $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.




**Définition - Fonction en escalier.**

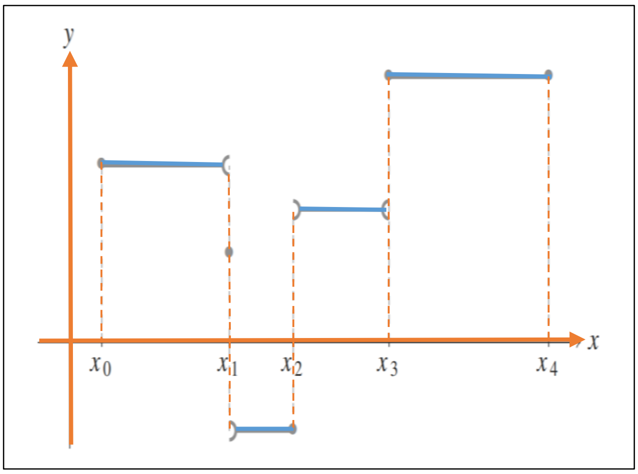
Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est une **fonction en escalier** s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et des nombres réels $c_1, c_2, \dots, c_n$ tels que :

$$\text{Pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \text{ on ait } \forall x \in ]x_{i-1}, x_i[\ f(x) = c_i$$

Autrement dit $f$ est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.

Par exemple, une fonction constante sur $[a, b]$ est une fonction en escalier, il suffit de considérer la subdivision $(x_0, x_1)$ telle que $a = x_0 < x_1 = b$.

Ci-dessous, l'interprétation graphique de la fonction en escalier :




**<u>Définition – Intégrale d'une fonction en escalier.</u>**

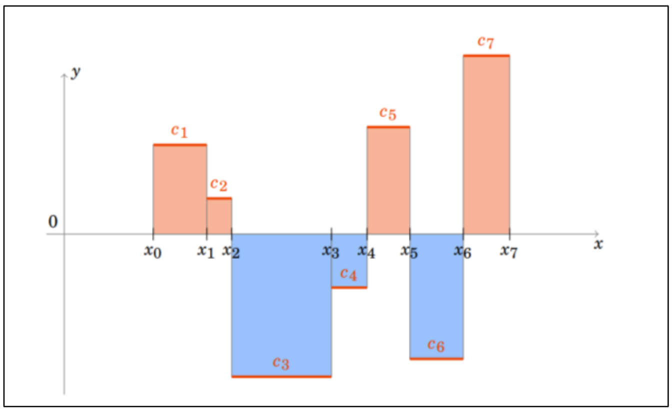
Soit $f$ une fonction en escalier définie comme ci-dessus. On appelle **intégrale** de $f$ sur $[a, b]$ le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

où $\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \cdots + c_n(x_n - x_n)$.

**<u>Remarque.</u>**

- Géométriquement, $c_i(x_i - x_{i-1})$ est l'aire du rectangle limité par l'axe $(\mathrm{O}x)$, les droites d'équation $x = x_{i-1}$ et $x = x_i$ et la droite d'équation $y = c_i$, affectée du signe $+$ si ce rectangle est au-dessus de $(\mathrm{O}x)$ et du signe $-$ dans le cas contraire.
- L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au-dessus de l'axe des abscisses (ici en rouge) moins l'aire de la partie située en-dessous (en bleu).



2. **Intégrale Définies des Foncions Continues :**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle fermé et borné $[a,b]$, et soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$, c'est-à-dire $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Et soit $\varphi_n$ une fonction en escalier telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\forall x \in ]x_{i-1}, x_i[ \ \ \varphi_n(x) = c_i = f(x_i)$$

Ainsi, l'intégrale de $\varphi_n$ sur $[a,b]$ est

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Mais $x_i - x_{i-1} = \left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) - \left(a + (i-1)\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = \frac{b-a}{n}$. En posant $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, on a

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^a \varphi_n(x)dx$ existe. On dit alors $f$ est **intégrable** sur $[a,b]$ et on a

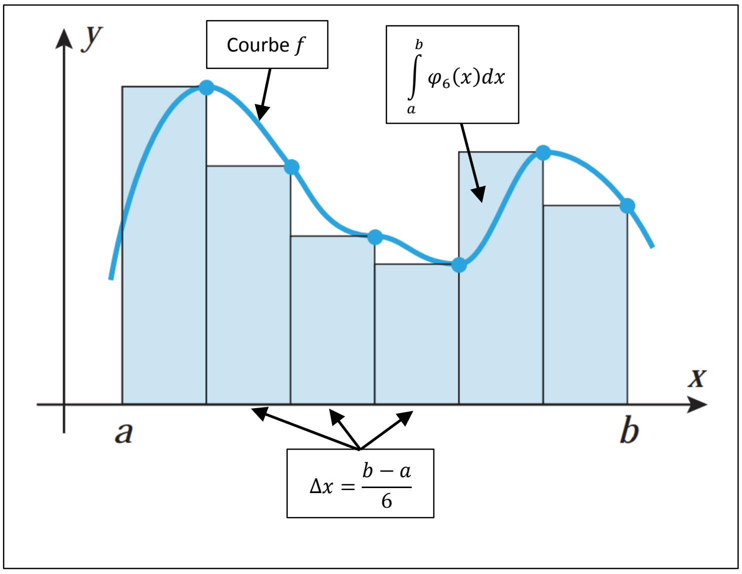
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx$$

On dit que $\int_a^b f(x)dx$ est **l'intégrale définie** de $f$ de $a$ à $b$. Les nombres $a$ et $b$ sont les bornes de l'intégration.

Ci-contre, la représentation de

$$\int_a^b \varphi_6(x)dx = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x$$

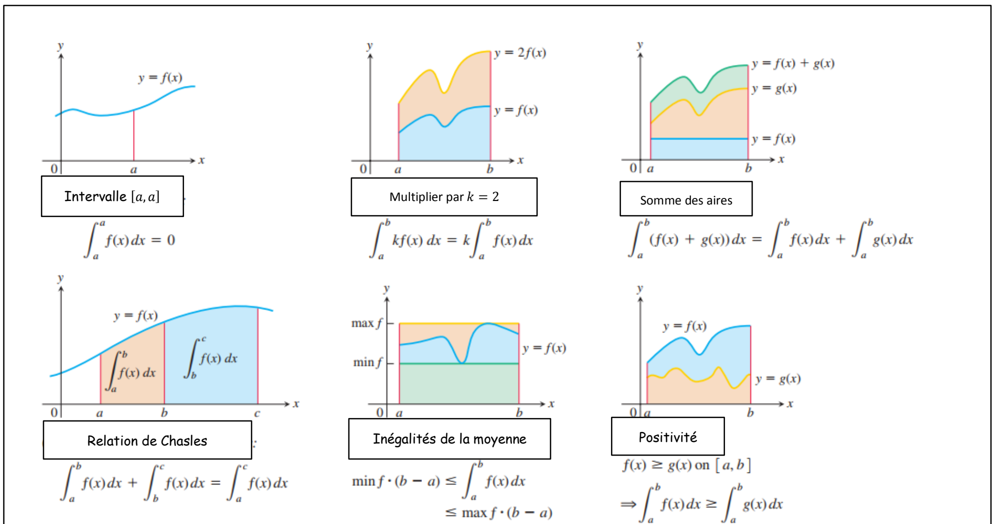
$$\Delta x = \frac{b-a}{6}$$



## Propriétés de l'intégrale définie d'une fonction continue.

1. Ordre d'intégration : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ C'est une définition
2. Intervalle $[a, a]$ : $\int_a^a f(x)dx = 0$ C'est une définition
3. Multiplication par $k$ : $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ Pour tout $k \in \mathbb{R}$
4. Somme et différence : $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
6. Inégalités de la moyenne : $\min f\,.(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max f\,.(b-a)$
7. Positivité : $f(x) \geq g(x)$ sur $[a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

   $f(x) \geq 0$ sur $[a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$ Cas particulier




Interpretation geometrique des proprietes 2-7

▪ Pour le calcul pratique de l'intégrale définie d'une fonction sur l'intervalle $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$, on utilise la notion de primitive et d'intégrale indéfinie de la fonction $f$. Ces deux notions seront développées dans le paragraphe suivant.

### 2.7.2. **Primitive et Intégrale Indéfinie :**

**Définition – Primitive.**

On appelle primitive de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I$, toute fonction $F$ définie et dérivable sur l'intervalle $I$, telle que $F'(x) = f(x)$.

**Exemple.** La primitive de $f(x) = x^2$ est $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. En effet, $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$.

On remarque aisément que si $f$ admet une primitive, celle-ci n'est pas unique. Ainsi, dans l'exemple précèdent, on peut prendre comme primitive les fonctions suivantes : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2$; $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ ou plus généralement $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ (où $C$ est une constante). En effet, $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2$.

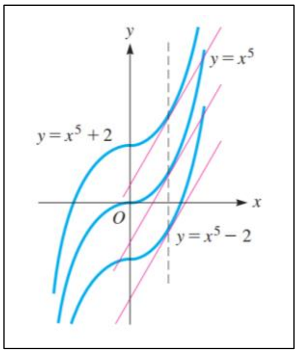
**Théorème sur les Primitives.**

Soit $F$ une primitive de $f$, alors toutes les primitives de $f$ sont de la forme $F(x) + C$, où $C$ est une constante.

**Définition – Intégrale Indéfinie.**

Soit $F$ une fonction primitive de $f$ sur un intervalle $I$. L'intégrale indéfinie de $f(x)$ sur $I$ est définie par

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$




Où $C$ est une constante arbitraire.

**Exemple.** Calculons l'intégrale indéfinie suivant :

$\int 5x^4 dx = x^5 + C$.

■ Géométriquement, l'intégrale indéfinie représente une famille de courbes telles que l'on passe de l'une à l'autre en effectuant une translation dans le sens positif ou négatif de l'axe $Oy$.

■ Le processus qui permet de trouver la primitive d'une fonction $f$ est appelé intégration de la fonction $f$.

■ Il faut distinguer entre l'intégrale définie et indéfinie. L'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est un nombre. L'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$ est une fonction plus une constante arbitraire.

■ L'intégration d'une fonction $f$ nécessite la connaissance les propriétés de l'intégrale indéfinie, l'intégrations de certaines foncions usuelles et les différentes méthodes d'intégrations.

1. **Propriétés de l'intégrale indéfinie.**

Supposons que $F(x)$ et $G(x)$ sont les primitives des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ respectivement, et que $\alpha$ est une constante. Alors :

- $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx = \alpha F(x) + C$.
- $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C$.
- $\int \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C$.

## 2. **Table d'intégrations.** Soit $f$ une fonction et $F$ sa primitive.

| $f(x)$ | $\int f(x)dx = F(x) + C$ |
|---|---|
| $x^\alpha, \alpha \neq -1$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ |
| $a^x, a > 0, a \neq 1$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| $sin\,(x)$ | $-cos(x) + C$ |
| $cos(x)$ | $sin(x) + C$ |
| $\tan(x)$ | $-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$ |
| $\mathrm{cotan}(x)$ | $\ln\lvert sin(x)\rvert + C$ |
| $\frac{1}{cos^2 x}$ | $\tan(x) + C$ |
| $\frac{1}{sin^2 x}$ | $-\mathrm{cotan}(x) + C$ |
| $\mathrm{sh}(x)$ | $\mathrm{ch}(x) + C$ |
| $\mathrm{ch}(x)$ | $\mathrm{sh}(x) + C$ |
| $\mathrm{th}(x)$ | $\ln(\mathrm{ch}(x)) + C$ |

| $f(x)$ | $\int f(x)dx = F(x) + C$ |
|---|---|
| $\coth(x)$ | $\ln(\mathrm{sh}(x)) + \mathrm{C}$ |
| $\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$ | $\mathrm{th}(x) + C$ |
| $\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$ | $-\coth(x) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0$ | $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, a \neq 0$ | $\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a \neq 0$ | $\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}, b \neq 0$ | $\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+b}\right\rvert + C$ |
| $\frac{1}{x^2+1}$ | $\mathrm{arctg}(x) + C$ |
| $\frac{1}{x^2+a^2}, a \neq 0$ | $\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ |
| $\frac{1}{a^2-x^2}, a \neq 0$ | $\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$ |

***Tableau de quelques fonctions hyperboliques, trigonométriques et leurs inverses***

| | |
|---|---|
| $\mathbf{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ | Est nommée ***sinus hyperbolique*** |
| $\mathbf{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ | Est nommée ***cosinus hyperbolique*** |
| $\mathbf{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | Est nommée ***tangente hyperbolique*** |
| $\mathbf{coth}(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ | Est nommée ***cotangente hyperbolique*** |
| $\mathbf{tan}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ | est nommée ***tangente*** |
| $\mathbf{cotan}(x) = \frac{\mathrm{cosin}(x)}{\sin(x)}$ | est nommée ***cotangente*** |
| $\mathbf{arcsin}(x)$ | Désigne la fonction réciproque de $\mathbf{sin}(x)$ |
| $\mathbf{arc\,cos}(x)$ | Désigne la fonction réciproque de $\mathbf{cos}(x)$ |
| $\mathbf{arctg}(x)$ | Désigne la fonction réciproque de $\mathbf{tan}(x)$ |
| $\mathbf{arc\,cotg}(x)$ | Désigne la fonction réciproque de $\mathbf{cotan}(x)$ |

3. **Méthodes d'intégration.**

Nous développons ici les méthodes d'intégration des fonctions dont on ne sait pas calculer directement la primitive.

- **Intégration par changement de variable.**

Soit à calculer une intégrale de la forme

$$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)dx$$

Où $f$ une fonction dont la primitive $F$ est connue, et $g$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors, on peut transformer cette intégrale en intégration d'une fonction dont on connait la primitive et cela en faisant le changement de variable suivant :

Posons $u = g(x)$ et donc $du = g'(x)dx$. Alors

$$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F\big(g(x)\big) + C$$

**Exemple.** Calculer l'intégrale suivante

$$\int (x^2+3)^{53}\, 2xdx$$

Faisons le changement de variable suivant

$u = x^2 + 3$ donc $du = (x^2+3\,)'dx = 2xdx$. Alors

$$\int (x^2+3)^{53}\, 2xdx = \int u^{53}\, du = \frac{1}{54}u^{54} + C = \frac{1}{54}(x^2+3)^{54} + C$$

- **Intégration par parties.**

Soit à calculer une intégrale de la forme

$$\int u(x)v'(x)dx$$

Où $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On sait que

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

En intégrant, on trouve

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

Ou bien

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

C'est ce que l'on appelle la formule d'intégration par partie. On utilise généralement l'intégration par partie pour des fonctions pouvant être mise sous forme $u(x)v'(x)$ tel que la recherche de $v(x)$ à partir de $v'(x)$ et le calcul de l'intégrale $\int u'(x)v(x)dx$ constituent un problème plus simple que le calcul direct de l'intégrale $\int u(x)v'(x)dx$ .

**Exemple.** Calculer l'intégrale suivante

$$\int x^2e^x dx$$

Posons $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^x$ ; alors $u'(x) = 2x$ et $v(x) = e^x$. Par intégration par partie, on a :

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

On applique de nouveau à cette dernière intégrale la méthode d'intégration partie et en posant : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$ ; alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. Alors

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Finalement,

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

### 2.7.3. **Calcul Pratique de L'Intégrale Définie :**

Dans cette section, nous allons voir comment utiliser la primitive pour calculer l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$. Ce lien entre la primitive et l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est donné par ce qu'on appelle Le Théorème Fondamental du Calcul Intégral.

**Théorème - Le Théorème Fondamental du Calcul Intégral (Part 1).**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $F$ une primitive quelconque de $f$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

**Exemple.** Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_1^2 x dx$. On a $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f(x) = x$. Donc,

$$\int_1^2 x dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

- $\int_0^3 (9 - x^2)\, dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \left(9 \times 3 - \frac{1}{3}3^3\right) - \left(9 \times 0 - \frac{1}{3}0^3\right) = 18.$

**Théorème - Le Théorème Fondamental du Calcul Intégral (Part 2).**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et sa dérivée :

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x)$$

**Exemple.** Calculer les dérivées :

- $F(x) = \int_1^x t^2 dt \implies F'(x) = x^2.$
- $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^t dt$. Remarquons que $F(x)$ n'est pas de la forme $\int_a^x f(t)dt$, donc on ne peut pas appliquer le théorème. Pour cela, posons

$$G(x) = \int_0^x e^t dt$$

  Donc, $G'(x) = e^x$. De plus $F(x) = G(\sqrt{x})$. Ainsi,

$$F'(x) = \left(G(\sqrt{x})\right)' = (\sqrt{x})' G'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

1. **Calcul de l'intégrale définie par le changement de variable.**

Soit à calculer une intégrale définie de la forme

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x) dx$$

En posant $u = g(x)$ et $du = g'(x)dx$, les bornes d'intégration de la fonction $f(u)$ sont : $u = g(a)$ pour $x = a$ et $u = g(b)$ pour $x = b$. Alors

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

**Exemple.** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

Posons $u = x^2 + 1$, donc $du = 2xdx$. Les bornes d'intégration : pour $x = 0, u = 1$ et $x = 2, u = 5$. Donc,

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^5 \frac{1}{2}\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^5 = \frac{1}{3}\left(5^{3/2} - 1\right)$$

2. **Calcul de l'intégrale définie – Intégration par Partie.**

Soit à calculer une intégrale de la forme

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

**Exemple.** Calculer l'intégrale suivante :

- $\int_1^3 xe^{-x}dx$. Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_1^3 xe^{-x}dx &= [-xe^{-x}]_1^3 - \int_1^3 -e^{-x}dx\\ &= [-xe^{-x}]_1^3 - [e^{-x}]_1^3\\ &= (-3e^{-3} + e^{-1}) - (e^{-3} - e^{-1})\\ &= 2(e^{-1} - e^{-3})\end{aligned}$$

- $\int_1^3 x\ln x$. Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = e^{-x}x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$. Alors

$$\int_1^3 x\ln x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_2^3 - \int_1^3 \frac{1}{2}xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^3 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^3$$

$$= \left(\frac{9}{2}\ln 3 - 0\right) - \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{2}\ln 3 - 2$$

2.7.4. **Applications de L'intégrale Définie :**

L'une des applications de l'intégrale définie est le calcul des aires. On s'intéressera aux aires délimitées par deux courbes.

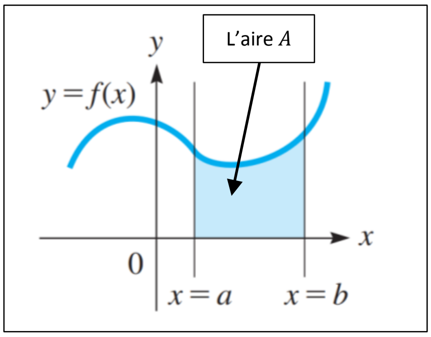
1. **L'Aire entre la courbe et l'axe $Ox$.**

**Définition de L'aire.**

Soit $f$ est une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, **l'aire $A$** délimitée par la courbe $f$, l'axe $Ox$ et les droites verticales $x = a$ et $x = b$ est donné par

- Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$,

$$A = \int_a^b f(x)dx$$




- Si $f(x) \leq 0$ sur $[a, b]$,

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

- Si $f$ change de Signe sur $[a, b]$,

On décomposera l'intégrale sur $[a, b]$ en intégrales partielles chacun est positive ou négative. Alors

$$A = (\text{somme des intégrales positive }) - (\text{somme des intégrales négative})$$

**Exemples.** Calculer l'aire délimitée par la courbe $f$ et l'intervalle $[a, b]$ sur $Ox$.

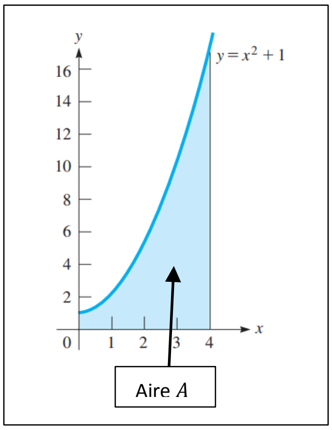
■ Cas $f(x) = x^2 + 1$ sur $[0,4]$.

On a $f \geq 0$ sur $[0,4]$. Donc l'aire est :

$$A = \int_0^4 (x^2 + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^4$$

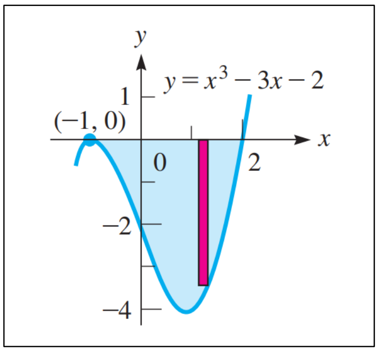
$$= \left[\frac{1}{3}(4^3) + 4\right] - \left[\frac{1}{3}(0^3) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{3}64 + 4 = \frac{76}{3}$$



■ Cas $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ sur $[-1,2]$. On détermine le signe de $f$.

On peut vérifier que le maximum globale de $f$ sur $[-1,2]$ égale à zéro. Donc $f(x) \leq 0$ sur $[-1,2]$. Alors



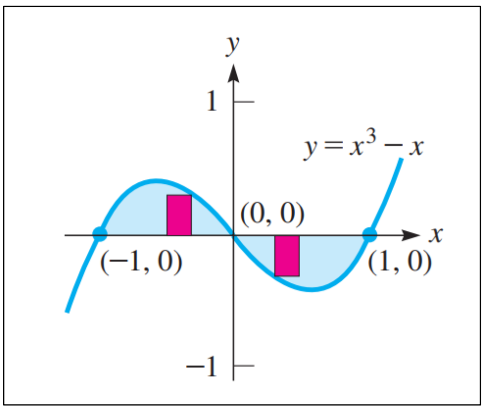

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-1}^{2} (x^3 - 3x^2 - 2)dx \\ &= \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x^2 + 2)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 2x\right]_{-1}^{2} \\ &= \left[-\frac{1}{4}(2^4) + 2^3 + 2(2)\right] - \left[-\frac{1}{4}(-1)^4 + (-1)^3 + 2(-1)\right] \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

■ Cas $f(x) = x^3 - x$ sur $[-1,1]$. On détermine le signe de $f$.

On a $x = 0$, est le seul point sur lequel $f$ s'annule sur $]-1,1[$.

Donc, $f$ change de signe au point $x = 0$. $f$ est positive sur $[-1,0]$, négative sur $[0,1]$. Alors, l'aire est

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} \\ &= \left[0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] + \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - 0\right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



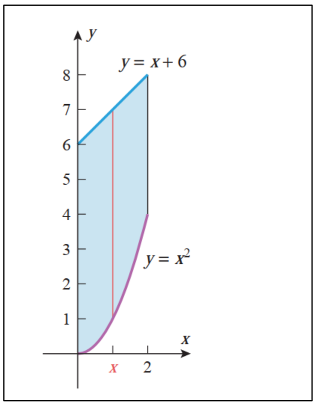
## 2. L'Aire entre deux courbes :

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Supposons que : $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors l'aire délimitée supérieurement par $f$ et inférieurement par $g$ et par les droites verticales $x = a$ et $x = b$ est

$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

**Exemple.** Calculer l'aire délimitée supérieurement par $f(x) = x + 6$ et inférieurement par $g(x) = x^2$ et par les droites verticales $x = 0$ et $x = 2$.

Par définition,




$$A = \int_0^2 \big((x+6) - x^2\big)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{34}{3} - 0 = \frac{34}{3}$$

**Exemple.** Calculer l'aire délimitée par les courbes $f(x) = 3 - x$ et $g(x) = x^2 - 9$.

Notons que les bornes de l'intégrale sont les abscisses des points d'intersections entre les deux courbes. En mettant $f(x) = g(x)$, on a

$$3 - x = x^2 - 9 \text{ ou } x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4) = 0$$

Ainsi, les deux courbes se rencontrent en $x = 3$ et $x = -4$. Notons aussi, sur l'intervalle $[-4,3]$, $x^2 + x - 12 = g(x) - f(x) \leq 0$ ou bien $g(x) \leq f(x)$. C'est-à-dire l'aire est délimitée supérieurement par $f(x)$ et inférieurement par $g(x)$. Donc

$$A = \int_{-4}^{3} \big((3-x) - (x^2-9)\big)dx = \int_{-4}^{3} (-x^2 - x + 12)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 12x\right]_{-4}^{3} = \frac{45}{2} - \left(-\frac{208}{6}\right) = \frac{343}{6}$$